

Способы решения уравнений с модулями:

- 1. По определению модуля
- 2. Возведение обеих частей уравнения в квадрат
- 3. Замена переменной
- 4. Раскрытие модуля на промежутке знакопостоянства
- 5. Замена совокупностью систем
- 6. Важный частный случай

1. По определению модуля

$$|f(x)| = a \quad (a \geq 0)$$

$$f(x) = a \quad \text{или} \quad f(x) = -a$$

Пример : $|3x - 8| = 5$

Решение:

$$3x - 8 = 5 \quad \text{или} \quad 3x - 8 = -5;$$

$$3x = 13, \quad 3x = 3;$$

$$x = 13/3, \quad x = 1.$$

Ответ: 13/3; 1.

По определению модуля № 1

$$|2x - 3| = 5$$

Решение

$$\begin{array}{l} 2x - 3 = 5 \quad \text{или} \quad 2x - 3 = -5 \\ 2x = 8 \quad \quad \quad 2x = -2 \\ x = 4 \quad \quad \quad x = -1 \end{array}$$

Ответ: -1;4

По определению модуля № 3

$$\sqrt{(5x - 2)^2} = 4$$

Решение

$$|5x - 1| = 4$$

$$5x - 1 = 4 \quad \text{или} \quad 5x - 1 = -4$$

$$5x = 5 \quad \text{или} \quad 5x = -3$$

$$x = 1 \quad \quad \quad x = -3/5 = -0,6$$

Ответ: -0,6; 1

2. Возведение обеих частей в квадрат

Пример $|x - 3| = |x + 2|$

Решение $(x - 3)^2 = (x + 2)^2$ *

$$(x - 3)^2 - (x + 2)^2 = 0$$

$$(x - 3 + x + 2)(x - 3 - x - 2) = 0$$

$$-5 \cdot (2x - 1) = 0, \text{ то } (2x - 1) = 0$$

$$x = 1/2$$

Ответ: 0,5

При возведении обеих частей в квадрат данного уравнения равносильность не нарушается, т.к. модуль всегда неотрицательный, и $|a|^2 = a^2$

Решить возведением обеих частей в квадрат

$$|x - 4| = |x - 1|$$

$$(x - 4)^2 - (x - 1)^2 = 0$$

$$(x - 4 + x - 1)(x - 4 - x + 1) = 0$$

$$-3(2x - 5) = 0$$

$$2x - 5 = 0$$

$$x = 2,5$$

Ответ: 2,5

[Вернуться назад](#)

3. Замена переменной

Пример: $x^2 - 7|x| - 8 = 0$

Решение: $t = |x|$

$$t^2 - 7t - 8 = 0$$

$$t_1 + t_2 = 7$$

$$t_1 \cdot t_2 = -8$$

$$t_1 = -1$$

$$t_2 = 8$$

$$|x| = 8$$

$$x = 8 \quad x = -8$$

Ответ: 8; -8.

условие $t \geq 0$

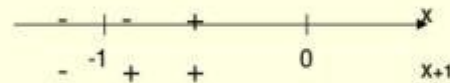
не удовлетворяет условию

4. Раскрытие модуля на промежутке знакопостоянства

■ Универсальный способ

Пример: $|x| + |x+1| = 1$

Решение: Найдем нули подмодульных выражений: 0; -1



$$1. \begin{cases} x \leq -1 \\ -x - x - 1 = 1 \end{cases}, \text{ то } \begin{cases} x \leq -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -x + x + 1 = 1 \end{cases}, \text{ то } \begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0x = 0 \end{cases}, -1 < x < 0$$

$$3. \begin{cases} x \geq 0 \\ x + x + 1 = 1 \end{cases}, \text{ то } \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x = 0 \end{cases}, \text{ то } x = 0$$

$$\begin{aligned} x &= -1 \\ -1 < x < 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Ответ: $[-1; 0]$.

Раскрытие модуля на промежутках знакопостоянства № 2

$$|x - 3| + 2|x + 1| = 4$$

Если $x \leq -1$, то

$$\begin{aligned} 3 - x - 2x - 2 &= 4 \\ -3x + 1 &= 4 \\ -3x &= 4 - 1 \\ -3x &= 3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Если $x > 3$, то

$$\begin{aligned} x - 3 + 2x + 2 &= 4 \\ 3x - 1 &= 4 \\ 3x &= 4 + 1 \\ 3x &= 5 \\ x &= 5/3 \\ \text{нет решений} \end{aligned}$$

Если $-1 < x \leq 3$, то

$$\begin{aligned} 3 - x + 2x + 2 &= 4 \\ x + 5 &= 4 \\ x &= 4 - 5 \\ x &= -1 \\ \text{нет решений} \end{aligned}$$

Ответ: - 1

5. Замена совокупностью систем

$$|f(x)| = g(x)$$

I способ

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

II способ

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Замена совокупностью систем

Пример: $|2x + 7| = 3x + 4$

I способ

$$\begin{cases} 3x + 4 > 0 \\ 2x + 7 = 3x + 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x + 4 \geq 0 \\ 2x + 7 = -(3x + 4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x \geq -4 \\ 2x - 3x = 4 - 7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3x > -4 \\ 2x + 7 = -3x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -4/3 \\ -x = -3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > -4/3 \\ 2x + 3x = -4 - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4/3 \\ x = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geq 4/3 \\ 5x = -11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -4/3 \\ x = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geq -4/3 \\ x = -2,2 \end{cases}$$

$x = 3$ решение, а $x = -2,2$ не решение

II способ

$$\begin{cases} 2x + 7 \geq 0 \\ 2x + 7 = 3x + 4 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x + 7 < 0 \\ 2x + 7 = -(3x + 4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x \geq -7 \\ 2x - 3x = 4 - 7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x < -7 \\ 2x + 7 = -3x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > -3,5 \\ x = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < -3,5 \\ 2x + 3x = -4 - 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -3,5 \\ x = 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x < -3,5 \\ 5x = -11 \end{cases}$$

$x = 3$ решение, а $x = -2,2$ не решение

6. Важный частный случай

$$|f(x)| = -f(x), \text{ тогда } f(x) \leq 0$$

Пример: $7-4x = |4x-7|$

Решение: т.к. $|f(x)| = -f(x)$, то $f(x) \leq 0$

$$4x - 7 \leq 0$$

$$x \leq 7/4, \quad 7/4 = 1,75$$

Ответ: $(-\infty; 1,75]$