

Лоскутов Ю.В.

# Курс лекций по теоретической механике

## Кинематика

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СТР, ЭУН, ПЗ, АД, СУЗС и ТМО в ПГТУ (2001-2013 гг.). Учебный материал соответствует календарным планам в объеме двух семестров. Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки. Завершение – Esc. Замечания и предложения можно послать по e-mail: loskutovyv@volgatech.net

Йошкар-Ола - 2014

# Содержание

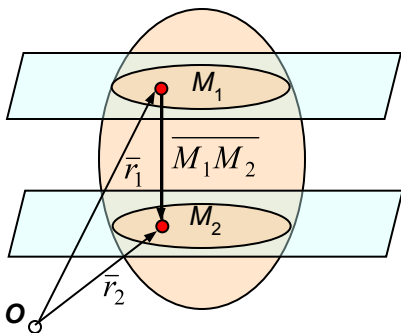
- **Лекция 4.** Плоскопараллельное движение твердого тела. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное движения. Уравнения движения. Теорема о сложении скоростей. Следствия из теоремы. Мгновенный центр скоростей (МЦС).
- **Лекция 5.** Примеры использования МЦС для определения скоростей. Теорема о сложении ускорений. Мгновенный центр ускорений (МЦУ). Примеры использования теоремы о сложении ускорений и МЦУ для определения ускорений

## Рекомендуемая литература

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.1. М.: Высшая школа. 1977 г. 368 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука. 1986 г. 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ /Под ред. А.А. Яблонского. М.:Высшая школа. 1985 г. 366 с.

# Лекция 4

- **Плоскопараллельное движение твердого тела** – движение при котором каждая точка тела движется в в плоскости параллельной некоторой неподвижной плоскости. Сечение тела одной из таких плоскостей есть плоская фигура, остающаяся в этой плоскости при движении тела.



- **Теорема о плоскопараллельном движении твердого тела** – плоскопараллельное движение твердого тела однозначным образом определяется движением плоской фигуры, образованной сечением тела одной из параллельных плоскостей.

Выберем две точки на произвольных двух сечениях тела, находящиеся на одном перпендикуляре к этим плоскостям:

Проведем к каждой точке радиусы-векторы из неподвижной точки O и свяжем их между собой вектором  $\overline{M_1M_2}$ :

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \overline{M_1M_2}$$

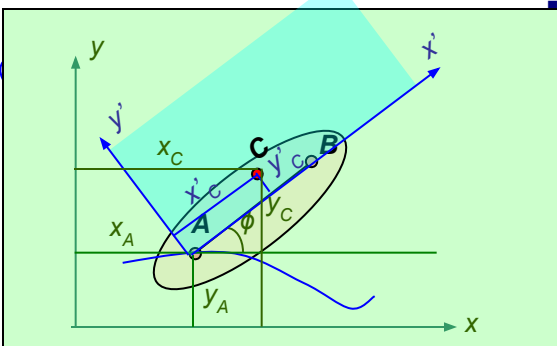
При плоском движении тела вектор  $\overline{M_1M_2}$  не изменяется по величине, остается параллельным самому себе (движется поступательно) и, следовательно, точки этого вектора описывают тождественные траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения:

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt}; \quad (\overline{M_1M_2} = const); \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_1, \quad \text{и} \quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}; \quad \vec{a}_2 = \vec{a}_1.$$

Таким образом, при плоском движении тела движение каждой точки одной из плоских фигур определяет движение соответствующих точек, находящихся во всех других смежных параллельных плоскостях.

**Следствие:** Поскольку положение плоской фигуры однозначно определяется положением ее двух точек или отрезка прямой, проведенной через эти точки, то **плоскопараллельное движение твердого тела определяется движением прямолинейного отрезка, принадлежащего одному из сечений тела параллельными плоскостями.**

- **Разложение плоскопараллельного движения плоской фигуры на поступательное и вращательное движения** – Плоскую фигуру или отрезок прямой можно перевести из одного положения в другое бесчисленным множеством способов, меняя последовательность выполнения поступательного и вращательного движения между собой, а также выбирая различные траектории и точки в качестве полюса:



Таким образом, **плоскопараллельное движение состоит из двух движений: поступательное и вращательное, и его всегда можно разложить на эти два движения.**

**Уравнение движения плоской фигуры:** Выбирая в качестве полюса любую точку, например, A, поступательная часть движения будет описываться уравнениями движения этой точки. Вращательная часть движения описывается уравнением изменения угла поворота вокруг полюса:

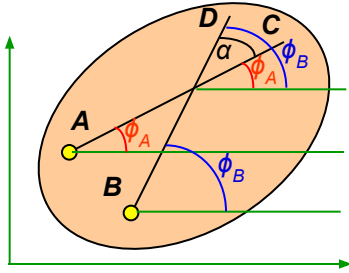
$$\begin{cases} x_A = x_A(t); \\ y_A = y_A(t); \\ \varphi = \varphi(t). \end{cases}$$

Уравнения движения любой точки плоской фигуры, положение которой задается координатами локальной системы отсчета, связанной с фигурой:

$$\begin{cases} x_C = x_A(t) + x'_C \cos \varphi(t) - y'_C \sin \varphi(t); \\ y_C = y_A(t) + x'_C \sin \varphi(t) + y'_C \cos \varphi(t). \end{cases}$$

# Лекция 4 (продолжение 4.2)

- Независимость угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры от выбора полюса** – Выберем два произвольных прямолинейных отрезка, изображающих положение плоской фигуры и два полюса на этих отрезках:



Углы наклона отрезков к горизонтальной оси различны и связаны между собой соотношением:  $\varphi_B(t) = \varphi_A(t) + \alpha$ .

Продифференцируем это соотношение:  $\frac{d\varphi_B(t)}{dt} = \frac{d\varphi_A(t)}{dt}$ , ( $\alpha = const$ ).

Отсюда следует, что **угловые скорости** двух отрезков **равны**:

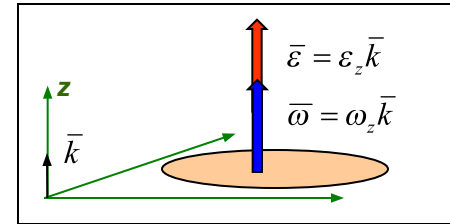
$$\omega_{CA} = \omega_{DB}$$

После повторного дифференцирования следует,

что **угловые ускорения** двух отрезков также **равны**:  $\frac{d\omega_{CA}}{dt} = \frac{d\omega_{DB}}{dt}$ .

$$\varepsilon_{CA} = \varepsilon_{DB}$$

Таким образом, угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры не зависят от выбора полюса и их можно представить в виде векторов, перпендикулярных плоскости фигуры:



- Теорема о сложении скоростей** – Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.

Радиусы-векторы точек A и B связаны между собой соотношением:

$$\vec{r}_B(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{r}_{AB}(t)$$

Продифференцируем это соотношение:

$$\frac{d\vec{r}_B(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_A(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}_{AB}(t)}{dt}$$

Второе слагаемое есть вращательная скорость точки B вокруг полюса A:

$$\vec{v}_{BA}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_{AB}(t); \quad |\vec{r}_{AB}| = const.$$

$$\vec{v}_B(t) = \vec{v}_A(t) + \vec{v}_{BA}(t)$$

Таким образом, скорость точки B равна геометрической сумме скорости полюса A и вращательной скорости точки B вокруг полюса:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$$

- Следствие 1** – Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки равны.

Спроецируем векторное соотношение на ось  $x_1$ :

$$(x_1): \quad v_{Bx1} = v_{Ax1}, \quad (\vec{v}_{BA} \perp x_1)$$

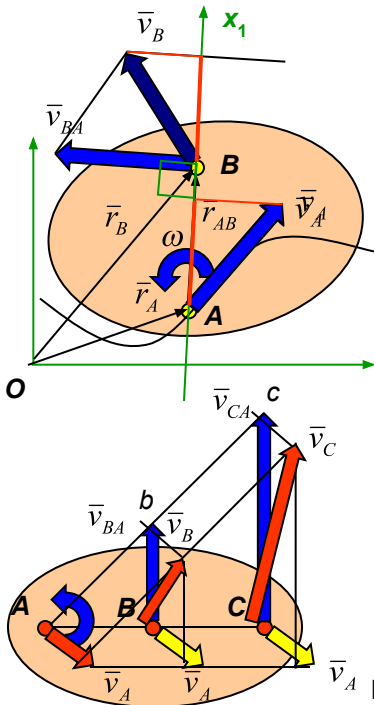
- Следствие 2** – Концы векторов скоростей точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят эту прямую на отрезки пропорциональные расстояниям между точками.

Концы векторов вращательных скоростей точек B и A лежат на одной прямой и делят ее на отрезки пропорциональные расстояниям между точками:

Концы векторов скоростей полюса A лежат, изображенных в точках B и C также лежат на одной прямой.

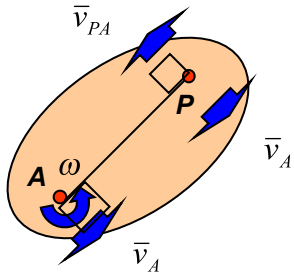
$$v_{BA} = \omega AB, \quad v_{CA} = \omega AC, \quad \frac{v_{CA}}{v_{BA}} = \frac{AC}{AB} = \frac{Ac}{Ab}$$

Нетрудно доказать из подобия треугольников, что концы векторов скоростей точек B и C также лежат на одной прямой, и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками.



## Лекция 4 (продолжение 4.3)

- Мгновенный центр скоростей (МЦС)** – При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка, жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю.



Пусть известна скорость одной из точек фигуры и угловая скорость вокруг этой точки:

Запишем векторное соотношение для скорости некоторой точки  $P$  согласно теореме о сложении скоростей:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = \vec{v}_A + \vec{v}_{PA}. \quad \text{Зададим значение скорости этой точки } P \text{ равной нулю: } \vec{v}_P = 0.$$

Тогда получаем:  $\vec{v}_{PA} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = -\vec{v}_A$ . Т.е. вращательная скорость искомой точки должна быть равна по модулю скорости точки  $A$ , параллельна этой скорости и направлена в противоположную сторону.

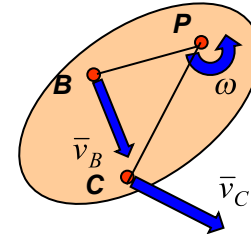
Это позволяет найти положение МЦС (точки  $P$ ), а именно: МЦС должен находиться на перпендикуляре к скорости точки  $A$ , отложенном в сторону угловой скорости, на расстоянии:

$$AP = \frac{v_A}{\omega}.$$

Если положение МЦС найдено, скорость любой точки плоской фигуры может быть легко определена посредством выбора полюса в МЦС. В этом случае векторное выражение теоремы о сложении скоростей вырождается в известную зависимость скорости от расстояния до центра вращения:

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PB} = \vec{v}_{BP}; & (\vec{v}_P = 0); & & v_B &= \omega \cdot BP; \\ \vec{v}_C &= \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PC} = \vec{v}_{CP}; & (\vec{v}_P = 0); & & v_C &= \omega \cdot CP; \end{aligned}$$

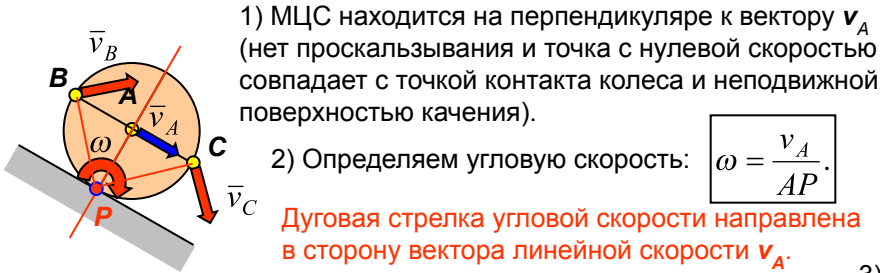
Другими словами, можно утверждать, что **в любой момент времени тело не совершает никакого другого движения, кроме как вращательного движения вокруг МЦС.**



# Лекция 5

- **Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры** – Поскольку при движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка (МЦС), жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю, то при определении скоростей эту точку и следует выбирать в качестве полюса, играющего роль центра вращения в данный момент времени.
- Ниже рассмотрим процедуру определения скоростей на примерах:

1) Дано:  $v_A$ , положения точек  $A, B, C$ , проскальзывание отсутствует.  
Найти:  $v_B, v_C$

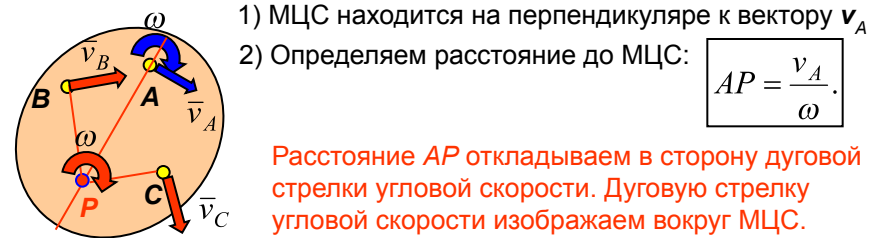


3) Соединяем точки  $B$  и  $C$  с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$\begin{cases} v_B = \omega \cdot BP; \\ v_C = \omega \cdot CP. \end{cases}$$

Векторы линейных скоростей  $v_B$  и  $v_C$  направлены в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

2) Дано:  $v_A, \omega$ , положения точек  $A, B, C$ .  
Найти:  $v_B, v_C$

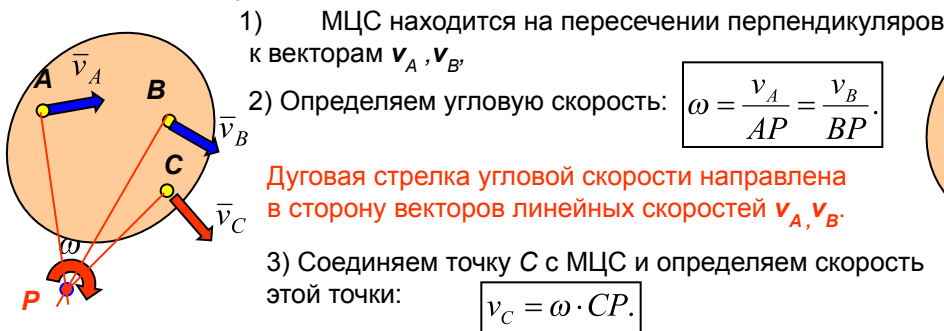


3) Соединяем точки  $B$  и  $C$  с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$\begin{cases} v_B = \omega \cdot BP; \\ v_C = \omega \cdot CP. \end{cases}$$

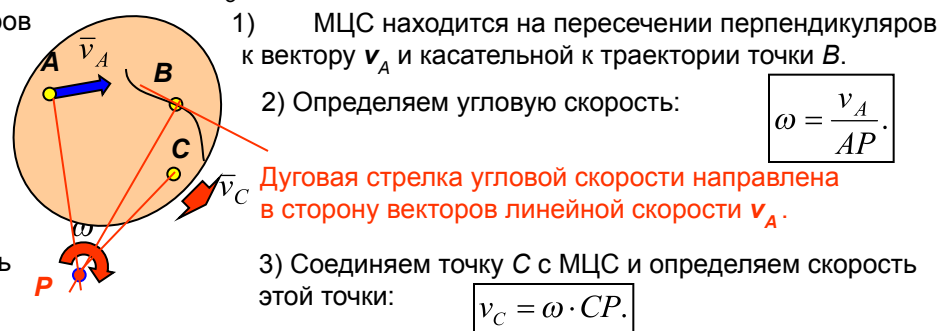
Векторы линейных скоростей  $v_B$  и  $v_C$  направлены в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

3) Дано:  $v_A, v_B$ , положения точек  $A, B, C$ .  
Найти:  $v_C$



Вектор линейной скорости  $v_C$  направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

4) Дано:  $v_A$ , траектория точки  $B$ , положения точек  $A, B, C$ .  
Найти:  $v_C$

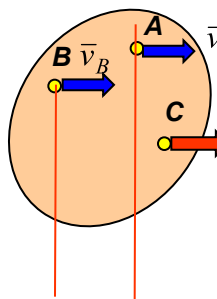


Вектор линейной скорости  $v_C$  направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

# Лекция 5 (продолжение 5.2)

## Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры

5 Дано:  $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ , положения точек  $A, B, C$ .  
Найти:  $\vec{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров  $\vec{v}_A$  к векторам  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$ . Эта точка находится в бесконечности.

2) Угловая скорость обращается в нуль (мгновенно поступательное движение):

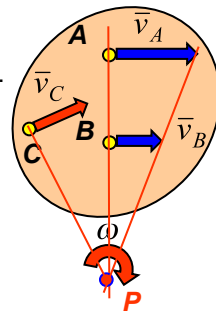
$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0.$$

3) Скорость точки  $C$  равна геометрически скоростям точек  $A$  и  $B$ :

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A = \vec{v}_B.$$

Вектор скорости точки  $C$  направлен параллельно векторам скоростей точек  $A$  и  $B$  (в ту же сторону).

6 Дано:  $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_A \parallel \vec{v}_B$ , положения точек  $A, B, C$ .  
Найти:  $\vec{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$ . Эти перпендикуляры сливаются в одну линию.

2) Определяем положение МЦС (проводим линию через концы векторов  $\vec{v}_A$  и  $\vec{v}_B$ ) и угловую скорость:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A - v_B}{AB}.$$

Дуговую стрелку угловой скорости изображаем в сторону векторов линейных скоростей  $\vec{v}_A, \vec{v}_B$ .

3) Соединяем точку  $C$  с МЦС и определяем скорость этой точки:

$$\vec{v}_C = \omega \cdot CP.$$

Вектор линейной скорости  $\vec{v}_C$  направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

## Теорема о сложении ускорений – Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки вокруг полюса.

Скорости точек  $A$  и  $B$  связаны между собой соотношением:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{v}_{BA}}{dt} = \vec{a}_A + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}).$$

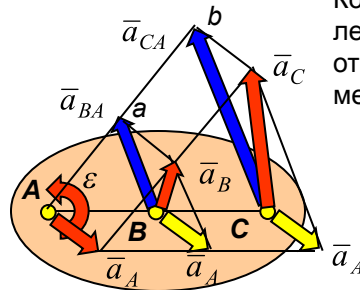
Второе слагаемое дифференцируем как произведение двух функций:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{BA}.$$

Получили сумму вращательного и осеостремительного ускорений рассматриваемой точки относительно полюса. Таким образом, ускорение точки плоской фигуры:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{bp} + \vec{a}_{BA}^{oc} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}.$$

## Следствие – Концы векторов ускорений точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят ее на отрезки, пропорциональные расстояниям между точками.



Концы векторов ускорений точек  $\vec{a}_{BA}$  и  $\vec{a}_{CA}$  лежат на одной прямой  $abc$  и делят ее на отрезки пропорциональные расстояниям между точками:

$$a_{BA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} AB,$$

$$a_{CA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} AC.$$

Концы векторов ускорений полюса  $A$ , изображенных в точках  $B$  и  $C$ , лежат также лежат на одной прямой.

Нетрудно доказать из подобия треугольников, что концы векторов суммарных ускорений точек  $B$  и  $C$  также лежат на одной прямой, и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками.