

Система MatLab

Методические указания к выполнению лабораторных работ

**Петербургский государственный
университет путей сообщения**

Кафедра «Прикладная математика»

ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

Постановка задачи приближения функции: Пусть задана таблица значений функции $f(x)$: $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, где x_i – узлы таблицы. Требуется построить функцию $g(x) \approx f(x)$ таким образом, чтобы выполнялось условие $g(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Метод – интерполирование алгебраическими многочленами.

Для решения задачи локального интерполирования алгебраическими многочленами в системе MATLAB предназначены функции

`polyfit` (POLYnomial FITting – аппроксимация многочленом) и
`polyval` (POLYnomial VALue – значение многочлена).

Функция `polyfit(X, Y, n)` находит **коэффициенты** многочлена степени n , построенного по данным вектора X , который аппроксимирует данные вектора Y в смысле наименьшего квадрата отклонения. Если число элементов векторов X и Y равно $n+1$, то функция `polyfit(X, Y, n)` решает задачу интерполирования **многочленом** степени n .

Функция `polyval(P, z)` вычисляет **значения** полинома, коэффициенты которого являются элементами вектора P , от аргумента z . Если z – вектор или матрица, то полином вычисляется во всех точках z .

Воспользуемся указанными функциями системы MATLAB для решения задачи локального интерполирования алгебраическими многочленами функции, заданной таблицей своих значений, и вычисления ее приближенного значения в заданной точке $x=x^*$.

Пусть функция $y=y(x)$ задана таблицей своих значений:

| | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| X | 0.0 | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 |
| Y | 1.0 | 1.8 | 2.2 | 1.4 | 1.0 |

Требуется построить интерполяционные многочлены 1-ой, 2-ой и 3-ей степени для этой функции, вычислить ее приближенное значение в точке $x^*=2.2$, записать многочлены в канонической форме и построить их графики.

Решение задачи средствами системы MATLAB:

```
X=[0 1 2 3 4];           % Исходные
Y=[1.0 1.8 2.2 1.4 1.0]; % данные
xzv=2.2;                 % Точка, в которой требуется найти значение
                           % функции
P1=polyfit(X(3:4),Y(3:4),1) % Коэффициенты многочлена P1
z1=polyval(P1,xzv)        % Значение P1(x*)
P2=polyfit(X(2:4),Y(2:4),2) % Коэффициенты многочлена P2
z2=polyval(P2,xzv)        % Значение P2(x*)
P3=polyfit(X(2:5),Y(2:5),3) % Коэффициенты многочлена P3
z3=polyval(P3,xzv)        % Значение P3(x*)
```

Полученные таким образом коэффициенты интерполяционных многочленов и значения этих многочленов при $x=x^*$:

$P_1 =$

-0.8000 3.8000
2.0400

$P_2 =$

-0.6000 2.2000 0.2000
2.1360

$P_3 =$

0.2667 -2.2000 5.1333 -1.4000
2.0848

По этим результатам самостоятельно запишите многочлены P_1 , P_2 , P_3 в каноническом виде.

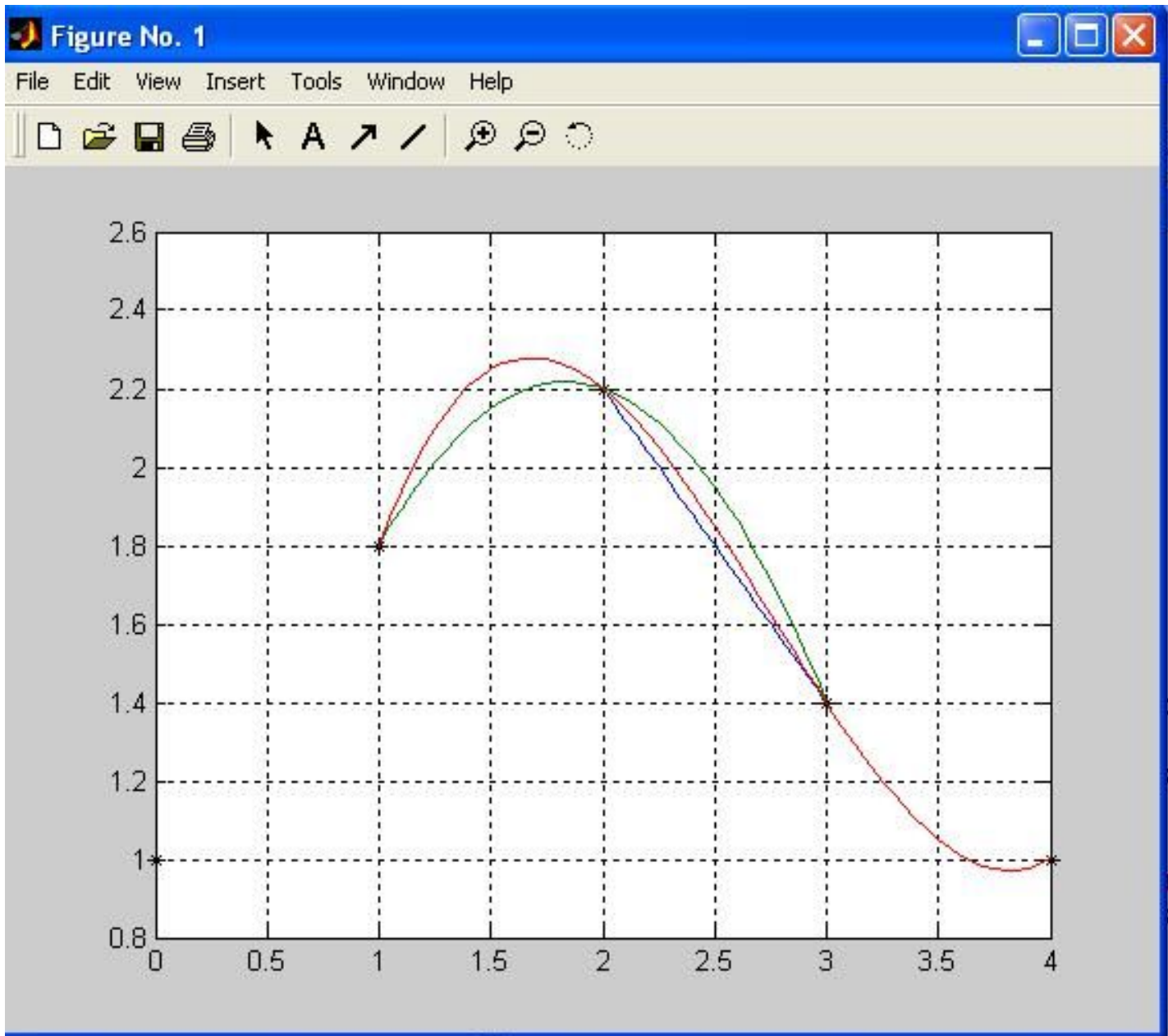
Для построения графиков интерполяционных многочленов следует создать векторы $xi1$, $xi2$, $xi3$, моделирующие интервалы $(X(3):X(4))$, $(X(2):X(4))$, $(X(2):X(5))$, соответственно, и вычислить значения многочленов $P1$, $P2$, $P3$ для элементов векторов $xi1$, $xi2$, $xi3$, соответственно:

```
xi1=X(3):0.05:X(4);  
xi2=X(2):0.05:X(4);  
xi3=X(2):0.05:X(5);
```

```
y1=polyval(P1,xi1);  
y2=polyval(P2,xi2);  
y3=polyval(P3,xi3);
```

```
plot(X,Y,'*k',xi1,y1,xi2,y2,xi3,y3);grid
```

Функция `plot` с указанными аргументами строит табличные значения функции черными звездочками ('*k'), а также графики многочленов $P1$ (по векторам $xi1$ и $y1$), $P2$ (по векторам $xi2$ и $y2$) и $P3$ (по векторам $xi3$ и $y3$), соответственно синей, красной и зеленой кривыми.



ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

При оценке погрешности решения задачи интерполирования в точке x^* за погрешность epsk интерполяционного многочлена степени k принимается модуль разности значений этого многочлена и многочлена степени $k+1$ в точке x^* . С помощью уже полученных значений можно оценить погрешности интерполяционных многочленов P_1 и P_2 в точке x^* , используя функцию `abs` системы MATLAB для вычисления модуля:

```
eps1 = abs(z1-z2)
```

```
eps1 =
```

```
0.0960
```

```
eps2 = abs(z2-z3)
```

```
eps2 =
```

```
0.0512
```

Для оценки погрешности многочлена P_3 необходимо предварительно вычислить значение $z_4=P_4(x^*)$, а затем – eps_3 (сделайте это самостоятельно).

Постановка задачи наилучшего приближения функций: Пусть задана таблица значений $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ функции $f(x)$. Рассмотрим обобщенный многочлен

$$g(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_m \varphi_m(x) \text{ по системе функций } \left. \{\varphi_i\} \right|_{i=0}^m.$$

При $m + 1 = n$ это задача интерполирования. Пусть $n \gg m$.

Образует в узлах таблицы разности $r_i = y_i - g_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$, $r = (r_0, r_1, \dots, r_n)$ характеризует, насколько сильно отклоняется многочлен от табличных значений.

Задача о наилучшем приближении функции $f(x)$ состоит в нахождении такого набора коэффициентов $\{c_0, c_1, \dots, c_m\}$, который доставляет минимум норме вектора $\|r\|$. Если под нормой вектора понимать

$$\|r\| = \left(\sum_{k=0}^n r_k^2 \right)^{1/2} = \sqrt{r_0^2 + r_1^2 + \dots + r_n^2}, \text{ то приходим к задаче о наилучшем}$$

среднеквадратичном приближении.

Простейший подход к решению этой задачи – метод наименьших квадратов.

ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ НАИЛУЧШЕГО СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Наилучшее среднеквадратичное приближение функции, заданной таблицей своих значений, – способ аппроксимации функции, основанный на критерии минимума среднеквадратичного отклонения.

Наиболее простой подход к построению многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения состоит в составлении соответствующей нормальной системы метода наименьших квадратов (МНК) $S \cdot \text{coef} = T$ решением которой является вектор коэффициентов искомого многочлена coef .

В соответствии с этим подходом решим задачу построения многочленов наилучшего среднеквадратичного приближения первой и второй степени для функции, заданной таблицей своих значений

| | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|
| X | 0.0 | 1.0 | 2.0 | 3.0 | 4.0 |
| Y | 1.0 | 1.8 | 2.2 | 1.4 | 1.0 |

Требуется построить алгебраические многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения:

первой степени $g_1(x) = A_1 \cdot x + B_1$

и второй степени $g_2(x) = A_2 \cdot x^2 + B_2 \cdot x + C_2$.

Определить величину среднеквадратичного отклонения для $g_1(x)$ и $g_2(x)$ и построить графики многочленов.

Для решения задачи наилучшего среднеквадратичного приближения алгебраическими многочленами в системе MATLAB предназначены функции `polyfit` и `polyval`.

Функция `polyfit(X,Y,n)` находит **коэффициенты** многочлена степени n , построенного по данным вектора X , который аппроксимирует данные вектора Y в смысле наименьшего квадрата отклонения.

Функция `polyval(V,s)` вычисляет **значения** полинома, коэффициенты которого являются элементами вектора V , от аргумента s . Если s – вектор или матрица, то полином вычисляется во всех точках s .

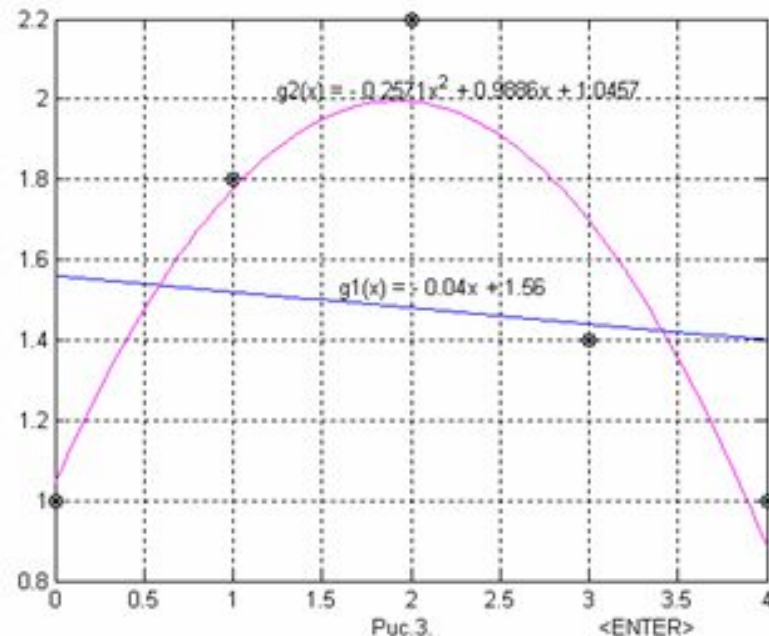
В этом случае нахождение коэффициентов многочлена состоит в обращении к функции `polyfit` с соответствующими задаче аргументами:

```
coef1=polyfit(X,Y,1)      % коэффициенты многочлена
                           % первой степени
coef2=polyfit(X,Y,2)      % коэффициенты многочлена
                           % второй степени
```

Для построения графиков зададим вспомогательный вектор абсциссы x_i , а затем с помощью функции `polyval` вычислим элементы векторов g_1 и g_2 :

```
xi=min(X):0.1:max(X);  
g1=polyval(coef1,xi);  
g2=polyval(coef2,xi);  
plot(X,Y,'*k',xi,g1,xi,g2);grid
```

Функция `plot` с указанными аргументами строит черными звездочками ('*k') табличные значения, синей кривой график многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения первой степени, красной – график многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения второй степени.



Для того чтобы определить величину среднеквадратичного уклонения, вычислим суммы квадратов уклонений $g_1(x)$ и $g_2(x)$ от таблично заданной функции в узлах таблицы X:

```
G1=polyval(coef1,X);  
G2=polyval(coef2,X);
```

```
delt1=sum((Y-G1).^2); delt1=sqrt(delt1/5)  
delt2=sum((Y-G2).^2); delt2=sqrt(delt2/5)
```

Последние две строки можно заменить другими, если использовать функцию `mean`, вычисляющую среднее значение:

```
delt1=mean(sum((Y-G1).^2))  
delt2=mean(sum((Y-G2).^2))
```

Задание к лабораторной работе 6 - 7:

1. Средствами системы MATLAB

а) построить интерполяционные многочлены 1-ой, 2-ой и 3-ей степени;

б) вычислить значения построенных многочленов в точке x^* ;

в) оценить погрешность интерполирования;

г) построить графики многочленов.

2. Построить алгебраические многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения первой и второй степени с помощью функций системы MATLAB, предназначенных для решения задач приближения функций.

3. Построить графики полученных многочленов.

4. Определить величину среднеквадратичного отклонения для каждого из построенных многочленов.