

# Элементы теории фредгольмовых отображений

<https://vk.com/fredholm>

# **11. Нелинейные фредгольмовы отображения**

Рассмотрим отображение  $f : E \rightarrow F$  ( $E, F$  – БП).

Пусть для любого  $x \in E$  существует производная Фреше  $f'(x) : E \rightarrow F$ , являющаяся фредгольмовым оператором, причем  $f'(x)$  непрерывна по  $x$  (как операторное отображение  $f' : E \rightarrow L(E, F)$ ). Тогда отображение  $f$  называется **фредгольмовым отображением**.

Заметим, что, в силу того, что любые две точки  $x_1, x_2 \in E$  можно соединить отрезком  $\{(1-t)x_1 + tx_2 \mid t \in [0,1]\} \subset E$ ,  $\text{ind } f'(x_1) = \text{ind } f'(x_2)$  (т. к. множество  $\{f'((1-t)x_1 + tx_2)\}_{t \in [0,1]} \subset \Phi(E, F)$  является линейно связным, индекс на этом множестве постоянен). Таким образом,  $\text{ind } f'(x) = \text{const}$  (на  $E$ ), и это постоянное значение индекса называется **индексом фредгольмова отображения  $f$** .

# **12. Фредгольмовы функционалы**

**Определение.** Если значениями отображения являются числа, то отображение называется *функционалом*.

Рассмотрим гладкий функционал  $V$  на банаховом пространстве  $E$ . Предположим, что  $E$  непрерывно вложено в банахово пространство  $F$ ,  $F$  непрерывно вложено в гильбертово пространство  $H$  и  $E$  плотно в  $H$ .

**Замечание 1.** Говорят, что банахово пространство  $E$  непрерывно вложено в банахово пространство  $F$ , если:

- 1)  $E$  является подмножеством  $F$ ;
- 2) из сходимости последовательности  $\{x_n\} \subset E$  по норме пространства  $E$  следует сходимость этой последовательности по норме пространства  $F$ .

**Замечание 2.** Говорят, что пространство  $E$  плотно в пространстве  $H$ , если замыкание  $E$  по норме  $H$  совпадает с  $H$ , то есть для любой точки  $a \in H$  существует последовательность  $\{x_n\} \subset E$ , сходящаяся к  $a$  по норме  $H$ .

Предположим также, что задано отображение  $f : E \rightarrow F$ , такое, что

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \langle f(x), h \rangle \quad \forall x \in E, \forall h \in E$$

( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – скалярное произведение в ГП  $H$ ).

Отображение  $f : E \rightarrow F$  называется *градиентом* функционала  $V$  и обозначается  $\text{grad}V$ .

В этом случае говорят, что функционал  $V$  обладает *градиентной реализацией* в тройке пространств  $\{E, F, H\}$ .



**Пример.** Пусть  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , то есть  $V$  – функция  $n$  переменных. Тогда значение производной Фреше функции  $V$  в точке  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  на векторе  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$  имеет вид

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}(x) \quad \frac{\partial V}{\partial x_2}(x) \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial x_1}(x)h_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}(x)h_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n}(x)h_n = \langle f(x), h \rangle,$$

где  $f(x) = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)^T = \text{grad } V.$

где  $f(x) = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}(x), \frac{\partial V}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}(x) \right)^T = \text{grad } V.$

Итак, в данном случае «новое» определение градиента равносильно «старому» (из матем. анализа).

Заметим также, что в этом случае  $E = F = H = \mathbb{R}^n.$

**Определение.** Точка  $x_0 \in E$  называется *критической точкой* функционала  $V$ , если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0)h = \langle f(x_0), h \rangle = 0$$

для любого  $h \in E$ .

**Лемма.** Точка  $x_0 \in E$  является критической точкой функционала тогда и только тогда, когда  $f(x_0) = 0$ .

*Доказательство.*

*Достаточность* очевидна.

*Необходимость.* Если  $x_0$  – критическая точка функционала  $V$ , то  $\langle f(x_0), h \rangle = 0$  при всех  $h \in E$ .

В силу плотности  $E$  в  $H$ , существует последовательность  $\{h_n\} \subset E$ , сходящаяся к  $f(x_0) \in F$  по норме  $H$ .

Учитывая, что  $\langle f(x_0), h_n \rangle = 0$  при любом  $n$ , и используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим:

$$\begin{aligned}\|f(x_0)\|_H^2 &= \langle f(x_0), f(x_0) \rangle = |\langle f(x_0), f(x_0) \rangle - \langle f(x_0), h_n \rangle| = \\ &= |\langle f(x_0), f(x_0) - h_n \rangle| \leq \|f(x_0)\|_H \cdot \|f(x_0) - h_n\|_H \rightarrow 0\end{aligned}$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

Так как число  $\|f(x_0)\|_H^2$  от  $n$  не зависит, то

$$\|f(x_0)\|_H^2 = 0. \text{ Таким образом, } f(x_0) = 0.$$

Лемма доказана.

**Определение.** Функционал  $V$  называется *фредгольмовым*, если его градиент  $f : E \rightarrow F$  является фредгольмовым отображением. При этом *индексом функционала  $V$*  называют индекс отображения  $f$ .

# **13. Вычисление градиентов некоторых функционалов**

Во всех рассматриваемых ниже примерах  $H = L_2[0,1]$ ,  $E$ ,  $F$  – вещественные банаховы линейные пространства,  $E$  линейно и непрерывно вложено в  $F$ ,  $F$  линейно и непрерывно вложено в  $H$  и  $E$  плотно в  $H$ .



**Пример 1.** Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \frac{1}{2} \int_0^1 (Ax)x dt,$$

где  $x \in E$ ,  $A: E \rightarrow F$  – симметрический линейный непрерывный оператор (оператор называется симметрическим, если  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in E$ ).

Вычислим градиент функционала  $V$ .

Рассмотрим приращение функционала  $V$ :

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) &= \frac{1}{2} \langle A(x+h), x+h \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим приращение функционала  $V$ :

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) &= \frac{1}{2} \langle A(x+h), x+h \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle. \end{aligned}$$

В силу симметричности оператора  $A$ ,  
 $\langle Ah, x \rangle = \langle h, Ax \rangle = \langle Ax, h \rangle$ .

Следовательно,  $V(x+h) - V(x) = \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle$ .

Таким образом,  $\text{grad}V(x) = Ax$ , если  $\langle Ah, h \rangle = o(\|h\|_E)$ .

Используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим:  $|\langle Ah, h \rangle| \leq \|Ah\|_H \cdot \|h\|_H$ .

Следовательно,  $\frac{|\langle Ah, h \rangle|}{\|h\|_E} \leq \|Ah\|_H \cdot \frac{\|h\|_H}{\|h\|_E} \leq k_1 \cdot k_2 \cdot \|Ah\|_H \leq$

$\leq k_1 \cdot k_2 \cdot k_2 \cdot \|Ah\|_F \leq k_1 \cdot k_2^2 \cdot \|A\| \cdot \|h\|_E \rightarrow 0$  при  $\|h\|_E \rightarrow 0$ ,

так как  $\|h\|_F \leq k_1 \|h\|_E$ ,  $\|h\|_H \leq k_2 \|h\|_F$

(в силу непрерывности вложений  $E$  в  $F$  и  $F$  в  $H$ ).

Итак,  $\langle Ah, h \rangle = o(\|h\|_E)$ .

Следовательно,  $\text{grad } V(x) = Ax$ .

**Пример 2.** Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2 dt,$$

заданный на БП  $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ , которое непрерывно вложено в БП  $F = C[0,1]$ ; пространство  $F$  непрерывно вложено в ГП  $H = L_2[0,1]$ ;

$$\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\ddot{x}(t)|, \quad \|x\|_F = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|,$$

$$\|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t) dt, \quad \langle x, y \rangle_H = \int_0^1 x(t) y(t) dt.$$

Вычислим  $\text{grad } V(x)$ .

Сравним нормы пространств  $E$ ,  $F$  и  $H = L_2[0,1]$ .

$$1) \quad \|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t) dt \leq \int_0^1 \left( \max_{t \in [0,1]} |x(t)| \right)^2 dt = \int_0^1 \|x\|_F^2 dt = \|x\|_F^2,$$

следовательно,  $\|x\|_H \leq \|x\|_F$ .

2) Очевидно, что  $\|x\|_F \leq \|x\|_E$ .

Из полученных неравенств вытекает непрерывность вложений  $E$  в  $F$  и  $F$  в  $H$ .

Используя равенство  $\dot{x}\dot{x} + \ddot{x}x = (\dot{x}x)'$ , получим:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\dot{x}x)' dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \ddot{x}x dt = (\dot{x}x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \ddot{x}x dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d^2x}{dt^2} x dt = \frac{1}{2} \left\langle -\frac{d^2}{dt^2} x, x \right\rangle. \end{aligned}$$

Обозначим  $-\frac{d^2}{dt^2} = A$ .

Нетрудно проверить симметричность оператора  $A$  (проверьте самостоятельно!).

Таким образом, этот пример является частным случаем примера 1.

Следовательно,  $f(x) = \text{grad } V(x) = Ax = -\frac{d^2}{dt^2}x$  и

$$f'(x) = -\frac{d^2}{dt^2}.$$

Покажем **фредгольмовость** отображения  $f'(x_0): E \rightarrow F$  (которая означает фредгольмовость функционала  $V$ ).

Докажем, что  $f'(x_0): E \rightarrow F$  – изоморфизм (при любом фиксированном  $x_0 \in E$ ).

1) Пусть  $x \in \text{Ker } A$  ( $A = -\frac{d^2}{dt^2} = f'(x_0)$ ).

Тогда  $Ax = -\ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = at + b$ .

В силу условия  $x(0) = x(1) = 0$  получаем, что  $x(t) \equiv 0$ .

Следовательно,  $\text{Ker } A = \{0\}$ .



2) Рассмотрим произвольный  $y \in F$ . Элемент  $x \in C^2[0,1]$ , заданный выражением

$$x(t) = t \int_0^1 \left( \int_0^s y(u) du \right) ds - \int_0^t \left( \int_0^s y(u) du \right) ds,$$

для которого выполняется условие  $x(0) = x(1) = 0$ , является решением уравнения  $Ax = -\ddot{x} = y$ , то есть является прообразом элемента  $y$ . Следовательно,  $\text{Im} A = F$ .

Итак, оператор  $f'(x_0): E \rightarrow F$  – изоморфизм (при любом фиксированном  $x_0 \in E$ ), то есть фредгольмов оператор индекса 0. Следовательно отображение  $f: E \rightarrow F$  является фредгольмовым индекса 0, а функционал  $V$  – фредгольмовым функционалом индекса 0.

**Пример 3.** Рассмотрим функционал

$$V(x) = \int_0^1 \varphi(x(t)) dt,$$

заданный на БП  $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ , где  $\varphi$  – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на  $\mathbb{R}^1$ . Пространство  $E$  непрерывно вложено в БП  $F = C[0,1]$ ; пространство  $F$  непрерывно вложено в ГП  $H = L_2[0,1]$ ;

$$\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\ddot{x}(t)|, \quad \|x\|_F = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|,$$

$$\|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t) dt, \quad \langle x, y \rangle_H = \int_0^1 x(t) y(t) dt.$$

Вычислим  $\text{grad } V$  в некоторой точке  $a \in E$ .

Воспользуемся формулой Тейлора в форме

Лагранжа:

$$\varphi(a + h) = P_n(a) + r_n(a),$$

где 
$$P_n(a) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k,$$

$$r_n(a) = \frac{\varphi^{(n+1)}(a + \theta h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}, \quad \theta \in (0,1),$$

считая, что  $a$  и  $h$  – значения функций  $a(t)$  и  $h(t)$  при некотором  $t \in [0,1]$  (число  $\theta$  зависит от значения  $h(t)$ ).

При  $n = 1$  получим:

$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + \varphi'(a)h + r_1(a), \quad (1)$$

где

$$r_1(a) = \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2. \quad (2)$$

Рассмотрим приращение функционала  $V$  (с учетом (1) и (2)) :

$$\begin{aligned} V(a+h) - V(a) &= \int_0^1 \varphi(a+h) dt - \int_0^1 \varphi(a) dt = \\ &= \int_0^1 (\varphi(a+h) - \varphi(a)) dt = \int_0^1 (\varphi'(a(t))h(t) + r_1(a(t))) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(a+h) - V(a) &= \int_0^1 \varphi(a+h) dt - \int_0^1 \varphi(a) dt = \\
&= \int_0^1 (\varphi(a+h) - \varphi(a)) dt = \int_0^1 (\varphi'(a(t))h(t) + r_1(a(t))) dt = \\
&= \int_0^1 \varphi'(a(t))h(t) dt + \int_0^1 r_1(a(t)) dt = \langle \varphi'(a), h \rangle_H + \int_0^1 r_1(a(t)) dt.
\end{aligned}$$

Докажем, что  $\int_0^1 r_1(a(t)) dt = o(\|h\|_E)$ . Тогда, очевидно,

$$\text{grad } V(a) = \varphi'(a).$$

Итак, поскольку  $\|h\|_E \rightarrow 0$ , можно считать, что  $\|h\|_E \leq 1$ .

Тогда получаем следующую оценку (при  $\forall \theta \in (0,1)$ ,  $\forall t \in [0,1]$ ):

$$\begin{aligned} |a(t) + \theta \cdot h(t)| &\leq |a(t)| + |\theta| \cdot |h(t)| \leq |a(t)| + |h(t)| \leq \\ &\leq \|a\|_E + \|h\|_E \leq \|a\|_E + 1. \end{aligned}$$

Следовательно, значения функции  $a(t) + \theta \cdot h(t)$ , где  $h(t)$  – достаточно малая (по норме) добавка, при  $\forall t \in [0,1]$  и  $\forall \theta \in (0,1)$  можно считать заключёнными в некотором отрезке  $[-c, c]$ .



Функция  $\varphi''$  непрерывна на  $\mathbb{R}^1$  и, следовательно, ограничена на любом отрезке, поэтому существует такая константа  $k$ , что  $|\varphi''(x)| \leq k$  для любого  $x \in [-c, c]$ . Отсюда следует, что  $|\varphi''(a(t) + \theta h(t))| \leq k \quad \forall \theta \in (0, 1), \forall t \in [0, 1]$ .

Используя последнее неравенство и равенство (2), установим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 r_1(a(t)) dt \right| &\leq \int_0^1 |r_1(a(t))| dt = \int_0^1 \left| \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2 \right| dt \leq \frac{k}{2} \int_0^1 h^2(t) dt \leq \\ &\leq \frac{k}{2} \int_0^1 \left( \max_{t \in [0, 1]} |h(t)| \right)^2 dt = \frac{k}{2} \|h\|_F^2 \leq \frac{k}{2} \|h\|_E^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 r_1(a(t)) dt \right| &\leq \int_0^1 |r_1(a(t))| dt = \int_0^1 \left| \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2 \right| dt \leq \frac{k}{2} \int_0^1 h^2(t) dt \leq \\ &\leq \frac{k}{2} \int_0^1 \left( \max_{t \in [0,1]} |h(t)| \right)^2 dt = \frac{k}{2} \|h\|_F^2 \leq \frac{k}{2} \|h\|_E^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\left| \int_0^1 r_1(a(t)) dt \right|}{\|h\|_E} \leq \frac{k}{2} \cdot \|h\|_E \rightarrow 0 \text{ при } \|h\|_E \rightarrow 0,$$

то есть  $\int_0^1 r_1(a(t)) dt = o(\|h\|_E)$ .

Следовательно,  $\text{grad } V(a) = \varphi'(a)$ .

**Пример 4.** Рассмотрим функционал

$$V(x) = \int_0^1 \left( \frac{\dot{x}^2 + \lambda x}{2} + \frac{x^4}{4} \right) dt,$$

где  $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ ,  $F = C[0,1]$ ,  $H = L_2[0,1]$ ,

$\lambda$  – параметр,  $\lambda \in \mathbb{R}^1$ .

Представим функционал в виде суммы

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x),$$

где  $V_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2 dt$ ,  $V_2(x) = \int_0^1 \frac{\lambda x}{2} dt$ ,  $V_3(x) = \int_0^1 \frac{x^4}{4} dt$ .

Очевидно, что

$$f(x) = \text{grad}V(x) = \sum_{i=1}^3 \text{grad}V_i(x) = -\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{\lambda}{2} + x^3$$

(см. примеры 2 и 3).

# **14. вспомогательные задачи**

**Задача 1.** ЛОО  $A$  действует из БП  $E = C^2[0,1]$  в БП  $F = C[0,1]$ :

$$(Ax)(t) = k \cdot x(t), \quad k = \text{const}, \quad x \in E, \quad t \in [0,1].$$

Докажите, что оператор  $A$  является вполне непрерывным.

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное ограниченное множество  $M \subset E$ . Надо доказать, что его образ  $A(M)$  является относительно компактным множеством в БП  $F = C[0,1]$ .

Для этого воспользуемся теоремой Арцела.

# Напоминание

---

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ КОМПАКТНОСТЬ В  $C[a, b]$ .

Пусть множество  $M = \{x(t)\} \subset C[a, b]$ . Ограниченность  $M$  означает, что

$$(\exists K \geq 0)(\forall x \in M)(\forall t \in [a, b])[|x(t)| \leq K].$$

Множество  $M$  называется *равностепенно непрерывным*, если

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall t_1, t_2 \in [a, b])(|t_1 - t_2| < \delta \rightarrow (|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon)).$$

ТЕОРЕМА АРЦЕЛА. Множество  $M \subset C[a, b]$  относительно компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и равностепенно непрерывно.

---

Нетрудно убедиться, что множество  $A(M)$  ограничено в  $F$  (доказать самостоятельно!).

Покажем, что множество  $A(M)$  равномерно непрерывно.

Ограниченность множества  $M$  означает существование такой константы  $R$ , что для  $\forall x \in M$

$$\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\ddot{x}(t)| \leq R,$$

откуда вытекает, что  $\max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)| \leq R$  для  $\forall x \in M$ .

Рассмотрим произвольный элемент  $y \in A(M)$ . Для  $y$  найдется такой  $x \in M$ , что  $y = Ax = k \cdot x$ . Заметим, что

$$\text{для } \forall y \in A(M) \max_{t \in [0,1]} |\dot{y}(t)| = \max_{t \in [0,1]} |k \cdot \dot{x}(t)| \leq |k| \cdot R = R_1.$$

В силу **теоремы Лагранжа** (из курса мат. анализа), для любых точек  $t_1, t_2 \in [0,1]$  найдется точка  $\tau \in [0,1]$ , такая, что  $y(t_1) - y(t_2) = \dot{y}(\tau)(t_1 - t_2)$ . Следовательно, для

$\forall y \in A(M)$  и для любых точек  $t_1, t_2 \in [0,1]$

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leq \max_{\xi \in [0,1]} |\dot{y}(\xi)| \cdot |t_1 - t_2| \leq R_1 \cdot |t_1 - t_2|.$$



В силу **теоремы Лагранжа** (из курса мат. анализа), для любых точек  $t_1, t_2 \in [0,1]$  найдется точка  $\tau \in [0,1]$ , такая, что  $y(t_1) - y(t_2) = \dot{y}(\tau)(t_1 - t_2)$ . Следовательно, для  $\forall y \in A(M)$  и для любых точек  $t_1, t_2 \in [0,1]$

$$|y(t_1) - y(t_2)| \leq \max_{\xi \in [0,1]} |\dot{y}(\xi)| \cdot |t_1 - t_2| \leq R_1 \cdot |t_1 - t_2|.$$

Тогда

$$(\forall \varepsilon > 0) \left( \exists \delta = \frac{\varepsilon}{R_1} \right) (\forall y \in A(M)) (\forall t_1, t_2 \in [0,1]: |t_1 - t_2| < \delta) \\ \left[ |y(t_1) - y(t_2)| \leq R_1 \cdot |t_1 - t_2| < R_1 \cdot \delta = \varepsilon \right],$$

что и означает **равностепенную непрерывность** множества  $A(M)$ .

Итак, для произвольного ограниченного множества  $M \subset E$  его образ  $A(M)$  относительно компактен в БП  $F = C[0,1]$ . Следовательно, оператор  $A$  является вполне непрерывным.

**Задача 2.** ЛОО  $A$  действует из БП  $E = C^2[0,1]$  в БП  $F = C[0,1]$ :

$$(Ax)(t) = \alpha(t) \cdot x(t),$$

где  $\alpha(t)$  – некоторая непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[0,1]$  функция,  $x \in E$ ,  $t \in [0,1]$ .

Докажите, что оператор  $A$  является вполне непрерывным.

*Доказать самостоятельно !*

**Задача 3.** Пусть  $\varphi$  – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на  $\mathbb{R}^1$ .

Отображение  $f$  действует из БП  $E = C^2[0,1]$  в БП  $F = C[0,1]$ :

$$f(x)(t) = \varphi(x(t)), \quad x \in E, \quad t \in [0,1].$$

Найдите производную Фреше отображения  $f$ .

*Решение.*

Вычислим производную  $f'(a)$  в произвольной точке  $a \in E$ .

Вычислим производную  $f'(a)$  в произвольной точке  $a \in E$ .

Воспользуемся формулой Тейлора в форме Лагранжа:

$$\varphi(a+h) = P_n(a) + r_n(a),$$

где 
$$P_n(a) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k,$$

$$r_n(a) = \frac{\varphi^{(n+1)}(a + \theta h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}, \quad \theta \in (0,1),$$

считая, что  $a$  и  $h$  – значения функций  $a(t)$  и  $h(t)$  при некотором  $t \in [0,1]$  (число  $\theta$  зависит от значения  $h(t)$ ).

При  $n = 1$  получим:

$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + \varphi'(a)h + r_1(a), \quad (1)$$

где

$$r_1(a) = \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2. \quad (2)$$

Рассмотрим приращение отображения  $f$  (с учетом (1) и (2)) :

$$f(a+h) - f(a) = \varphi(a+h) - \varphi(a) = \varphi'(a)h + r_1(a).$$

Обоснование того, что  $r_1(a) = o(\|h\|_E)$ , почти дословно повторяет аналогичное доказательство из **примера 3** (пар.13).

Тогда, очевидно,

$$(f'(a)h)(t) = \varphi'(a(t)) \cdot h(t) \quad \text{при } \forall h \in E \text{ и } \forall t \in [0,1].$$

# 15. Уравнение маятника



Рассмотрим тройку пространств

$E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$ ,  $F = C[0,1]$ ,  $H = L_2[0,1]$  и отображение  $f: E \rightarrow F$ ,  $f(x) = \ddot{x} + \lambda \sin x$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}^1$  ( $\lambda$  – фиксированное значение параметра).

Уравнение

$$\ddot{x} + \lambda \sin x = 0 \quad (1)$$

называется *уравнением маятника* (при  $\lambda > 0$ ).

Отображение  $f$  является *потенциальным*, то есть

$f(x) = \text{grad}V(x)$ , где

$$V(x) = - \int_0^1 \left( \frac{\dot{x}^2}{2} + \lambda \cos x \right) dt, \quad x \in E.$$

Докажем фредгольмовость отображения  $f$ .

Представим  $f$  следующим образом:

$$f(x) = \frac{d^2}{dt^2}x + \lambda \sin x = Ax + \varphi(x),$$

где  $Ax = \frac{d^2}{dt^2}x$ ,  $A = \frac{d^2}{dt^2} : E \rightarrow F$  — ЛОО,  $\varphi(x) = \lambda \sin x$ .

Тогда для  $\forall x \in E$  и  $\forall h \in E$

$$f'(x)h = Ah + \varphi'(x) \cdot h = \frac{d^2}{dt^2}h + (\lambda \cos x) \cdot h = \ddot{h} + (\lambda \cos x) \cdot h$$

(см. задачу 3 из пар. 14).

Оператор  $A = \frac{d^2}{dt^2} : E \rightarrow F$  является изоморфизмом

(см. **пример 2** из пар. 13).

Рассмотрим ЛОО  $B_x : E \rightarrow F$ ,  $B_x h = (\lambda \cos x) \cdot h$ , и покажем, что он является вполне непрерывным (при любом фиксированном  $x \in E$ ).

Поскольку элемент  $x \in E$  фиксирован, то  $B_x h = \alpha_x \cdot h$ , где  $\alpha_x = \lambda \cos x$ , и мы находимся в условиях **задачи 2** из пар. 14 ( $\alpha_x(t) = \lambda \cos x(t)$  – непрерывно дифференцируемая на отрезке  $[0,1]$  функция). Следовательно, оператор  $B_x : E \rightarrow F$  – вполне непрерывный.

Итак, оператор  $f'(x): E \rightarrow F$  представляет собой сумму изоморфизма и вполне непрерывного оператора, то есть является **фредгольмовым линейным оператором индекса ноль** (при любом фиксированном  $x \in E$ ). А это значит, что отображение  $f: E \rightarrow F$  – **фредгольмово отображение индекса ноль**.