



Ряды

Лекция 1: Числовые ряды, основные определения и свойства.

-
- Определение числового ряда.
Необходимое условие сходимости
 - Признаки сходимости положительных рядов

Числовой ряд — это выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

где члены ряда $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — действительные или комплексные числа, u_n общий член ряда.

Ряд задан, если известен общий член ряда u_n , выраженный как функция его номера n : $u_n = f(n)$.

n -я частичная сумма ряда — это сумма первых n членов ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Рассмотрим следующие суммы:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \dots$$

Ряд сходится, если существует конечный предел

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \tag{1.1}$$

последовательности частичных сумм ряда.

Предел (1.1) называется *суммой ряда* $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ряд расходится, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует или равен бесконечности.

Примеры

1. Ряд $0 + 0 + 0 + \dots$ сходится, его сумма равна нулю ($S = 0$).
2. Ряд $1 + 1 + 1 + \dots$ расходится, его сумма равна бесконечности ($S = \infty$).
3. Ряд $1 - 1 + 1 - \dots$ расходится, так как предела частичных сумм не существует.
4. Ряд $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$ сходится, его сумма равна единице.

Покажем, что сумма данного ряда равна единице.

Разложим общий член ряда на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}.$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Составим n -ю частичную сумму ряда:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Вычислим предел последовательности частичных сумм:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Свойства рядов

Свойство 1. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1.2)$$

сходится и его сумма равна S , то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots, \quad (1.3)$$

где c — произвольное число, также сходится и его сумма равна cS . Если же ряд (1.2) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (1.3) расходится.

Доказательство

1. Пусть $S_n^{(u)}$ — n -я частичная сумма ряда (1.3).

Тогда

$$S_n^{(u)} = cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = c \cdot S_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(u)} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot S_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = c \cdot S.$$

Так как существует конечный предел частичных сумм, то ряд (1.3) сходится и имеет сумму cS .

2. Покажем, что если ряд (1.2) расходится, $c \neq 0$, то и ряд (1.3) расходится.

Допустим противное: ряд (1.3) сходится и имеет сумму S_1 .

Тогда

$$S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(u)} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot S_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{S_1}{c},$$

т.е. ряд (1.2) сходится, что противоречит условию о расхождении данного ряда.

Свойство 2. Если сходится ряд (1.2) и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots, \quad (1.4)$$

а их суммы соответственно равны S_1 и S_2 , то сходится и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n), \quad (1.5)$$

причем сумма каждого равна $S_1 \pm S_2$.

Доказательство

Пусть $S_n^{(u)}$, $S_n^{(v)}$, S_n — n -е частичные суммы рядов (1.2), (1.4), (1.5) соответственно. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^{(u)} \pm S_n^{(v)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(u)} \pm \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(v)} = S_1 \pm S_2,$$

т. е. каждый из рядов (1.5) сходится и сумма его равна $S_1 \pm S_2$.

Следствие

Сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

Замечание

Сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

Свойство 3. Если к ряду (1.2) прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (1.2) сходятся или расходятся одновременно.

Ряд вида

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

называется ***n -м остатком ряда*** (1.2), который получается из ряда (1.2) отбрасыванием его n первых членов.

Согласно свойству 3:

- 1) ряд (1.2) и его остаток одновременно либо сходятся, либо расходятся;
- 2) если ряд (1.2) сходится, то его остаток r_n при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Ряд геометрической прогрессии

Ряд вида

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0) \quad (1.6)$$

называется *рядом геометрической прогрессии*.

Иследуем данный ряд на сходимость.

Сумма первых n первых членов прогрессии находится по формуле

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1 - q}.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-q}$, т. е. ряд (1.6)

сходится и его сумма равна $\frac{a}{1-q}$.

2. Если $|q| > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (1.6)

расходится.

3. Если $q = 1$, получаем ряд $a + a + a + \dots$, который расходится, так как $S_n = n \cdot a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.

Если $q = -1$, получаем ряд $a - a + a - a + \dots$, который расходится, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует.

Ряд (1.6) при $|q| = 1$ расходится.

Таким образом, ряд (1.6) сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$$

Решение

Данный ряд представляет собой ряд геометрической прогрессии с $q = \frac{1}{2} < 1$ и $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, то есть ряд сходится.

Необходимый признак сходимости

Теорема. Если ряд сходится, то его общий член u_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Доказательство

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ сходится и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$. Тогда

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ при $n \rightarrow \infty$ и $(n-1) \rightarrow \infty$. Учитывая, что $u_n = S_n - S_{n-1}$ при

$n > 1$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Следствие (достаточное условие расходимости ряда)

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ или не существует, то ряд расходится.

Доказательство

Если бы ряд сходиллся, то по теореме $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, но это противоречит условию, поэтому ряд расходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{5n+1}.$$

Решение

Данный ряд расходится, так как выполняется достаточное условие расходимости ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{5n+1} = \frac{2}{5} \neq 0.$$

Гармонический ряд

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

называется *гармоническим рядом*. У данного ряда каждый член является средним гармоническим для двух соседних членов.

Гармоническое среднее чисел x_1, x_2, \dots, x_n — число h , обратное которому есть среднее арифметическое чисел, обратных данным числам:

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

1.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Признаки сравнения

Теорема 1

Пусть даны два знакоположительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad (1.8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (1.9)$$

Если для всех n выполняется неравенство

$$u_n \leq v_n, \quad (1.10)$$

тогда

- 1) если сходится ряд (1.9), то сходится и ряд (1.8);
- 2) если расходится ряд (1.8), то расходится и ряд (1.9).

Доказательство

Пусть $S_n^{(u)}$ и $S_n^{(v)}$ — n -е частичные суммы рядов (1.8) и (1.9) соответственно. Из (1.10) следует, что

$$S_n^{(u)} \leq S_n^{(v)}. \quad (1.11)$$

1. Докажем, что если сходится ряд (1.9), то сходится и ряд (1.8). Пусть ряд (1.9) сходится и его сумма равна S_2 . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(v)} = S_2.$$

Члены ряда (1.9) положительны, поэтому

$$S_n^{(v)} < S_2,$$

а с учетом неравенства (1.11):

$$S_n^{(u)} < S_2.$$

Таким образом, последовательность $S_1^{(u)}, S_2^{(u)}, \dots, S_n^{(u)}$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом S_2 .

По признаку существования предела последовательности, последовательность $\{S_n^{(u)}\}$ имеет предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(u)} = S_1$, т. е. ряд (1.8) сходится.

Пусть теперь ряд (1.8) расходится. Так как члены ряда неотрицательны, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(u)} = \infty.$$

Тогда с учетом неравенства (1.11):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^{(v)} = \infty,$$

то есть ряд (1.9) расходится.

Замечание

Теорема 1 справедлива и в том случае, когда неравенство (1.10) выполняется не для всех членов ряда (1.8) и (1.9), а начиная с некоторого номера.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4}.$$

Решение

Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n},$$

который сходится (ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Так как

$$\frac{1}{3^n + 4} < \frac{1}{3^n},$$

то по *Теореме 1* данный по условию ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Решение

Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится (гармонический ряд).

Так как, начиная со второго элемента, выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n},$$

то по *Теореме 1* данный по условию ряд расходится.

Теорема 2 (предельный признак сравнения)

Пусть даны два знакоположительных ряда (1.8) и (1.9). Если существует конечный, отличный от нуля предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A \quad (0 < A < \infty),$$

то ряды (1.8) и (1.9) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство

По определению предела последовательности для всех n , кроме, возможно, их конечного числа, для любого $\varepsilon > 0$:

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - A \right| < \varepsilon,$$

$$(A - \varepsilon)v_n < u_n < (A + \varepsilon)v_n. \quad (1.12)$$

Если ряд (1.8) сходится, то из левого неравенства (1.12) и *Теоремы 1* вытекает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (A - \varepsilon)v_n$ также сходится.

Тогда, согласно свойству числовых рядов, ряд (1.9) также сходится.

Если ряд (1.8) расходится, то из правого неравенства (1.12), *Теоремы 1* и свойства числовых рядов ряд (1.9) также расходится.

Аналогично, если ряд (1.9) сходится (расходится), то будет сходиться (расходиться) и ряд (1.8).

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+n-5}.$$

Решение

Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится (гармонический ряд). Вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n^2+n-5} : \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{3}.$$

Так как $\frac{2}{3} > 0$, то по *Теореме 2* оба ряда одновременно расходятся.

Таким образом, данный по условию ряд расходится.

Признак Даламбера

Теорема. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Доказательство

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, то по определению предела для любого

$\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon$$

ИЛИ

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon. \quad (1.13)$$

Пусть $l < 1$. Можно подобрать ε так, что

$$l + \varepsilon < 1.$$

Обозначим $l + \varepsilon = q$, $q < 1$. Тогда из правой части неравенства (1.13):

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q$$

или

$$u_{n+1} < qu_n, n > N.$$

В силу свойства числовых рядов (если к ряду прибавить или отбросить конечное число членов, то полученный ряд и исходный сходятся или расходятся одновременно):

$$u_{n+1} < qu_n \text{ для всех } n = 1, 2, 3, \dots$$

Построим серию неравенств:

$$u_2 < qu_1,$$

$$u_3 < qu_2 < q^2 u_1,$$

$$u_4 < qu_3 < q^3 u_1,$$

.....

$$u_n < qu_{n-1} < q^{n-1} u_1,$$

.....
То есть члены ряда

$$u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots$$

меньше соответствующих членов ряда

$$qu_1 + q^2u_1 + q^3u_1 + \dots + q^{n-1}u_1 + \dots,$$

который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. На основании признака сравнения сходится ряд $u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n + \dots$, следовательно, сходится и исходный ряд.

Пусть $l > 1$. В этом случае $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l > 1$. Тогда с некоторого номера N будет выполняться неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$$

ИЛИ

$$u_{n+1} > u_n,$$

то есть члены ряда возрастают с увеличением номера n . Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0,$$

значит ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

Замечание

Если $l = 1$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}.$$

Решение

Вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}} \cdot \frac{n^5}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^5 \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{1}{2} < 1$, то по признаку Даламбера данный по условию ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}.$$

Решение

Вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)!}{5^{n+1}} : \frac{n!}{5^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1) \cdot n! \cdot 5^n}{5^{n+1} \cdot n!} \right) = \infty.$$

Так как предел равен бесконечности, то по признаку Даламбера данный по условию ряд расходится.

Радикальный признак Коши

Теорема. Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Доказательство

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то по определению предела — для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left| \sqrt[n]{u_n} - l \right| < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon. \tag{1.14}$$

Пусть $l < 1$. Можно подобрать ε так, что $l + \varepsilon < 1$. Обозначим $l + \varepsilon = q, q < 1$. Тогда из правой части неравенства (1.14) имеем

$$\sqrt[n]{u_n} < q,$$

$$u_n < q^n, \quad n \geq N.$$

Рассмотрим два ряда:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \dots, \quad (1.15)$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \dots \quad (1.16)$$

Ряд (1.16) сходится, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

Члены ряда (1.15), начиная с u_N , меньше членов ряда (1.16).

В силу свойства числовых рядов и признака сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Пусть $l > 1$. Начиная с некоторого номера $n = N$, будем иметь

$$\sqrt[l]{u_n} > 1$$

ИЛИ

$$u_n > 1,$$

то есть все члены рассматриваемого ряда, начиная с u_N , больше 1. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2} \right)^n.$$

Решение

Вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n+2} = \frac{1}{3}.$$

Так как $\frac{1}{3} < 1$, то по радикальному признаку Коши данный ряд по условию сходится.

Интегральный признак сходимости Коши

Теорема. Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и не возрастают, то есть $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$, и пусть $f(x)$ — такая непрерывная невозрастающая функция, что $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$, $f(n) = u_n$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд;
- 2) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд.

Доказательство

Изобразим члены ряда геометрически (рис. 1.1).

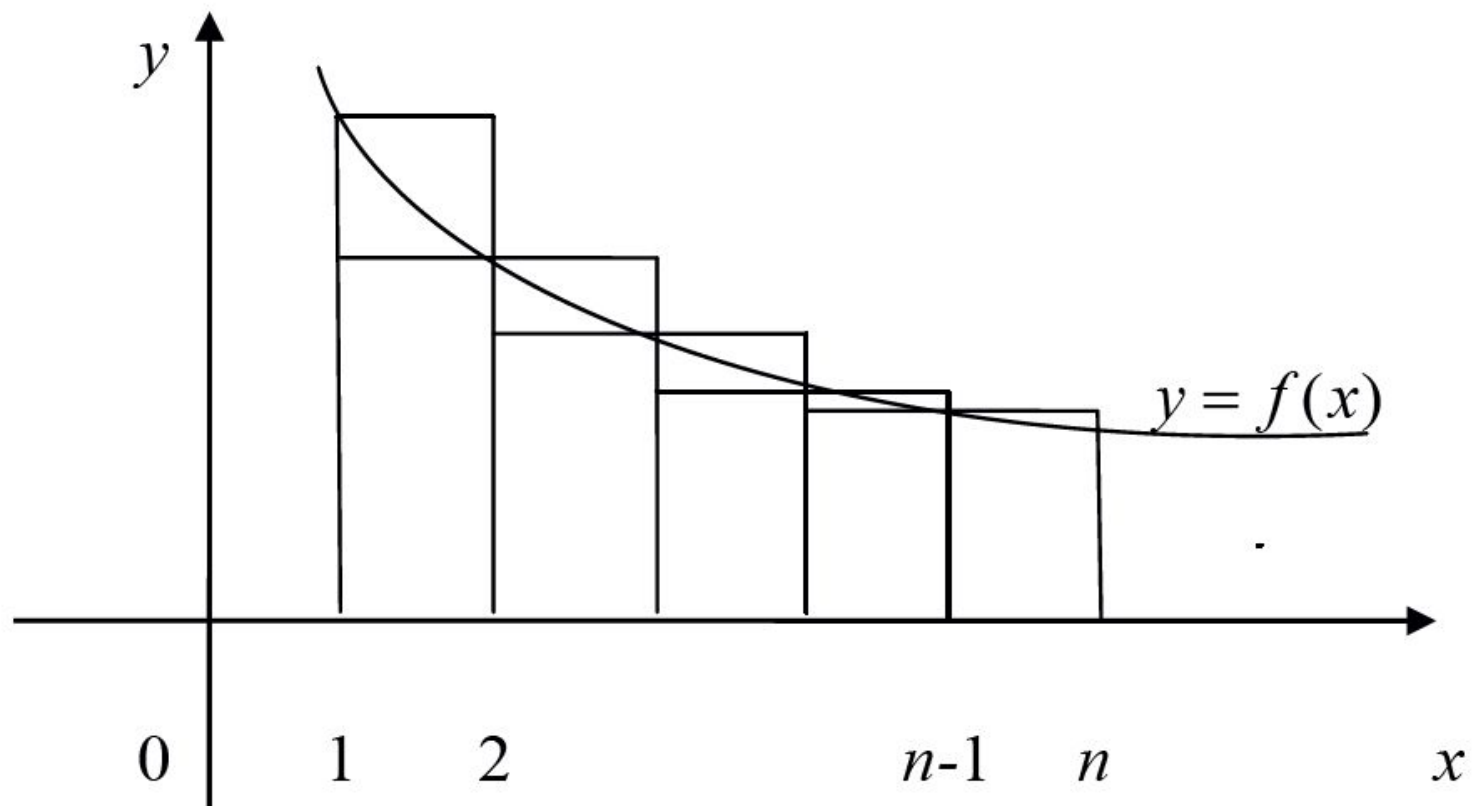


Рис. 1.1

Площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 1.1:

$$Q = \int_1^n f(x) dx.$$

Возьмем n -ю частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$:

$$S_n = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n).$$

Тогда площадь Q_+ выступающей фигуры будет

$$Q_+ = f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n-1) = S_{n-1},$$

а площадь Q_- входящей фигуры

$$Q_- = f(2) + f(3) + \dots + f(n) = S_n - f(1).$$

Из построения и свойств функции $f(x)$ следует, что

$$Q_- < Q < Q_+,$$

$$S_n - f(1) < \int_1^n f(x) dx < S_{n-1}.$$

Так как $S_{n-1} < S_n$, то

$$S_n - f(1) < \int_1^n f(x) dx < S_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

1. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится.

Тогда существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx = A.$$

Так как $\int_1^n f(x)dx \leq A = \int_1^{+\infty} f(x)dx$

(в силу условия $f(x) > 0$ для $x \in [1, +\infty)$), то из неравенства (1.17) следует, что

$$S_n < f(1) + \int_1^n f(x)dx < f(1) + A = M = \text{const},$$

$$0 < S_n < M, n = 1, 2, \dots$$

Последовательность $\{S_n\}$ ограничена и при возрастании n сумма S_n возрастает. Поэтому последовательность имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится.

2. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится.

Так как по условию $f(x) > 0$ для $x \geq 1$, то

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx = +\infty.$$

Из неравенства

$$S_n \geq \int_1^n f(x)dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty,$$

то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится.

Замечание

Вместо интеграла $\int_1^{\infty} f(x)dx$ можно брать интеграл

$$\int_k^{+\infty} f(x)dx, \quad k > 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

Решение

Вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{\ln(x+1)} \Big|_1^a \right) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(a+1)} \right) = \frac{1}{\ln 2},$$

следовательно, интеграл сходится, значит и ряд сходится.

Обобщенный гармонический ряд

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

называется *обобщенным гармоническим рядом*.

Исследуем его на сходимость, используя интегральный признак Коши.

1. Если $p > 1$, то ряд сходится, так как $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

2. Если $p < 1$, то ряд расходится, так как $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty$.

3. Если $p = 1$, то ряд расходится, так как $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty$.

