# Ряды

## Лекция 1: Числовые ряды, основные определения и свойства.

- Определение числового ряда. Необходимое условие сходимости
- Признаки сходимости положительных рядов

***Числовой ряд*** — это выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

где члены ряда $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — действительные или комплексные числа, $u_n$ общий член ряда.

Ряд задан, если известен общий член ряда $u_n$, выраженный как функция его номера $n$: $u_n = f(n)$.

***n-я частичная сумма ряда*** — это сумма первых $n$ членов ряда

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Рассмотрим следующие суммы:

$$S_1 = u_1,\ S_2 = u_1 + u_2,\ S_3 = u_1 + u_2 + u_3,\ \ldots$$

***Ряд сходится***, если существует конечный предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \qquad (1.1)$$

последовательности частичных сумм ряда.

Предел (1.1) называется ***суммой ряда*** $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

***Ряд расходится***, если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен бесконечности.

**Примеры**

1. Ряд 0 + 0 + 0 +... сходится, его сумма равна нулю ($S = 0$).
2. Ряд 1 + 1 + 1 +... расходится, его сумма равна бесконечности ($S = \infty$).
3. Ряд $1-1+1-...$ расходится, так как предела частичных сумм не существует.
4. Ряд $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$ сходится, его сумма равна единице.

Покажем, что сумма данного ряда равна единице.

Разложим общий член ряда на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}.$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Составим $n$-ю частичную сумму ряда:

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Вычислим предел последовательности частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

## Свойства рядов

**Свойство 1.** Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1.2}$$

сходится и его сумма равна $S$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n + \ldots, \tag{1.3}$$

где $c$ — произвольное число, также сходится и его сумма равна $cS$. Если же ряд (1.2) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (1.3) расходится.

*Доказательство*

1. Пусть $S_n^{(u)}$ — $n$-я частичная сумма ряда (1.3).

Тогда

$$S_n^{(u)} = cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = c \cdot S_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim_{n\to\infty} c \cdot S_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S.$$

Так как существует конечный предел частичных сумм, то ряд (1.3) сходится и имеет сумму $cS$.

2. Покажем, что если ряд (1.2) расходится, $c \neq 0$, то и ряд (1.3) расходится.

Допустим противное: ряд (1.3) сходится и имеет сумму $S_1$. Тогда

$$S_1 = \lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \lim_{n\to\infty} c \cdot S_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{c},$$

т. е. ряд (1.2) сходится, что противоречит условию о расходимости данного ряда.

**Свойство 2.** Если сходится ряд (1.2) и сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots, \qquad (1.4)$$

а их суммы соответственно равны $S_1$ и $S_2$, то сходятся и ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n), \qquad (1.5)$$

причем сумма каждого равна $S_1 \pm S_2$.

*Доказательство*

Пусть $S_n^{(u)}, S_n^{(v)}, S_n$ — $n$-е частичные суммы рядов (1.2), (1.4), (1.5) соответственно. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n^{(u)} \pm S_n^{(v)}) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} \pm \lim_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_1 \pm S_2,$$

т. е. каждый из рядов (1.5) сходится и сумма его равна $S_1 \pm S_2$.

*Следствие*

Сумма (разность) сходящегося и расходящегося рядов есть расходящийся ряд.

***Замечание***

Сумма (разность) двух расходящихся рядов может быть как сходящимся, так и расходящимся рядом.

**Свойство 3.** Если к ряду (1.2) прибавить (или отбросить) конечное число членов, то полученный ряд и ряд (1.2) сходятся или расходятся одновременно.

Ряд вида

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$$

называется ***n-м остатком ряда*** (1.2), который получается из ряда (1.2) отбрасыванием его $n$ первых членов.

Согласно свойству 3:

1) ряд (1.2) и его остаток одновременно либо сходятся, либо расходятся;
2) если ряд (1.2) сходится, то его остаток $r_n$ при $n \to \infty$ стремится к нулю, то есть

$$\lim_{n \to \infty} r_n = 0.$$

## Ряд геометрической прогрессии

Ряд вида

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (a \neq 0) \tag{1.6}$$

называется ***рядом геометрической прогрессии***.

Исследуем данный ряд на сходимость.

Сумма первых $n$ первых членов прогрессии находится по формуле

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1.$$

Найдем предел этой суммы:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a \lim \frac{q^n}{1-q}.$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. Если $|q|<1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$, т. е. ряд (1.6) сходится и его сумма равна $\dfrac{a}{1-q}$.
2. Если $|q|>1$, то $q^n \to \infty$ при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т. е. ряд (1.6) расходится.
3. Если $q=1$, получаем ряд $a+a+a+\ldots$, который расходится, так как $S_n = n\cdot a$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Если $q=-1$, получаем ряд $a-a+a-a+\ldots$, который расходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует.

Ряд (1.6) при $|q|=1$ расходится.

Таким образом, ряд (1.6) сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$.

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots$$

*Решение*

Данный ряд представляет собой ряд геометрической прогрессии с $q = \frac{1}{2} < 1$ и $S = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, то есть ряд сходится.

## Необходимый признак сходимости

**Теорема.** Если ряд сходится, то его общий член $u_n$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

*Доказательство*

Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится и $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ при $n \to \infty$ и $(n-1) \to \infty$. Учитывая, что $u_n = S_n - S_{n-1}$ при $n > 1$, получим

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_{n-1} = S - S = 0.$$

***Следствие (достаточное условие расходимости ряда)***

Если $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или не существует, то ряд расходится.

*Доказательство*

Если бы ряд сходился, то по теореме $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, но это противоречит условию, поэтому ряд расходится.

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{5n+1}.$$

*Решение*

Данный ряд расходится, так как выполняется достаточное условие расходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{5n+1} = \frac{2}{5} \neq 0.$$

## Гармонический ряд

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

называется ***гармоническим рядом***. У данного ряда каждый член является средним гармоническим для двух соседних членов.

**Гармоническое среднее чисел** $x_1, x_2, .. x_n$ — число $h$, обратное которому есть среднее арифметическое чисел, обратных данным числам:

$$h=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}.$$

# 1.2. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

## Признаки сравнения

**Теорема 1**

Пусть даны два знакоположительных ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n , \tag{1.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n . \tag{1.9}$$

Если для всех $n$ выполняется неравенство

$$u_n \le v_n, \tag{1.10}$$

тогда

1) если сходится ряд (1.9), то сходится и ряд (1.8);

2)если расходится ряд (1.8), то расходится и ряд (1.9).

*Доказательство*

Пусть $S_n^{(u)}$ и $S_n^{(v)}$ — $n$-е частичные суммы рядов (1.8) и (1.9) соответственно. Из (1.10) следует, что

$$S_n^{(u)} \le S_n^{(v)}. \tag{1.11}$$

1. Докажем, что если сходится ряд (1.9), то сходится и ряд (1.8).

Пусть ряд (1.9) сходится и его сумма равна $S_2$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(v)} = S_2.$$

Члены ряда (1.9) положительны, поэтому

$$S_n^{(\nu)} < S_2,$$

а с учетом неравенства (1.11):

$$S_n^{(u)} < S_2.$$

Таким образом, последовательность $S_1^{(u)}, S_2^{(u)}, \ldots, S_n^{(u)}$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом $S_2$.

По признаку существования предела последовательности, последовательность $\left\{S_n^{(u)}\right\}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(u)} = S_1$, т. е. ряд (1.8) сходится.

Пусть теперь ряд (1.8) расходится. Так как члены ряда неотрицательны, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(u)} = \infty.$$

Тогда с учетом неравенства (1.11):

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(\nu)} = \infty,$$

то есть ряд (1.9) расходится.

***Замечание***

*Теорема 1* справедлива и в том случае, когда неравенство (1.10) выполняется не для всех членов ряда (1.8) и (1.9), а начиная с некоторого номера.

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4}.$$

*Решение*

Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n},$$

который сходится (ряд составлен из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

Так как

$$\frac{1}{3^n + 4} < \frac{1}{3^n},$$

то по *Теореме 1* данный по условию ряд сходится.

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

*Решение*

Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится (гармонический ряд).

Так как, начиная со второго элемента, выполняется неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n},$$

то по *Теореме 1* данный по условию ряд расходится.

**Теорема 2 (предельный признак сравнения)**

Пусть даны два знакоположительных ряда (1.8) и (1.9). Если существует конечный, отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A \quad (0<A<\infty),$$

то ряды (1.8) и (1.9) сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство*

По определению предела последовательности для всех $n$, кроме, возможно, их конечного числа, для любого $\varepsilon>0$:

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-A\right|<\varepsilon,$$

$$(A-\varepsilon)v_n<u_n<(A+\varepsilon)v_n. \tag{1.12}$$

Если ряд (1.8) сходится, то из левого неравенства (1.12) и *Теоремы 1* вытекает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(A-\varepsilon)v_n$ также сходится.

Тогда, согласно свойству числовых рядов, ряд (1.9) также сходится.

Если ряд (1.8) расходится, то из правого неравенства (1.12), *Теоремы 1* и свойства числовых рядов ряд (1.9) также расходится.

Аналогично, если ряд (1.9) сходится (расходится), то будет сходиться (расходиться) и ряд (1.8).

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2+n-5}.$$

*Решение*

Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится (гармонический ряд). Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n^2+n-5} : \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{3}.$$

Так как $\frac{2}{3} > 0$, то по *Теореме 2* оба ряда одновременно расходятся.

Таким образом, данный по условию ряд расходится.

## Признак Даламбера

**Теорема**. Пусть дан ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

Тогда ряд сходится при $l<1$ и расходится при $l>1$.

*Доказательство*

Так как $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то по определению предела для любого $\varepsilon>0$ существует номер $N$ такой, что для всех $n>N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-l\right|<\varepsilon$$

или

$$l-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<l+\varepsilon. \qquad (1.13)$$

Пусть $l<1$. Можно подобрать $\varepsilon$ так, что

$$l+\varepsilon<1.$$

Обозначим $l+\varepsilon=q,\ \ q<1.$ Тогда из правой части неравенства (1.13):

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<q$$

или

$$u_{n+1} < qu_n, \;\; n > N.$$

В силу свойства числовых рядов (если к ряду прибавить или отбросить конечное число членов, то полученный ряд и исходный сходятся или расходятся одновременно):

$$u_{n+1} < qu_n \text{ для всех } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Построим серию неравенств:

$$\begin{aligned}
&u_2 < qu_1, \\
&u_3 < qu_2 < q^2 u_1, \\
&u_4 < qu_3 < q^3 u_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&u_n < qu_{n-1} < q^{n-1} u_1,
\end{aligned}$$

........................

То есть члены ряда

$$u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$$

меньше соответствующих членов ряда

$$qu_1 + q^2u_1 + q^3u_1 + \ldots + q^{n-1}u_1 + \ldots,$$

который сходится как ряд геометрической прогрессии со знаменателем $0 < q < 1$. На основании признака сравнения сходится ряд $u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n + \ldots$ , следовательно, сходится и исходный ряд.

Пусть $l>1$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l>1$. Тогда с некоторого номера $N$ будет выполняться неравенство

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$$

или

$$u_{n+1}>u_n,$$

то есть члены ряда возрастают с увеличением номера $n$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0,$$

значит ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится.

***Замечание***

Если $l=1$, то ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n}.$$

*Решение*

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}:\frac{n^5}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^5\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{1}{2}<1$, то по признаку Даламбера данный по условию ряд сходится.

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}.$$

*Решение*

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} : \frac{n!}{5^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{(n+1)\cdot n! \cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n!} \right) = \infty.$$

Так как предел равен бесконечности, то по признаку Даламбера данный по условию ряд расходится.

## Радикальный признак Коши

**Теорема.** Пусть дан ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

*Доказательство*

Так как $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, то по определению предела — для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N$ такой, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| < \varepsilon$$

$$l - \varepsilon < \sqrt[n]{u_n} < l + \varepsilon. \tag{1.14}$$

Пусть $l<1$. Можно подобрать ε так, что $l+\varepsilon<1$. Обозначим $l+\varepsilon=q, q<1$. Тогда из правой части неравенства (1.14) имеем

$$\sqrt[n]{u_n}<q,$$

$$u_n<q^n, \quad n\geq N.$$

Рассмотрим два ряда:

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_N+u_{N+1}+u_{N+2}+\ldots\ , \tag{1.15}$$

$$q^N+q^{N+1}+q^{N+2}+\ldots \tag{1.16}$$

Ряд (1.16) сходится, так как его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

Члены ряда (1.15), начиная с $u_N$, меньше членов ряда (1.16). В силу свойства числовых рядов и признака сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится.

Пусть $l > 1$. Начиная с некоторого номера $n = N$, будем иметь

$$\sqrt[n]{u_n} > 1$$

или

$$u_n > 1,$$

то есть все члены рассматриваемого ряда, начиная с $u_N$, больше 1. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, так как его общий член не стремится к нулю.

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^{n}.$$

*Решение*

Вычислим предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}=\frac{1}{3}.$$

Так как $\frac{1}{3}<1$, то по радикальному признаку Коши данный по условию ряд сходится.

# Интегральный признак сходимости Коши

**Теорема**. Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ положительны и не возрастают, то есть $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots$, и пусть $f(x)$ — такая непрерывная невозрастающая функция, что $f(1)=u_1,\ f(2)=u_2,\ f(n)=u_n$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд;
2) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и ряд.

*Доказательство*

Изобразим члены ряда геометрически (рис. 1.1).

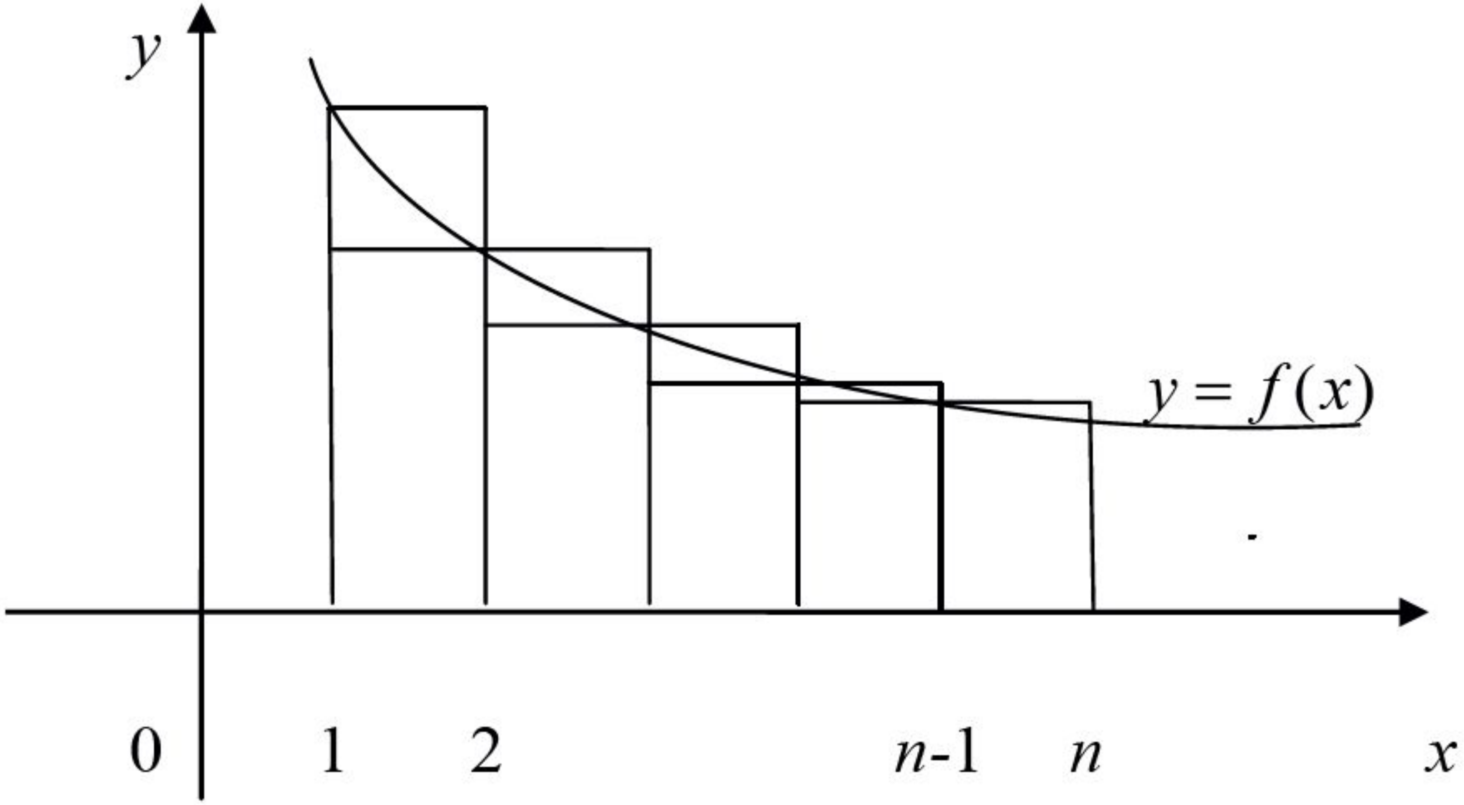


Рис. 1.1

Площадь криволинейной трапеции, изображенной на рис. 1.1:

$$Q=\int_1^n f(x)dx.$$

Возьмем $n$-ю частичную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$:

$$S_n = f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n).$$

Тогда площадь $Q_+$ выступающей фигуры будет

$$Q_+ = f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)=S_{n-1},$$

а площадь $Q_-$ входящей фигуры

$$Q_- = f(2)+f(3)+\ldots+f(n)=S_n - f(1).$$

Из построения и свойств функции $f(x)$ следует, что

$$Q_- < Q < Q_+,$$

$$S_n - f(1) < \int_1^n f(x)dx < S_{n-1}.$$

Так как $S_{n-1} < S_n$, то

$$S_n - f(1) < \int_1^n f(x)dx < S_n, \; n = 1, 2, \ldots \tag{1.17}$$

1. Пусть несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ сходится.

Тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^{n} f(x)dx = A.$

Так как $\int\limits_1^{n} f(x)dx \le A = \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$

(в силу условия $f(x) > 0$для $x \in [1,+\infty)$), то из неравенства (1.17) следует, что

$$S_n < f(1) + \int\limits_1^{n} f(x)dx < f(1) + A = M = \text{const},$$

$$0 < S_n < M,\ n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Последовательность $\{S_n\}$ ограничена и при возрастании $n$ сумма $S_n$ возрастает. Поэтому последовательность имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится.

2. Пусть несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится.

Так как по условию $f(x) > 0$ для $x \geq 1$, то

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} f(x)dx = +\infty.$$

Из неравенства

$$S_n \geq \int_1^{n} f(x)dx, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty,$$

то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ расходится.

***Замечание***

Вместо интеграла $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ можно брать интеграл

$$\int\limits_k^{+\infty} f(x)dx\,,\ k>1,\ k\in\mathbb{N}.$$

**Пример.** Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

*Решение*

Вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)} = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln(x+1)}\bigg|_1^a\right) = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln(a+1)}\right) = \frac{1}{\ln 2},$$

следовательно, интеграл сходится, значит и ряд сходится.

## Обобщенный гармонический ряд

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

называется ***обобщенным гармоническим рядом***.

Исследуем его на сходимость, используя интегральный признак Коши.

1. Если $p>1$, то ряд сходится, так как $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\frac{1}{p-1}$.
2. Если $p<1$, то ряд расходится, так как $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\infty$.
3. Если $p=1$, то ряд расходится, так как $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\infty$.