



Подготовка экспертов для работы в региональной предметной комиссии при проведении итоговой аттестации по общеобразовательным программам основного общего и среднего общего образования

## Тема 2.

# Методика проверки и оценки алгебраических заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом (задания 21 и 22)

*Семенов Андрей Викторович*, к. пед. н, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «ФИПИ»

21

Решите неравенство  $(x - 7)^2 < \sqrt{11}(x - 7)$ .

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x - 7)(x - 7 - \sqrt{11}) < 0,$$

откуда  $7 < x < 7 + \sqrt{11}$ .

Ответ:  $(7; 7 + \sqrt{11})$ .

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	<i>Максимальный балл</i>

- Должны быть решения квадратных уравнений, а не просто записанные корни.
- Вывод «нет корней» должен сопровождаться вычислением отрицательного дискриминанта (выделением полного квадрата), кроме случая использования знака равносильности и совокупности. При равносильности ответ записывается в виде множества (за другой вид не снижать).
- Если используют обратную теорему Виета, то она должна быть прописана.
- Не снижать за то, что корни выписаны не в порядке возрастания.
- Если ввели подстановку и прописали ограничение на переменную неправильно – ошибка.

- Знак равносильности между разными переменными писать нельзя (разные множества).
- Ввели новую переменную, но не описали ее ограничение. Лишний корень при этом отбросили, сославшись на непрописанное ограничение, да еще может быть ответ не упрощен (сокращение) – 1 балл.
- Если в ответе корни не сокращены, но в процессе решения вся логика присутствует - 2 балла.
- Правильное логическое решение, корни верные, но при этом написана какая-нибудь глупость про переменные – это проблема с обоснованностью – 1 балл.

Решите уравнение  $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$ .

Ответ:  $1 - \sqrt{3}$ ;  $1 + \sqrt{3}$ .

$$\sqrt{21.} \quad (x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0.$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0.$$

$$D = 4 + 12 = 16 = 4^2$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & \end{matrix}$$

Ответ:  $1 + \sqrt{3}$ ;  $1 - \sqrt{3}$ .

$$(x-1)^4 = t^2$$

$$(x-1)^2 = t$$

$$(x-1)^2 = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 = 3.$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0.$$

$$D = 4 + 8 = 12 = 2\sqrt{3}$$

$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{3})}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$(x-1)^2 = -1$$

нет решений, т.к.  
квадрат не может  
быть отрицательным.

2  
балла

Решите уравнение  $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$ .

Ответ:  $1 - \sqrt{3}$ ;  $1 + \sqrt{3}$ .

2)  $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$  Пусть  $(x-1)^2 = t$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

пог. Виета пог. одр. г. Виета

$$t_1 + t_2 = 2$$

$$t_1 \cdot t_2 = -3$$

не удовлетворяет условию

$$t_1 = -1 \quad t_2 = 3$$

$$(x-1)^2 = t \quad t = 3$$

$$(x-1)^2 = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 + 8 = 12$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2}$$

Ответ:  $\frac{2 - 2\sqrt{3}}{2}$ ;  $\frac{2 + 2\sqrt{3}}{2}$

1 балл

Решите уравнение  $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$ .

Ответ:  $1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}$ .

№21.

$$\textcircled{1} \quad (x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$$

Пусть:  $(x-1)^2 = t$

Тогда:  $t^2 - 2t - 3 = 0$

$$a=1; b=-2; c=-3$$

$$D = 4 + 12 = 16;$$

$$t_1 = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{2-4}{2} = -1.$$

Ответ:  $0; 2, \frac{2+\sqrt{12}}{2}; \frac{2-\sqrt{12}}{2} \quad x(x-2) = 0;$   
 $x=0; x=2$

$$\textcircled{2} \quad 1) \quad (x-1)^2 = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D=12$$

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{12}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2-\sqrt{12}}{2}$$

$$2) \quad (x-1)^2 = -1$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

0  
баллов

21.

$$(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$$

Заменим:  $(x-1)^2 = t$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

$$t_1 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$t_2 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$(x-1)^2 = 3 \quad \text{или} \quad (x-1)^2 = -1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 3$$

корней нет

$$x^2 - 2x + 1 - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) = 4 + 8 = 12$$

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{12}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{12}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2}, x_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2}$$

Решите уравнение  $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$ .

Ответ:  $1 - \sqrt{3}$ ;  $1 + \sqrt{3}$ .

**2 балла**



521.

$$x^4 = (x-2)^2$$

$$x^4 - (x-2)^2 = 0$$

$$(x^2 - (x-2)) \cdot (x^2 + (x-2)) = 0$$

$$x^2 - (x-2) = 0$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

$$x-2 \neq 0; x \neq 2.$$

$$x^2 + (x-2) = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9 \quad \sqrt{D} = \sqrt{9} = 3$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Ответ: -2; 1.

**1 балл**

Расстояние между пристанями А и В равно 108 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 50 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение.

Плот проплыл 50 км, значит, он плыл 10 часов, из которых лодка находилась в пути 9 часов. Пусть скорость лодки в неподвижной воде равна  $v$  км/ч, тогда

$$\frac{108}{v+5} + \frac{108}{v-5} = 9; 108v - 540 + 108v + 540 = 9v^2 - 225; v^2 - 24v - 25 = 0,$$

откуда  $v = 25$ .

Ответ: 25 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	<i>Максимальный балл</i>

- Обращать внимание на единицы измерения переменных! Если их нет (т.е. нет вообще нигде в процессе решения, а не частично – у одной из трех переменных), но ответ верный - 1 балл.
- При работе с дробно-рациональным уравнением должно быть прописано, что знаменатель не равен нулю! – если нет, то 1 балл при верном ответе.
- Уравнение составлено неправильно – 0 баллов.
- Отбор корней должен быть обоснованный.
- Если дробно-рациональное уравнение получено из системы, то снижать балл из-за не прописанного ОДЗ не надо.

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

№22

$$\begin{array}{l|l|l} v & t & S \\ \hline x-4 \text{ км/ч} & \frac{77}{x-4} & 77 \text{ км} \\ \hline x+4 \text{ км/ч} & \frac{77}{x+4} & 77 \text{ км} \end{array}$$

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} = 2$$

$$77(x+4) - 77(x-4) = 2(x^2 - 16)$$

$$77x + 308 - 77x + 308 = 2x^2 - 32$$

$$616 = 2x^2 - 32 \quad | : 2$$

$$308 = x^2 - 16$$

$$324 = x^2$$

$$x = \pm 18$$

Ответ: 18 км/ч

1 балл

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

№22 Пусть  $x$  —  $v$  лодки (км/ч)  
 тогда  $x+4$  —  $v$  по течению (км/ч)  
 $x-4$  —  $v$  против течения (км/ч)

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} = 2$$
~~$$\frac{77(x+4) - 77(x-4)}{(x-4)(x+4)} = 2$$~~

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} - 2 = 0$$

$$\frac{77(x+4) - 77(x-4) - 2(x^2-16)}{(x-4)(x+4)} = 0 \quad \text{O.D.З.: } \begin{matrix} x \neq 4 \\ x \neq -4 \end{matrix}$$

$$77x + 308 - 77x + 308 - 2x^2 + 32 = 0$$

$$-2x^2 + 32 + 616 = 0$$

$$2x^2 = 648$$

$$x^2 = 324$$

$x_1 = 18 \quad x_2 = -18$  (не подходит по смыслу)

18 км/ч —  $v$  лодки

Ответ: 18 км/ч

**2 балла**

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. ¶  
**Ответ:** 18 км/ч. ¶

	$v$	$t$	$S$
по теч	$x+4$	$\frac{77}{x+4}$	77
пр теч	$x-4$	$\frac{77}{x-4}$	77

№22

составим уравнение:

$$\frac{77}{x-4} - \frac{77}{x+4} = 2$$

$$\frac{77(x+4) - 77(x-4) - 2(x^2-16)}{x^2-16} = 0$$

ОДЗ:  $x \neq 4$ ;  $x \neq -4$

$$77(x+4) - 77(x-4) - 2(x^2-16) = 0$$

$$77 \cdot 8 - 2x^2 + 32 = 0$$

$$616 - 2x^2 + 32 = 0$$

$$2x^2 - 648 = 0$$

$$x^2 = 324$$

$$x_1 = 18$$

$$x_2 = -18$$

Ответ: 18

**1 балл**

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

N22

$$S = 77$$

$t_{\text{по т}} < t_{\text{прот}} + 2$

$$V_{\text{прот}} = 4 \text{ км/ч}$$

$$V_{\text{л}} = ?$$

Решение:

Пусть  $x = V_{\text{л}}$  тогда  $x + 4 = V_{\text{прот}}$ ,  $x - 4 = V_{\text{по т}}$

$$\frac{77}{x+4} + 2 = \frac{77}{x-4} \quad x(x+4)(x-4) \quad \text{Смотрим на обороте}$$

$$77x - 308 + 2x^2 - 32 - 77x - 308 = 0$$

$$2x^2 - 648 = 0$$

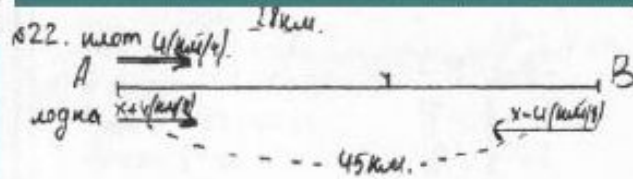
$$x^2 - 324 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{324}$$

$$x_1 = 18 \quad x_2 = -18 \text{ не подходит по условию}$$

Ответ 18 км/ч

1 балл



Расстояние между пристанями А и В равно 45 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 28 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 16 км/ч.

$\frac{28}{4} (ч)$  - время, за которое проплыл плот 28 км по течению реки.

$\frac{45}{x+4} (ч)$  - время, за которое проплыла лодка по течению реки (из А в В)

$\frac{45}{x-4} (ч)$  - время, за которое проплыла лодка против течения реки (из В в А).

$\frac{45}{x+4} + \frac{45}{x-4} (ч)$  - время, за которое проплыла лодка движась по течению реки и движась против течения реки (из А в В и из В в А)

$\frac{28}{4} - 1 (ч)$  - время, которое затратила лодка движась из А в В и из В в А.

Составим уравнение:

$$\frac{45}{x+4} + \frac{45}{x-4} = \frac{28}{4} - 1$$

$$\begin{aligned} x-4 > 0 \\ x > 4 \end{aligned}$$

$$\frac{45}{x+4} + \frac{45}{x-4} = 6$$

$$\frac{45x-4}{x+4} + \frac{45x+4}{x-4} - 6 = 0$$

$$\frac{45(x-4) + 45(x+4) - 6(x^2-16)}{(x+4)(x-4)} = 0$$

$$45x - 180 + 45x + 180 - 6x^2 - 6 \cdot (-16) = 0$$

$$-6x^2 + 90x + 96 = 0 \quad | :(-6)$$

$$x^2 - 15x - 16 = 0$$

$$D = (-15)^2 - 4 \cdot (-16) = 225 + 64 = 289$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{289} = 17$$

$$x_1 = \frac{15+17}{2} = \frac{32}{2} = 16 \quad x_2 = \frac{15-17}{2} = \frac{-2}{2} < 0$$

Ответ: 16 (км/ч) скорость лодки в неподвижной воде.

2 балла

© Все права защищены



Работа 15

Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

$S = t \cdot v$  N22

A ————— B  
77 км

x — время, кот. шла лодка по течению  $\Rightarrow$  x+2 — против течения  
y — скорость лодки в неподвижной воде.

$$\begin{cases} 77 = (4+y) \cdot x \\ 77 = (y-4)(x+2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{77}{4+y} \\ x = \frac{77}{y-4} \cdot 2 \end{cases}$$

$$\frac{77}{4+y} = \frac{77}{y-4} - 2$$

$$\frac{77}{4+y} = \frac{77-2y+8}{y-4}$$

$$77(y-4) = (77-2y+8)(4+y)$$

$$77y - 308 = 308 + 77y - 8y - 2y^2 + 32 + 8y$$

$$2y^2 - 648 = 0$$

$$2y^2 - 648 = 0 \quad | :2$$

$$y^2 - 324 = 0$$

$$D = 4 \cdot 324 = 1296 \quad \sqrt{D} = 36$$

$$y_1 = \frac{36}{2} = 18$$

$$y_2 = \frac{-36}{2} = -18 \text{ — не подходит т.к. скорость } > 0$$

Ответ: 18 км/ч

2 балла

## Логические ошибки (0 баллов):

- Перенос слагаемого из одной части уравнения в другую и при этом знак не изменили.
- При расчете корней квадратного уравнения внесено неправильное значение коэффициента:

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$D = 4 + 4 = 8$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{2})}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } 2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}$$

- При расчете корней квадратного уравнения неправильно сокращена дробь:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} (x-1)^2 &= 3 \\ x^2 - 2x + 1 &= 3 \\ x^2 - 2x - 2 &= 0 \\ D &= 4 + 4 \cdot 2 \cdot 1 \\ D &= 4 + 8 = 12 \\ \sqrt{D} &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ x_1 &= \frac{2 + 2\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \\ x_2 &= \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

## Вычислительные ошибки(1 балл):

- Отсутствуют промежуточные расчеты, а в итоговом числе после упрощения не то значение:

Ответ: 52,8 км/ч

522  
x - все путь (км)

	s	v	t
I	$\frac{x}{2}$ км	36 км/ч	$\frac{x}{72}$ ч
II	$\frac{x}{2}$ км	99 км/ч	$\frac{x}{198}$ ч

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_{\text{вс}}}{t_{\text{вс}}} = \frac{\frac{1}{2}x}{\frac{x}{72} + \frac{x}{198}} = \frac{729}{15} = 48,6 \text{ км/ч}$$

792

Ответ 48,6 км/ч

Задача решена  
1 балл

Подготовка экспертов для работы в региональной предметной комиссии при проведении итоговой аттестации по общеобразовательным программам основного общего и среднего общего образования

## Тема 3.

# Методика проверки и оценки геометрических заданий повышенного уровня сложности с развернутым ответом (задания 24 и 25)

*Семенов Андрей Викторович*, к. пед. н, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «ФИПИ»

24

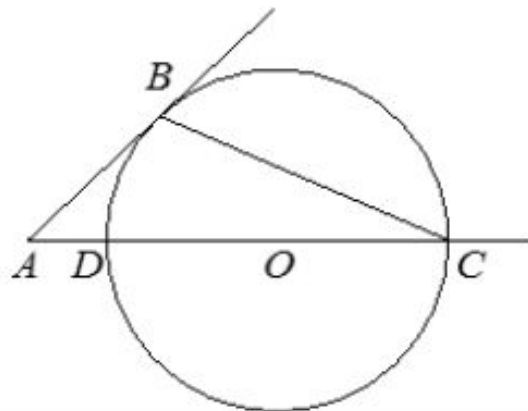
Окружность с центром на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  проходит через вершину  $C$  и касается прямой  $AB$  в точке  $B$ . Найдите  $AC$ , если  $AB = 8$ , диаметр окружности равен  $3,6$ .

**Решение.**

Пусть  $AC = x$ . Тогда по свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем:

$$AB^2 = AC(AC - CD); 64 = x(x - 3,6), \text{ откуда} \\ x = 10.$$

**Ответ:** 10.



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

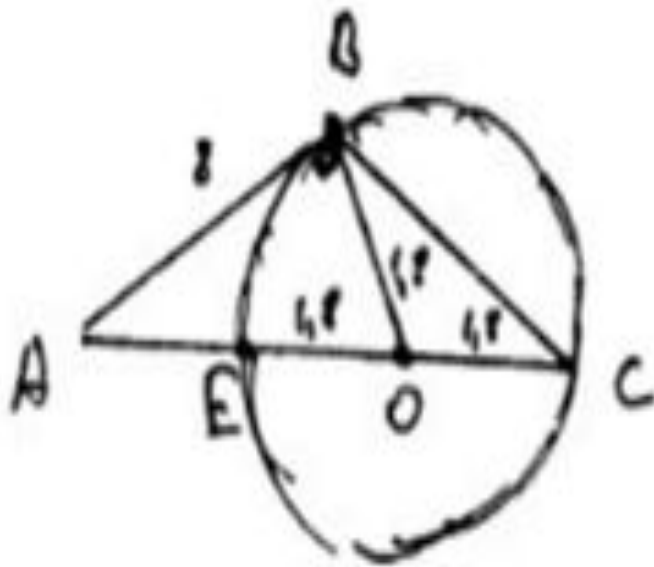
- Все признаки и свойства должны быть четко прописаны.
- «Если две прямые пересекаются третьей и есть два равных угла, то прямые параллельны» - данное утверждение ошибочно.
- Четко прописаны названия углов, указаны параллельные прямые и секущая.
- Если есть описание равных углов в решении, но нет на чертеже – баллы не снижать.
- Накрестлежащие и внутренние накрестлежащие – эти оба термина правильные.

- Утверждение о том, что «биссектриса параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник», не прописано отдельным свойством в учебниках, которые используются в массовом обучении. Оно есть в Мерзляке (менее 8%), но он не массовый, поэтому такие утверждения должны быть доказаны или очень четко сформулированы. Фразы вида: «Т.к. это биссектриса в параллелограмме, то треугольник равнобедренный» - это необоснованное решение.
- Если не указаны параллельные прямые и секущая — минус 1 балл за необоснованность.



- Не придирайтесь к словам: признак, свойство (дети их часто путают), если формулировка прописана верно.
- Если используем математический знак подобия между треугольниками, то обращаем внимание на последовательность букв и снижаем балл. Если в свободном тексте указывают два треугольника, то буквы могут иметь любую последовательность

- Нет логических ошибок, нет вычислительных ошибок, но забыли упомянуть об использовании теоремы Пифагора – не снижать.
- По свойству касательной – запись допустима и балл не снижать.



если  $AB = 8$ , диаметр  
 Ответ: 10.

Пусть  $O$  – центр  
 данной окружности  
 $\angle ABO = 90^\circ$  по свойству касат.

- В задании снижен 1 балл за 3 пункт – в скобках не объяснение, а комментарий.

24

Дано:

$\omega(O; R)$  – окружность

AB – хорда

CD – хорда

AB = 14

CD = 48

$OH \perp AB$

$OH_1 \perp CD$

$OH = 24$

---

$OH_1 = ?$

---

углышка)  $\Rightarrow AH = \frac{14}{2} = 7$

1)  $AO = OB = OC = OD$  (радиусы)

2) из п. 1  $\Rightarrow \triangle AOB$  и  $\triangle COD$  – равнобедренные

3) из п. 2  $\Rightarrow OH$  и  $OH_1$  – медианы (высоты, проведенные к основанию равнобедренного треугольника)  $\Rightarrow AH = \frac{14}{2} = 7$

Окружность с центром на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  проходит через вершину  $C$  и касается прямой  $AB$  в точке  $B$ . Найдите  $AC$ , если  $AB = 8$ , диаметр окружности равен  $3,6$ .

Ответ: 10.

$$\sqrt{24}$$

Пусть  $O$  — центр окр.  $O$ ;  
 $AC$  и окружность  $O$  пересекаются в точках  $D$  и  $C$

$$\Rightarrow OD = OC = OB = R = 3,6/2$$

$\angle OBA = 90^\circ$  т.к.  $AB$  кас.  $\Rightarrow$

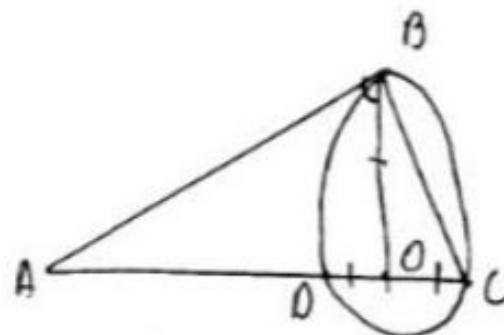
по теореме Пифагора  $AO^2 = AB^2 + BO^2 = 8^2 + \left(\frac{3,6}{2}\right)^2 = 64 + 3,24 = 67,24 \Rightarrow$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{67,24} + 3,6$$

Ответ:  $AC = 11,8$

$$= 8,2 + 3,6 = 11,8 \Rightarrow AC = 8,2 + 3,6 = 11,8$$

Ответ:  $AC = 11,8$

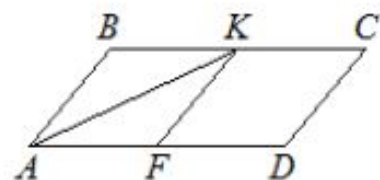


0  
баллов

- 25 Сторона  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  вдвое больше стороны  $AB$ . Точка  $K$  — середина стороны  $BC$ . Докажите, что  $AK$  — биссектриса угла  $BAD$ .

**Доказательство.**

Проведём прямую  $KF$  параллельно стороне  $AB$  (см. рисунок). Поскольку  $BK = KC = AB$ , параллелограмм  $ABKF$  является ромбом, поэтому диагональ  $AK$  ромба  $ABKF$  делит угол  $BAF$  пополам. Значит,  $AK$  — биссектриса угла  $BAD$ .



Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	Максимальный балл

- Знак следования позволяет подробно не расписывать виды углов и секущие с параллельными прямыми.
- В задании ниже 2 балла – присутствует описка, которая не влияет на ход рассуждения и ответ.

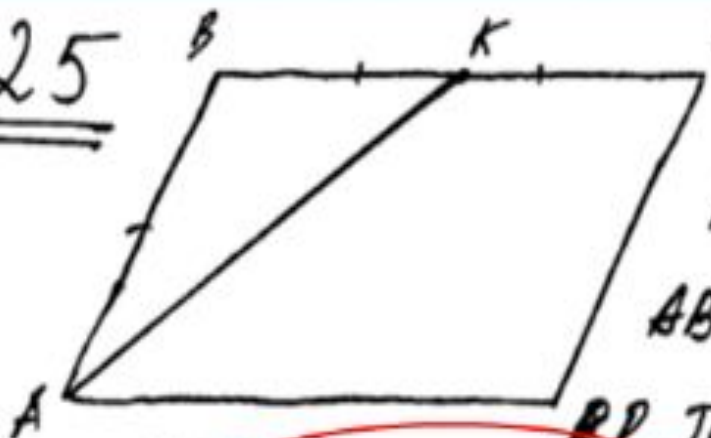
125

Пусть  $AB = a \Rightarrow BC = 2a \Rightarrow BK = a \Rightarrow \triangle ABK \text{ рб} \Rightarrow$   
 $\angle BAK = \angle BKA = \alpha \Rightarrow \angle ABK = 180 - 2\alpha$   
 т.к.  $BC \parallel AD \Rightarrow \angle BAK + \angle ABK = 180 \Rightarrow \angle BAK = 2\alpha \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle KAD = \alpha \Rightarrow \angle BAK = \angle KAD \Rightarrow AK \text{ бис. } \angle BAD$

□

- Прописано равенство сторон треугольника и без дополнительных пояснений равенство углов, не снижаем – 2 балла.

N25



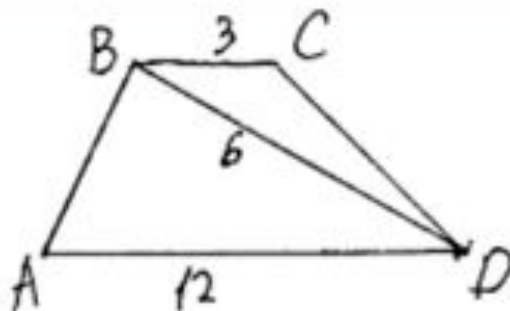
Пусть  $\angle AVK = \alpha$ , тогда  $\angle AVD = \alpha$ ,  
 $\angle BAD = \angle BCD = 180 - \alpha$ , так как  
 $ABCD$  – параллелограмм.  $AB = BK$   
 Значит  $\angle BAK = \angle BKA = (180 - \alpha) : 2 = 90 - \frac{1}{2}\alpha$ . Значит Тогда  
 $\angle KAD = 180 - \alpha - (90 - \frac{1}{2}\alpha) = 90 - \frac{1}{2}\alpha$  Значит  $\angle KAD = \angle BAK$   
 Тогда  $AK$  – биссектриса  $\angle BAD$ .


- 1 балл – неправильная формулировка признака в скобках, а именно угол между пропорциональными сторонами. Об угле между сторонами нигде в задаче не указано.

№ 25  
 Дано:  
 ABCD – трап.  
 BC || AD  
 BC = 3  
 AD = 12  
 BD = 6

Т.г.:  
 $\triangle CBD \sim \triangle BDA$

(сторонам)



1)  $\angle BDA = \angle CBD$  (т.к.  $n_1$    $n_2$ )

BC || AD и секущей BD)

2)  $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC}$  ( $\frac{12}{6} = \frac{6}{3}$ )

3) Из п.1 и п.2  $\Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle BDA$

(по равному углу и 2 соответственным

сторонам)



## Логические ошибки – 0 баллов:

- При сложении двух отрезков вместо радиуса используют значение диаметра.
- Работая с теоремой Пифагора забыли квадрат:

если  $OC = 1,8$ .  $AO$  – гипотенуза  $\triangle ABO$ , значит  $AO =$   
 $= 1,8^2 + 8^2 = 64 + 3,24 = 67,24$ . Значит  $AC = 67,24 + 1,8 =$   
 $= \cancel{67} 68,04$ , так как  $AO + OC = AC$ . Ответ: 68,04.

## Тема 4.

Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом высокого уровня сложности (задания 23 и 26).

Согласование подходов к проверке заданий с развернутым ответом

*Семенов Андрей Викторович, к. пед. н, ведущий научный сотрудник ФГБНУ «ФИПИ»*

Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

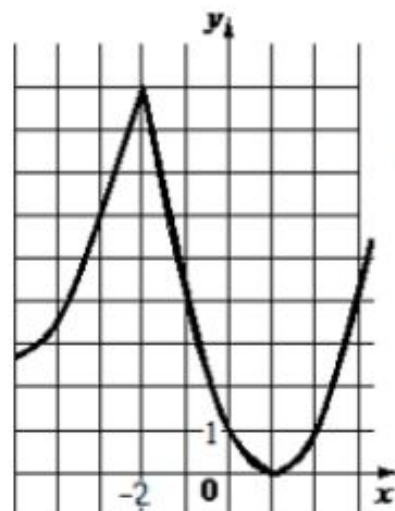
и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки.

**Решение.**

Построим график функции  $y = -\frac{18}{x}$  при  $x < -2$  и график функции  $y = x^2 - 2x + 1$  при  $x \geq -2$ .

Прямая  $y = m$  имеет с графиком одну или две общие точки при  $m = 0$  и при  $m \geq 9$ .

**Ответ:**  $0; [9; +\infty)$ .



Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

- Если функция задана кусочно, то граничная точка должна быть подставлена и прописана в таблице у обеих функций. Иначе 0б.
- Точки, по которым идет построение, должны быть видны на графике.
- Должно быть (желательно) подробное описание построения графика: название (гипербола, парабола), найдены координаты вершины, указаны направление ветвей.
- При отборе параметра, на графике должно быть изображено несколько горизонтальных линий, прописаны все случаи параметра. Параметр – это исследование, а не устный ответ.

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x} & ; \text{при } x < -2 \end{cases}$$

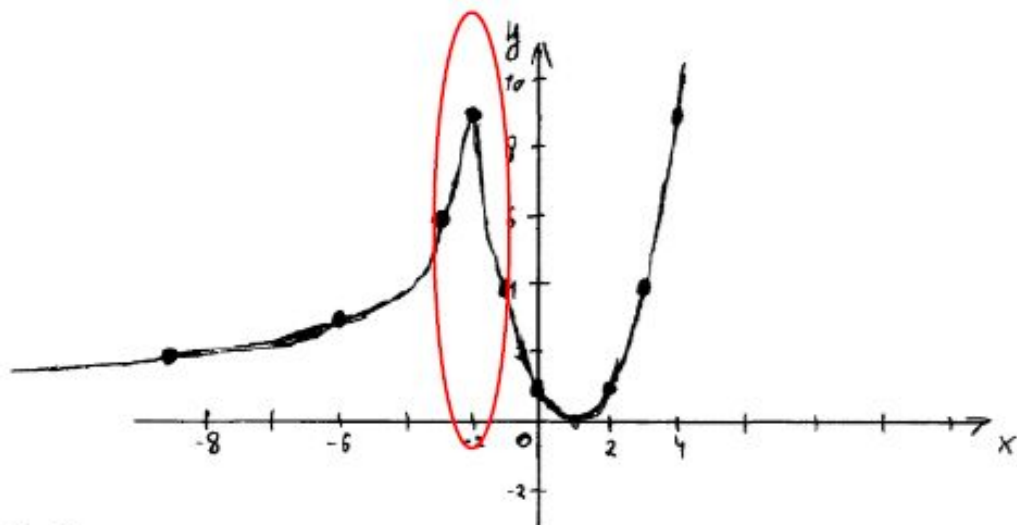
$$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \quad y = 1 - 2 + 1 = 0$$

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	1	4	9

$$y = x^2 - 2x + 1 ; \text{при } x \geq -2$$

x	-3	-4	-6	-9
y	2	3	6	9

$$y = -\frac{18}{x} , \text{при } x < -2$$



Ответ: при  $m = 0$  и  $m \in [9; +\infty)$

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

2	График верно, найлены значения	построен верно искомые параметра
1	График верно, найлены значения	построен но искомые параметра найлены неверно или не найлены

**0 баллов**

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{18}{x}, & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

$$1) y = x^2 - 2x + 1$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$$

$(1; 0)$  - вершина

x	2	3	4
y	1	4	9

x	0	-1	-2
y	1	4	9

$$2) y = -\frac{18}{x}$$

x	3	6	2
y	-6	-3	-9

x	-3	-6	-2
y	6	3	9

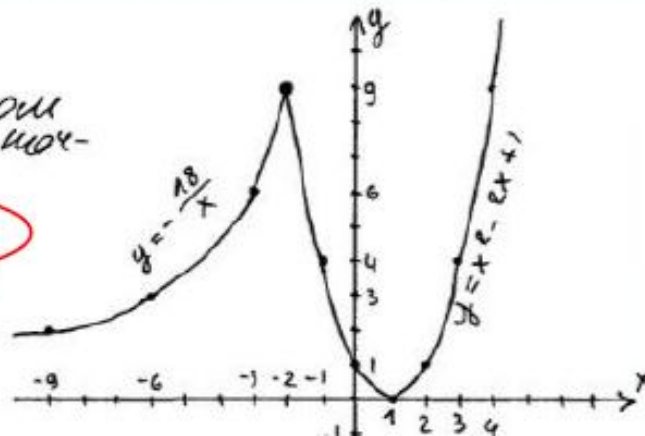
$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{если } x \geq -2, \\ -\frac{18}{x}, & \text{если } x < -2, \end{cases}$$

$$y = m$$

$m$  - ? (имеет с графиком одну или две общие точки)

$$m = 0; [9; +\infty)$$

Ответ:  $0; [9; +\infty)$  -  $m$



2	График построен верно, найдены значения параметра	построен верно, найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но значения параметра найдены неверно или не найдены	построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены

**1 балл**

$$y = |x^2 + 2x - 3|$$

Плоскост

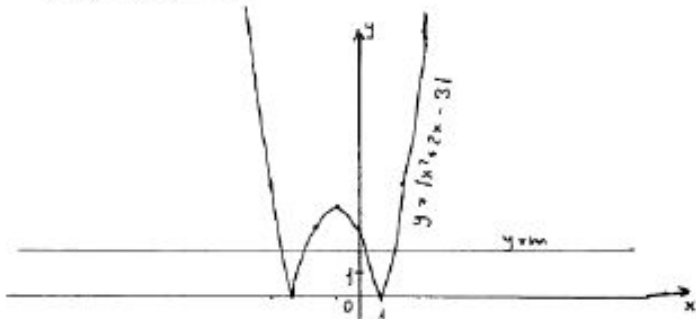
$$y = x^2 + 2x - 3$$

$$1) x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$y_0 = 1 - 2 - 3 = -4$$

2) <sup>Ключевые моменты</sup>  $(0, -3), (1, 0), (-3, 0)$

x	-2	-1	0	-1
y	5	-3	12	-3



3) <sup>График функции</sup>  $y = mx$

имеет (точечки от  $y = |x^2 + 2x - 3|$ )

1) 0 общих точек при  $m \in (-\infty, 0)$

2) 2 общие точки при  $m = 0$

3) 4 общие точки при  $m \in (0, 4)$

Ответ 4

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{2} = 1$$

$$x = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

23 Постройте график функции  $y = |x^2 + 2x - 3|$ . Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

**Решение.**

Построим график функции  $y = x^2 + 2x - 3$  при  $x < -3$  и  $x > 1$  и график функции  $y = -x^2 - 2x + 3$  при  $-3 \leq x \leq 1$ .

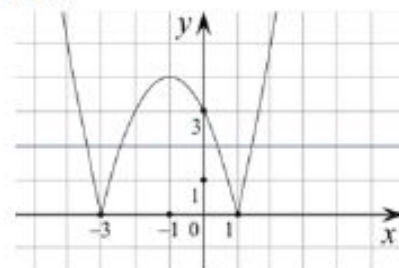


График данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс, 0, 2, 3 или 4 общие точки.

Ответ: 4.

**Задача не решена  
0 баллов**

№23

Решение

Построим график функции  $y = |x^2 - 4x + 3|$ . Графиком является парабола,  $a = 1 > 0$  (ветви направлены вверх)

Чтобы построить график функции  $y = |f(x)|$  можно построить параболу, часть графика, лежащую выше оси  $Ox$  сохранить, а лежащую ниже оси  $Ox$  отобразить над осью  $Ox$ .

Найдём вершину параболы  $x_0; y_0$   $x_0 = -\frac{b}{2a}$ .  $x_0 = \frac{4}{2} = 2$

$y_0 = 2^2 - 8 + 3 = -1$  (2; -1) - вершина

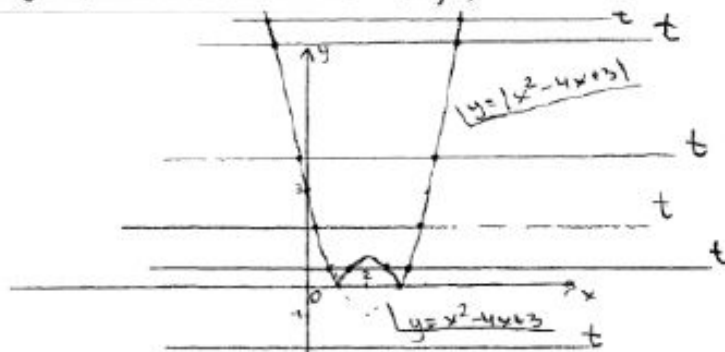
$Oy$ :  $0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$  (0; 3)

$Ox$ :  $x^2 - 4x + 3 = 0$

$D = 16 - 12 = 4$

$x_1 = \frac{4+2}{2} = 3$   $x_2 = \frac{4-2}{2} = 1$  (3; 0); (1; 0)

$y(5) = 5^2 - 5 \cdot 4 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$  (5; 8)



Проведём прямые, параллельные оси абсцисс. Назовём их прямой  $t$  и отметим её точки пересечения с графиком  $y = |x^2 - 4x + 3|$

Ответ: 4 общих точки

Постройте график функции

$y = |x^2 - 4x + 3|$ .

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

2	График построен верно, найдены значения параметра	построен верно, найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но найдены неверно или не найдены значения параметра	построен неверно, искомые значения параметра не найдены

2 балла



На стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  ( $AB \neq AC$ ) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту  $AD$  в точке  $M$ ,  $AD = 9$ ,  $MD = 3$ ,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Найдите  $AH$ .

**Решение.**

Пусть окружность с диаметром  $BC$  вторично пересекается с прямой  $AC$  в точке  $K$  (см. рис.). Поскольку  $BK$  — высота остроугольного треугольника  $ABC$ , точка  $K$  лежит на стороне  $AC$ .

Продолжим высоту  $AD$  за точку  $D$  до пересечения с окружностью в точке  $Q$ . Тогда  $DQ = MD = 3$ .

По следствию из теоремы о касательной и секущей

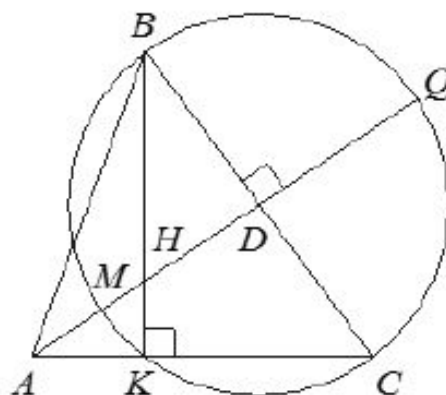
$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = (AD - MD) \cdot (AD + MQ) = 6 \cdot 12 = 72.$$

Из подобия прямоугольных треугольников  $AHК$  и  $ADC$  следует, что

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC}, \text{ откуда } AK \cdot AC = AD \cdot AH = 9AH.$$

Значит,  $9AH = 72$ . Следовательно,  $AH = 8$ .

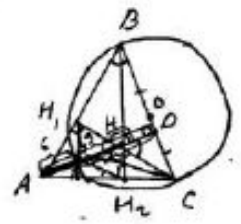
**Ответ:** 8.



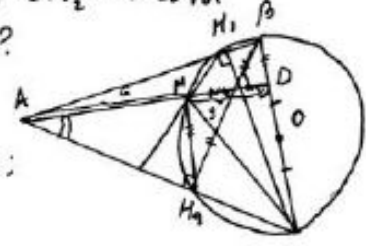
Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	Максимальный балл

На стороне  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  ( $AB \neq AC$ ) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту  $AD$  в точке  $M$ ,  $AD=9$ ,  $MD=3$ ,  $H$  — точка пересечения высот треугольника  $ABC$ . Найдите  $AH$ . **Ответ: 8.**

~20



Дано:  
 $\triangle ABC$ ;  $\odot$  — описанная  
 $BC = d$   
 $AB = 9$   $MD = 3$   
 $H$  — точка пересечения высот  
 $AD$ ;  $CF$ ;  $BE$  — высоты  
 Найти:  $AH = ?$



Решение:

$\triangle ABC$  — данный треугольник;  
 $BC$  — диаметр окружности  $\odot$ .  
 $AD = 9$ ;  $MD = 3$   
 $AH = AD - MD = 9 - 3 = 6$  (по аксиоме излучения отрезков).

Доп. Построения.  
 Построить отрезок  $HC$ .  
 Рассмотрим  $\triangle ANH_1$  и  $\triangle DCH_2$ .

они подобны по 1-ому признаку подобия треугольников.

Значит  $k = \frac{AD}{DC} = \frac{AH_1}{CH_2} = \frac{AB}{BC}$

$k = \frac{9}{DC} = \frac{AH_1}{3} = \frac{AB}{BC} = k$

Пусть  $MH = x$  см  $x > 0$ , тогда  $AH = x + 6$  см.  
~~Рассмотрю  $\triangle ABD$  и  $\triangle ACH_1$~~   
~~они подобны, значит  $k = 1,5$ .~~  
 Рассмотрим  $\triangle HBD$  и  $\triangle HH_2H$ .  
 Они равны по 1-ому признаку равенства  $\triangle$ .  
 ( $\angle HNH_2 = \angle BHC$  как вертикальные)  
 ( $H_2H = BH$ ;  $H_1H = CH$ )  
 Следовательно  $MD = HH_1 + HD = 3 : 2 = 1,5$ .  
 $AH = AM + MH$ .  
 $6 + 1,5 = 7,5$  (по аксиоме излучения отрезков)  
**Ответ: 7,5 см.**

**0 баллов**

В подобии треугольников неверно составлено соотношение.

26. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M,  $AD = 9$ ,  $MD = 3$ , H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Дано:  
 $AD = 9$   
 $MD = 3$

Найти. AH

Решение

$\triangle CAD \sim \triangle CFB$  (по 3 углам)  $\angle C$ -общ.

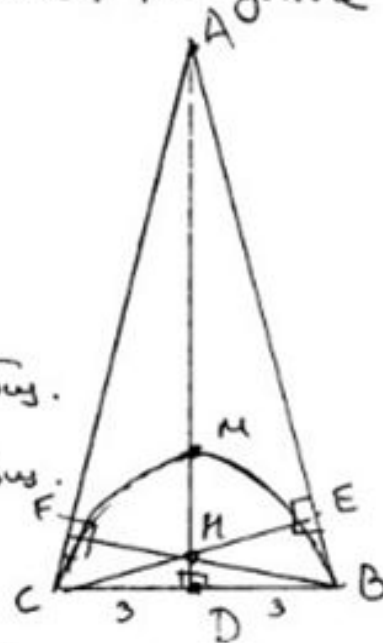
$\triangle CFB \sim \triangle BHD$  (по 3 углам)  $\angle B$ -общ.

следовательно  $\triangle CAD \sim \triangle BHD$

$CD = BD = MD = 3$  (так как радиусы)

$$K = \frac{9}{3} = 3 \quad \angle HD = CD \quad HD = \frac{CD}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$AH = AD - HD = 9 - 1 = 8 \quad \text{Ответ: } AH = 8$$

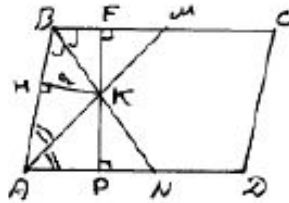


**0 баллов – ошибочное утверждение, что D середина CB.**

526

Дано  $ABCD$  - паралл.,  $KH$  - высота,  
 $AM$  - бисс.,  $BN$  - бисс.,  $BC=12$ ,  $KH=9$   
Найдите  $S$  ?

Решение 1) Докажем что  $KF \perp BC$ ,  $KP \perp AD$



2) Р-м  $\triangle HBK$  и  $\triangle BFK$

$\triangle HBK$  и  $\triangle BFK$  - прямоугольные  
 $BK$  - общ.  
 $BN$  - бисс.  $\Rightarrow \angle HBK = \angle KBF$

$\Rightarrow \triangle HBK = \triangle BFK$  (по острым углам и стороне)  $\Rightarrow$  (синусификация)

$\Rightarrow KP = BK = KH = 9$

3) Р-м  $\triangle AKM$  и  $\triangle AKP$

$\triangle AKM$  и  $\triangle AKP$  - прямоугольные  
 $AK$  - общ.

$\Rightarrow \triangle AKM = \triangle AKP$  (по острым углам и гипотенузе)  $\Rightarrow$

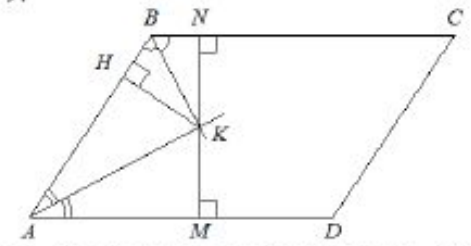
$\Rightarrow KP = KH = 9$

$\left. \begin{matrix} KP=9 \\ KF=9 \end{matrix} \right\} \Rightarrow FP=18$   
 $BC=12$   $\Rightarrow S = ah = 18 \cdot 12 = 216$  Ответ 216

Почему  $FP$  -  
высота  
трапеции?

26 Биссектрисы углов  $A$  и  $B$  параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $K$ .  
Найдите площадь параллелограмма, если  $BC=12$ , а расстояние от точки  $K$  до  
стороны  $AB$  равно 9.

Решение.  
Пусть  $KH$ ,  $KN$  и  $KM$  — перпендикуляры, опущенные из точки  $K$  к сторонам  
 $AB$ ,  $BC$  и  $AD$  соответственно (см. рис.). Тогда по свойству биссектрис  
 $KM = KH = KN = 9$ .



Кроме того, точки  $M$ ,  $K$  и  $N$  лежат на одной прямой и  $MN = MK + KN = 18$  —  
высота параллелограмма  $ABCD$ .  
По формуле площади параллелограмма находим  $S_{ABCD} = BC \cdot MN = 12 \cdot 18 = 216$ .  
Ответ: 216.

Задача решена  
1 балл



*Указания к тренингу.*

Внимательно читайте задание и  
отвечайте на поставленный вопрос.

Успехов!

**bliliy@yandex.ru**