Система MatLab

Методические указания к выполнению лабораторных работ

Петербургский государственный университет путей сообщения

Кафедра «Прикладная математика»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

Постановка задачи приближения функции: Пусть задана таблица значений функции $f(x)$: $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$, где x_i – узлы таблицы. Требуется построить функцию $g(x) \approx f(x)$ таким образом, чтобы выполнялось условие $g(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$.

Метод – интерполирование алгебраическими многочленами.

Для решения задачи локального интерполирования алгебраическими многочленами в системе MATLAB предназначены функции

polyfit (POLYnomial FITting – аппроксимация многочленом) и

polyval (POLYnomial VALue – значение многочлена).

Функция polyfit(X,Y,n) находит **коэффициенты** многочлена степени n, построенного по данным вектора X, который аппроксимирует данные вектора Y в смысле наименьшего квадрата отклонения. Если число элементов векторов X и Y равно n+1, то функция polyfit(X,Y,n) решает задачу интерполирования **многочленом** степени n.

Функция polyval(P,z) вычисляет **значения** полинома, коэффициенты которого являются элементами вектора P, от аргумента z. Если z – вектор или матрица, то полином вычисляется во всех точках z.

Воспользуемся указанными функциями системы MATLAB для решения задачи локального интерполирования алгебраическими многочленами функции, заданной таблицей своих значений, и вычисления ее приближенного значения в заданной точке $x=x^*$.

Пусть функция $y=y(x)$ задана таблицей своих значений:

X	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
Y	1.0	1.8	2.2	1.4	1.0

Требуется построить интерполяционные многочлены 1-ой, 2-ой и 3-ей степени для этой функции, вычислить ее приближенное значение в точке $x^*=2.2$, записать многочлены в канонической форме и построить их графики.

Решение задачи средствами системы MATLAB:

```
X=[0 1 2 3 4];                  % Исходные
Y=[1.0 1.8 2.2 1.4 1.0];        % данные
xzv=2.2;                        % Точка, в которой требуется найти значение
                                  функции
P1=polyfit(X(3:4),Y(3:4),1)     % Коэффициенты многочлена P1
z1=polyval(P1,xzv)              % Значение P1(x*)
P2=polyfit(X(2:4),Y(2:4),2)     % Коэффициенты многочлена P2
z2=polyval(P2,xzv)              % Значение P2(x*)
P3=polyfit(X(2:5),Y(2:5),3)     % Коэффициенты многочлена P3
z3=polyval(P3,xzv)              % Значение P3(x*)
```

Полученные таким образом коэффициенты интерполяционных многочленов и значения этих многочленов при $x=x^*$:

```
P1 =
  -0.8000    3.8000
   2.0400

P2 =
  -0.6000    2.2000    0.2000
   2.1360

P3 =
   0.2667   -2.2000    5.1333   -1.4000
   2.0848
```

По этим результатам самостоятельно запишите многочлены P1, P2, P3 в каноническом виде.

Для построения графиков интерполяционных многочленов следует создать векторы xi1, xi2, xi3, моделирующие интервалы (X(3):X(4)), (X(2):X(4)), (X(2):X(5)), соответственно, и вычислить значения многочленов P1, P2, P3 для элементов векторов xi1, xi2, xi3, соответственно:

```
xi1=X(3):0.05:X(4);
xi2=X(2):0.05:X(4);
xi3=X(2):0.05:X(5);
```

```
y1=polyval(P1,xi1);
y2=polyval(P2,xi2);
y3=polyval(P3,xi3);
```

```
plot(X,Y,'*k',xi1,y1,xi2,y2,xi3,y3);grid
```

Функция plot с указанными аргументами строит табличные значения функции черными звездочками('*k'), а также графики многочленов P1 (по векторам xi1 и y1), P2 (по векторам xi2 и y2) и P3 (по векторам xi3 и y3), соответственно синей, красной и зеленой кривыми.

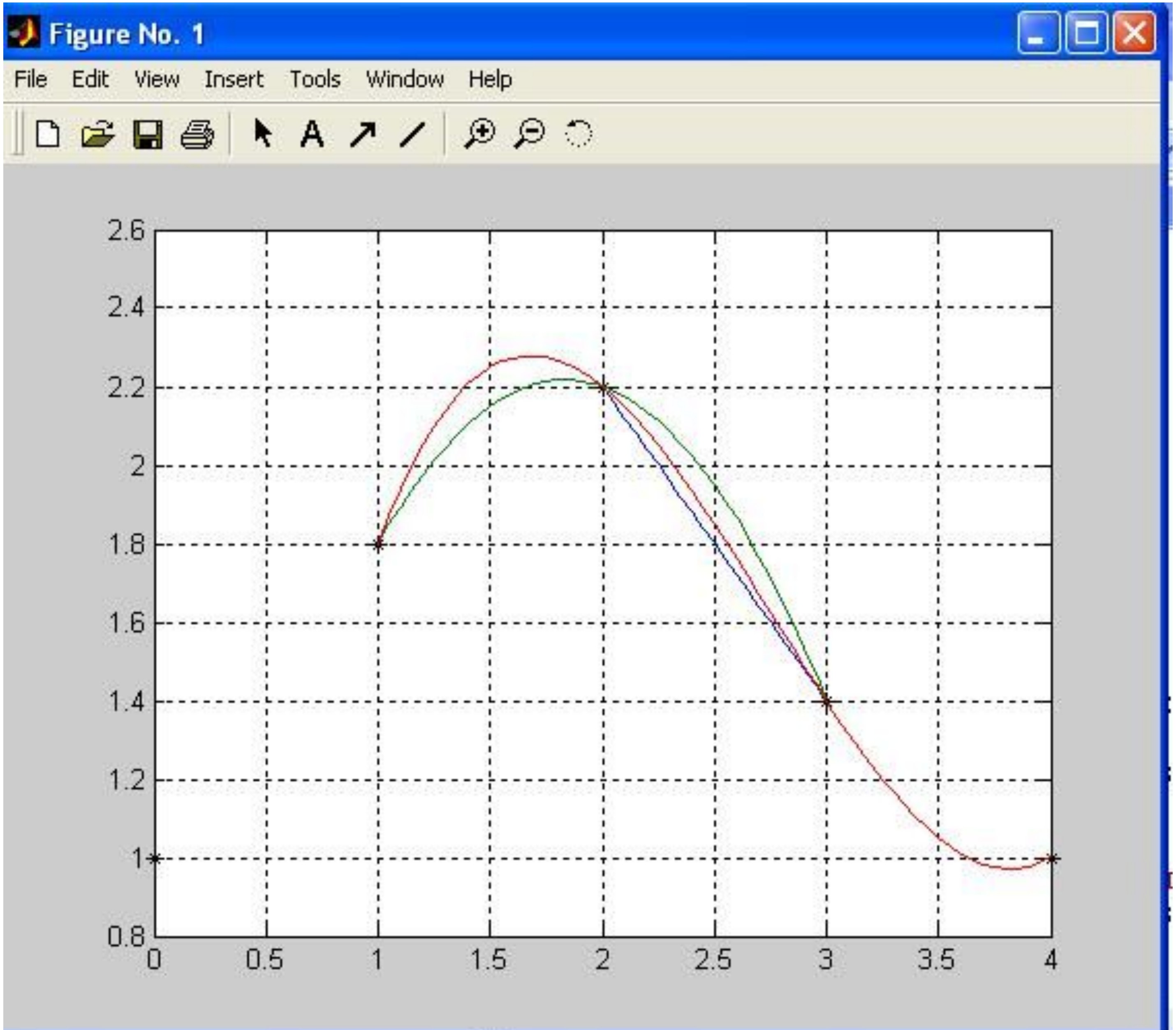

Figure No. 1
File Edit View Insert Tools Window Help
2.6
2.4
2.2
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

При оценке погрешности решения задачи интерполирования в точке x^* за погрешность epsk интерполяционного многочлена степени k принимается модуль разности значений этого многочлена и многочлена степени k+1 в точке x^*. С помощью уже полученных значений можно оценить погрешности интерполяционных многочленов P1 и P2 в точке x^*, используя функцию abs системы MATLAB для вычисления модуля:

```
eps1 = abs(z1-z2)
eps1 =
        0.0960
eps2 = abs(z2-z3)
eps2 =
         0.0512
```

Для оценки погрешности многочлена P3 необходимо предварительно вычислить значение z4=P4(x^*), а затем – eps3 (сделайте это самостоятельно).

Постановка задачи наилучшего приближения функций: Пусть задана таблица значений $y_i = f(x_i)$, $i = 0,1,\ldots,n$ функции $f(x)$. Рассмотрим обобщенный многочлен

$g(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_m\varphi_m(x)$ по системе функций $\{\varphi_i\}\Big|_{i=0}^{m}$.

При $m+1 = n$ это задача интерполирования. Пусть $n >> m$.

Образуем в узлах таблицы разности $r_i = y_i - g_i(x)$, $i = 0,1,\ldots,n$, $r = (r_0, r_1, \ldots, r_n)$ характеризует, насколько сильно уклоняется многочлен от табличных значений.

Задача о наилучшем приближении функции $f(x)$ состоит в нахождении такого набора коэффициентов $\{c_0, c_1, \ldots, c_m\}$, который доставляет минимум норме вектора $\|r\|$. Если под нормой вектора понимать $\|r\| = \left(\sum_{k=0}^{n} r_k^2\right)^{1/2} = \sqrt{r_0^2 + r_1^2 + \ldots + r_n^2}$, то придем к задаче о наилучшем среднеквадратичном приближении.

Простейший подход к решению этой задачи – метод наименьших квадратов.

ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ НАИЛУЧШЕГО СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Наилучшее среднеквадратичное приближение функции, заданной таблицей своих значений, – способ аппроксимации функции, основанный на критерии минимума среднеквадратичного уклонения.

Наиболее простой подход к построению многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения состоит в составлении соответствующей нормальной системы метода наименьших квадратов (МНК) **S*coef = T** решением которой является вектор коэффициентов искомого многочлена **coef**.

В соответствии с этим подходом решим задачу построения многочленов наилучшего среднеквадратичного приближения первой и второй степени для функции, заданной таблицей своих значений

X	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0
Y	1.0	1.8	2.2	1.4	1.0

Требуется построить алгебраические многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения:
первой степени g1(x) = A1*x+B1
и второй степени g2(x) = A2*x^2+B2*x+C2.

Определить величину среднеквадратичного уклонения для g1(x) и g2(x) и построить графики многочленов.

Для решения задачи наилучшего среднеквадратичного приближения алгебраическими многочленами в системе MATLAB предназначены функции polyfit и polyval.

Функция polyfit(X,Y,n) находит **коэффициенты** многочлена степени n, построенного по данным вектора X, который аппроксимирует данные вектора Y в смысле наименьшего квадрата отклонения.

Функция polyval(V,s) вычисляет **значения** полинома, коэффициенты которого являются элементами вектора V, от аргумента s. Если s – вектор или матрица, то полином вычисляется во всех точках s.

В этом случае нахождение коэффициентов многочлена состоит в обращении к функции polyfit с соответствующими задаче аргументами:

```
coef1=polyfit(X,Y,1)          % коэффициенты многочлена
                              % первой степени
coef2=polyfit(X,Y,2)          % коэффициенты многочлена
                              % второй степени
```

Для построения графиков зададим вспомогательный вектор абсциссы xi, а затем с помощью функции polyval вычислим элементы векторов g1 и g2:

```
xi=min(X):0.1:max(X);
g1=polyval(coef1,xi);
g2=polyval(coef2,xi);
plot(X,Y,'*k',xi,g1,xi,g2);grid
```

Функция plot с указанными аргументами строит черными звездочками ('*k') табличные значения, синей кривой график многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения первой степени, красной – график многочлена наилучшего среднеквадратичного приближения второй степени.

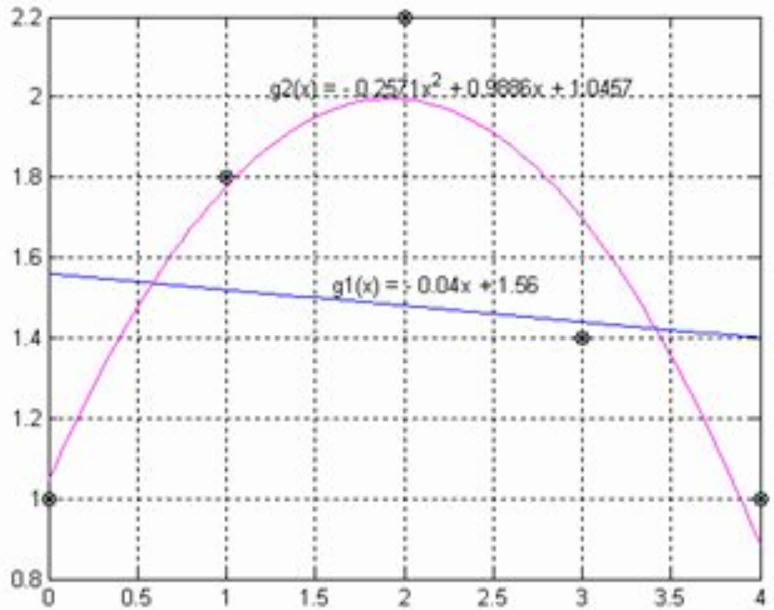

Рис.3. <ENTER>

Для того чтобы определить величину среднеквадратичного уклонения, вычислим суммы квадратов уклонений g1(x) и g2(x) от таблично заданной функции в узлах таблицы X:

```
G1=polyval(coef1,X);
G2=polyval(coef2,X);
```

```
delt1=sum((Y-G1).^2); delt1=sqrt(delt1/5)
delt2=sum((Y-G2).^2); delt2=sqrt(delt2/5)
```

Последние две строки можно заменить другими, если использовать функцию mean , вычисляющую среднее значение:

```
delt1=mean(sum((Y-G1).^2))
delt2=mean(sum((Y-G2).^2))
```

Задание к лабораторной работе 6 - 7:

1. Средствами системы MATLAB

а) построить интерполяционные многочлены 1-ой, 2-ой и 3-ей степени;

б) вычислить значения построенных многочленов в точке x^*;

в) оценить погрешность интерполирования;

г) построить графики многочленов.

2. Построить алгебраические многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения первой и второй степени с помощью функций системы MATLAB, предназначенных для решения задач приближения функций.

3. Построить графики полученных многочленов.

4. Определить величину среднеквадратичного уклонения для каждого из построенных многочленов.