Поволжский государственный технологический университет
Кафедра сопротивления материалов и прикладной механики

Лоскутов Ю.В.

Курс лекций по теоретической механике

Кинематика

Электронный учебный курс написан на основе лекций, читавшихся автором для студентов, обучавшихся по специальностям СТР, ЭУН, ПЗ, АД, СУЗС и ТМО в ПГТУ (2001-2013 гг.).
Учебный материал соответствует календарным планам в объеме двух семестров.
Для полной реализации анимационных эффектов при презентации необходимо использовать средство просмотра Power Point не ниже, чем встроенный в Microsoft Office операционной системы Windows-XP Professional. Запуск презентации – F5, навигация – Enter, навигационные клавиши, щелчок мыши, кнопки.
Завершение – Esc.
Замечания и предложения можно послать по e-mail: loskutovyv@volgatech.net

Йошкар-Ола - 2014

Содержание

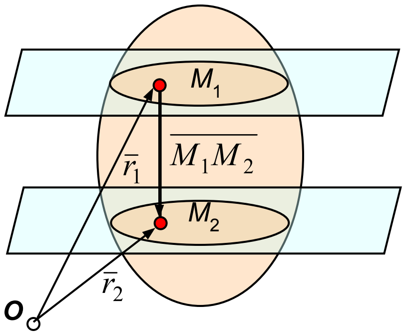
- Лекция 4. Плоскопараллельное движение твердого тела. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное движения. Уравнения движения. Теорема о сложении скоростей. Следствия из теоремы. Мгновенный центр скоростей (МЦС).
- Лекция 5. Примеры использования МЦС для определения скоростей. Теорема о сложении ускорений. Мгновенный центр ускорений (МЦУ). Примеры использования теоремы о сложении ускорений и МЦУ для определения ускорений

Рекомендуемая литература

1. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.1. М.: Высшая школа. 1977 г. 368 с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М.: Наука. 1986 г. 416 с.
3. Сборник заданий для курсовых работ /Под ред. А.А. Яблонского. М.:Высшая школа. 1985 г. 366 с.

Лекция 4

- **Плоскопараллельное движение твердого тела – движение при котором каждая точка тела движется в в плоскости параллельной некоторой неподвижной плоскости**. Сечение тела одной из таких плоскостей есть плоская фигура, остающаяся в этой плоскости при движении тела.



- **Теорема о плоскопараллельном движении твердого тела – плоскопаралллельное движение твердого тела однозначным образом определяется движением плоской фигуры, образованной сечением тела одной из параллельных плоскостей**.

Выберем две точки на произвольных двух сечениях тела, находящиеся на одном перпендикуляре к этим плоскостям:

Проведем к каждой точке радиусы-векторы из неподвижной точки О и свяжем их между собой вектором ***M*₁*M*₂**:

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \overline{M_1M_2}$$

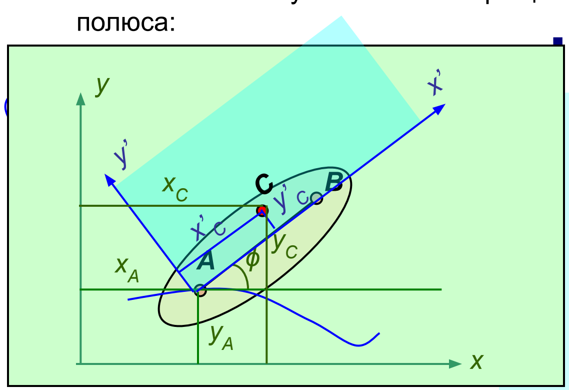
При плоском движении тела вектор $\boldsymbol{M_1M_2}$ не изменяется по величине, остается параллельным самому себе (движется поступательно) и, следовательно, точки этого вектора описывают тождественные траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые скорости и ускорения:

$$\boxed{\frac{d\bar{r}_2}{dt} = \frac{d\bar{r}_1}{dt}; \quad (\overline{M_1M_2} = \overline{const}); \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_1, \ \text{и} \ \frac{d^2\bar{r}_2}{dt^2} = \frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2}; \quad \bar{a}_2 = \bar{a}_1.}$$

Таким образом, при плоском движении тела движение каждой точки одной из плоских фигур определяет движение соответствующих точек, находящихся во всех других смежных параллельных плоскостях.

Следствие: Поскольку положение плоской фигуры однозначно определяется положением ее двух точек или отрезка прямой, проведенной через эти точки, то **плоскопараллельное движение твердого тела определяется движением прямолинейного отрезка, принадлежащего одному из сечений тела параллельными плоскостями**.

- **Разложение плоскопараллельного движения плоской фигуры на поступательное и вращательное движения** – Плоскую фигуру или отрезок прямой можно перевести из одного положения в другое бесчисленным множеством способов, меняя последовательность выполнения поступательного и вращательного движения между собой, а также выбирая различные траектории и точки в качестве полюса:



- Таким образом, **плоскопараллельное движение состоит из двух движений: поступательное и вращательное, и его всегда можно разложить на эти два движения**.

Уравнение движения плоской фигуры: Выбирая в качестве полюса любую точку, например, *A*, поступательная часть движения будет описываться уравнениями движения этой точки. Вращательная часть движения описывается уравнением изменения угла поворота вокруг полюса:

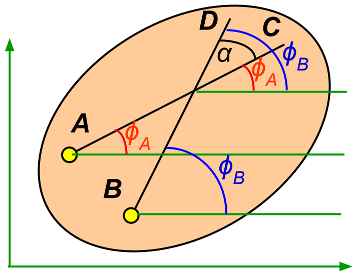
$$\boxed{\begin{aligned} x_A &= x_A(t); \\ y_A &= y_A(t); \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned}}$$

Уравнения движения любой точки плоской фигуры, положение которой задается координатами локальной системы отсчета, связанной с фигурой:

$$\boxed{\begin{aligned} x_C &= x_A(t) + x'_C\cos\varphi(t) - y'_C\sin\varphi(t); \\ y_C &= y_A(t) + x'_C\sin\varphi(t) + y'_C\cos\varphi(t). \end{aligned}}$$

Лекция 4 (продолжение 4.2)

- **Независимость угловой скорости и углового ускорения плоской фигуры от выбора полюса –** Выберем два произвольных прямолинейных отрезка, изображающих положение плоской фигуры и два полюса на этих отрезках:



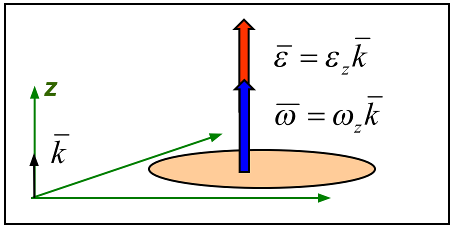
Углы наклона отрезков к горизонтальной оси различны и связаны между собой соотношением: $\varphi_B(t) = \varphi_A(t) + \alpha.$

Продифференцируем это соотношение: $\dfrac{d\varphi_B(t)}{dt} = \dfrac{d\varphi_A(t)}{dt}, \quad (\alpha = const).$

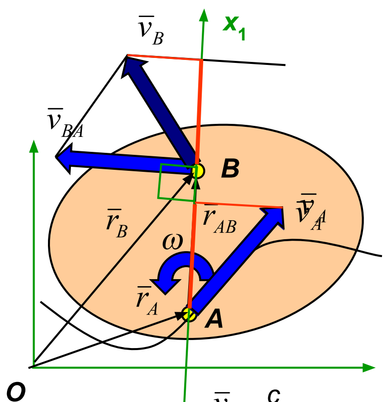
Отсюда следует, что **угловые скорости** двух отрезков **равны**: $\boxed{\omega_{CA} = \omega_{DB}.}$

После повторного дифференцирования следует, что **угловые ускорения** двух отрезков также **равны**: $\dfrac{d\omega_{CA}}{dt} = \dfrac{d\omega_{DB}}{dt}.$ $\boxed{\varepsilon_{CA} = \varepsilon_{DB}.}$

Таким образом, угловая скорость и угловое ускорение плоской фигуры не зависят от выбора полюса и их можно представить в виде векторов, перпендикулярных плоскости фигуры:



- **Теорема о сложении скоростей – Скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скоростей полюса и вращательной скорости этой точки вокруг полюса.**



Радиусы-векторы точек *A* и *B* связаны между собой соотношением:

$$\bar{r}_B(t) = \bar{r}_A(t) + \bar{r}_{AB}(t).$$

Продифференцируем это соотношение: $\dfrac{d\bar{r}_B(t)}{dt} = \dfrac{d\bar{r}_A(t)}{dt} + \dfrac{d\bar{r}_{AB}(t)}{dt}.$

$\boxed{\bar{v}_B(t)}$ $\boxed{\bar{v}_A(t)}$ $\boxed{\bar{v}_{BA}(t)}$

Второе слагаемое есть вращательная скорость точки *B* вокруг полюса *A*:

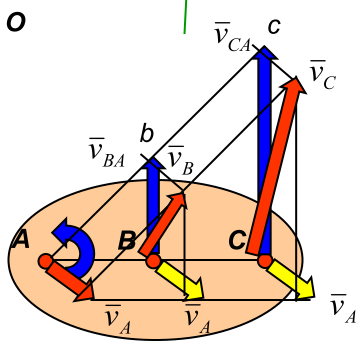
$$\boxed{\bar{v}_{BA}(t) = \bar{\omega}(t) \times \bar{r}_{AB}(t); \qquad |\bar{r}_{AB}| = const.}$$

Таким образом, скорость точки *B* равна геометрической сумме скорости полюса *A* и вращательной скорости точки *B* вокруг полюса :

$$\boxed{\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB} = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}.}$$

- **Следствие 1 – Проекции скоростей точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки равны .**

Спроецируем векторное соотношение на ось x_1: $\boxed{(x_1): \quad v_{Bx1} = v_{Ax1}, \quad (\bar{v}_{BA} \perp x_1).}$



- **Следствие 2 – Концы векторов скоростей точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят эту прямую на отрезки пропорциональные расстояниям между точками.**

Концы векторов вращательных скоростей точек *B* и *A* лежат на одной прямой и делят ее на отрезки пропорциональные расстояниям между точками:

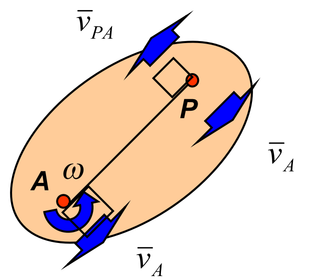
$$\boxed{v_{BA} = \omega AB, \quad v_{CA} = \omega AC, \quad \frac{v_{CA}}{v_{BA}} = \frac{AC}{AB} = \frac{Ac}{Ab}.}$$

Концы векторов скоростей полюса *A* лежат, изображенных в точках *B* и *C* также лежат на одной прямой.

Нетрудно доказать из подобия треугольников, что концы векторов скоростей точек *B* и *C* также лежат на одной прямой, и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками:

Лекция 4 (продолжение 4.3)

- **Мгновенный центр скоростей (МЦС) – При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка, жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю**.



Пусть известна скорость одной из точек фигуры и угловая скорость вокруг этой точки:

Запишем векторное соотношение для скорости некоторой точки *P* согласно теоремы о сложении скоростей:

$\boxed{\overline{v}_P = \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{r}_{AP} = \overline{v}_A + \overline{v}_{PA}.}$ Зададим значение скорости этой точки *P* равной нулю: $\boxed{\overline{v}_P = 0.}$

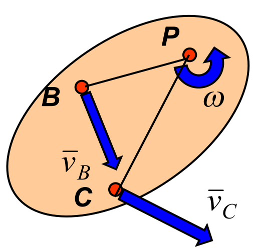
Тогда получаем: $\overline{v}_{PA} = \overline{\omega} \times \overline{r}_{AP} = -\overline{v}_A.$ Т.е. вращательная скорость искомой точки должна быть равна по модулю скорости точки А, параллельна этой скорости и направлена в противоположную сторону.

Это позволяет найти положение МЦС (точки *P)*, а именно: МЦС должен находиться на перпендикуляре к скорости точки *А,* отложенном в сторону угловой скорости, на расстоянии: $\boxed{AP = \frac{v_A}{\omega}.}$

Если положение МЦС найдено, скорость любой точки плоской фигуры может быть легко определена посредством выбора полюса в МЦС . В этом случае векторное выражение теоремы о сложении скоростей вырождается в известную зависимость скорости от расстояния до центра вращения:

$$\boxed{\begin{aligned} &\overline{v}_B = \overline{v}_P + \overline{\omega} \times \overline{r}_{PB} = \overline{v}_{BP}; \quad (\overline{v}_P = 0); \quad v_B = \omega \cdot BP; \\ &\overline{v}_C = \overline{v}_P + \overline{\omega} \times \overline{r}_{PC} = \overline{v}_{CP}; \quad (\overline{v}_P = 0); \quad v_C = \omega \cdot CP; \end{aligned}}$$

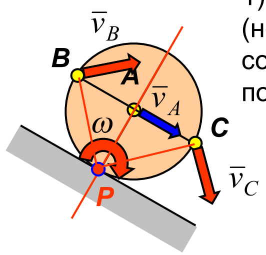
Другими словами, можно утверждать, что **в любой момент времени тело не совершает никакого другого движения, кроме как вращательного движения вокруг МЦС**.



- **Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры –** Поскольку при движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка (МЦС), жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю, то при определении скоростей эту точку и следует выбирать в качестве полюса, играющего роль центра вращения в данный момент времени.
- Ниже рассмотрим процедуру определения скоростей на примерах:

1

Дано: $\boldsymbol{v}_A$, положения точек *A*, *B*, *C*, проскальзывание отсутствует.
Найти: $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на перпендикуляре к вектору $\boldsymbol{v}_A$ (нет проскальзывания и точка с нулевой скоростью совпадает с точкой контакта колеса и неподвижной поверхностью качения).

2) Определяем угловую скорость: $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP}.}$

Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону вектора линейной скорости $\boldsymbol{v}_A$.

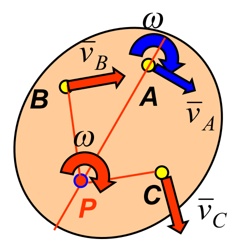
3) Соединяем точки *B* и *C* с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$\boxed{\begin{aligned} v_B &= \omega \cdot BP; \\ v_C &= \omega \cdot CP. \end{aligned}}$$

Векторы линейных скоростей $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_C$ направлены в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

2

Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{\omega}$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на перпендикуляре к вектору $\boldsymbol{v}_A$

2) Определяем расстояние до МЦС: $\boxed{AP = \dfrac{v_A}{\omega}.}$

Расстояние *AP* откладываем в сторону дуговой стрелки угловой скорости. Дуговую стрелку угловой скорости изображаем вокруг МЦС.

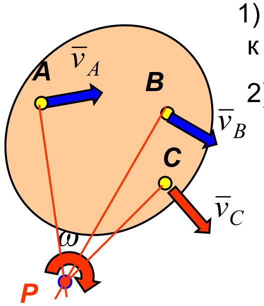
3) Соединяем точки *B* и *C* с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$\boxed{\begin{aligned} v_B &= \omega \cdot BP; \\ v_C &= \omega \cdot CP. \end{aligned}}$$

Векторы линейных скоростей $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_C$ направлены в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

3

Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$,

2) Определяем угловую скорость: $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP} = \dfrac{v_B}{BP}.}$

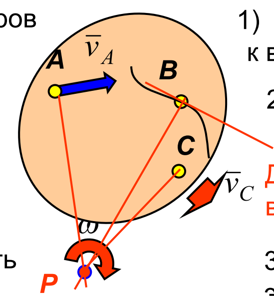
Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону векторов линейных скоростей $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$.

3) Соединяем точку *C* с МЦС и определяем скорость этой точки: $\boxed{v_C = \omega \cdot CP.}$

Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}_C$ направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

4

Дано: $\boldsymbol{v}_A$, траектория точки *B*, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$,



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к вектору $\boldsymbol{v}_A$ и касательной к траектории точки *B*.

2) Определяем угловую скорость: $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP}.}$

Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону векторов линейной скорости $\boldsymbol{v}_A$.

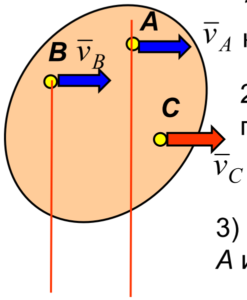
3) Соединяем точку *C* с МЦС и определяем скорость этой точки: $\boxed{v_C = \omega \cdot CP.}$

Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}_C$ направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

Лекция 5 (продолжение 5.2)

- **Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры**

5 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_A \parallel \boldsymbol{v}_B$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$. Эта точка находится в бесконечности.

2) Угловая скорость обращается в нуль (мгновенно поступательное движение):

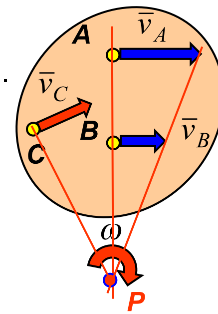
$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0.$$

3) Скорость точки *C* равна геометрически скоростям точек *A* и *B*:

$$\bar v_C = \bar v_A = \bar v_B.$$

Вектор скорости точки *C* направлен параллельно векторам скоростей точек *A* и *B* (в ту же сторону).

6 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_A \parallel \boldsymbol{v}_B$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$. Эти перпендикуляры сливаются в одну линию.

2) Определяем положение МЦС (проводим линию через концы векторов $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$) и угловую скорость:

$$\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A - v_B}{AB}.$$

Дуговую стрелку угловой скорости изображаем в сторону векторов линейных скоростей $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B$.

3) Соединяем точку *C* с МЦС и определяем скорость этой точки:

$$v_C = \omega \cdot CP.$$

Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}_C$ направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

- **Теорема о сложении ускорений – Ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки вокруг полюса.**

Скорости точек *A* и *B* связаны между собой соотношением:

$$\bar v_B = \bar v_A + \bar v_{BA} = \bar v_A + \bar\omega \times \bar r_{AB}.$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$\frac{d\bar v_B}{dt} = \frac{d\bar v_A}{dt} + \frac{d\bar v_{BA}}{dt} = \bar a_A + \frac{d}{dt}(\bar\omega \times \bar r_{AB}).$$

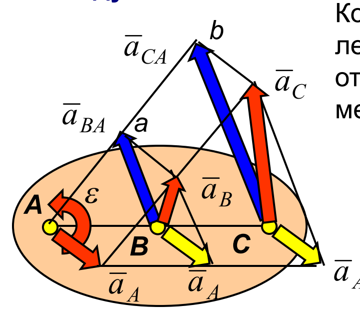
Второе слагаемое дифференцируем как произведение двух функций:

$$\frac{d}{dt}(\bar\omega \times \bar r_{AB}) = \frac{d\bar\omega}{dt} \times \bar r_{AB} + \bar\omega \times \frac{d\bar r_{AB}}{dt} = \bar\varepsilon \times \bar r_{AB} + \bar\omega \times \bar v_{BA}.$$

Получили сумму вращательного и осестремительного ускорений рассматриваемой точки относительно полюса. Таким образом, ускорение точки плоской фигуры:

$$\bar a_B = \bar a_A + \bar a_{BA}^{\text{вр}} + \bar a_{BA}^{\text{ос}} = \bar a_A + \bar a_{BA}.$$

- **Следствие – Концы векторов ускорений точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят ее на отрезки, пропорциональные расстояниям между точками.**



Концы векторов ускорений точек $\boldsymbol{a}_{BA}$ и $\boldsymbol{a}_{CA}$ лежат на одной прямой *Abc* и делят ее на отрезки пропорциональные расстояниям между точками:

$$a_{BA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\, AB,$$

$$a_{CA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\, AC.$$

Концы векторов ускорений полюса *A*, изображенных в точках *B* и *C*, лежат также лежат на одной прямой.

Нетрудно доказать из подобия треугольников, что концы векторов суммарных ускорений точек *B* и *C* также лежат на одной прямой, и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками.