Введение в теорию множеств

1. Основные определения, терминология

Под *множеством A* мы понимаем совокупность объектов произвольной природы, объединенных общим свойством *P(x)*.

Обозначение

$$A = \{x | P(x)\}.$$

Читается:

"A есть множество x, таких, что P(x)".

Пример 1

$$B = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

Легко заметить, что множество состоит из двух чисел: 1 и 2.

Определение 1

Множество A называется *подмножеством* B, если для любого x ($x \in A \to x \in B$)

Обозначение:

$$A \subseteq B$$

Другими словами, символ "$A \subseteq B$" есть сокращение для высказывания $(x \in A \to x \in B)$

Теорема 2

Для любых множеств *A, B, C* верно следующее:

а) $A \subseteq A$;

б) $A \subseteq B$ и $B \subseteq C \to A \subseteq C$.

Доказательство

Для доказательства а) надо убедиться в истинности высказывания $(x \in A \to x \in A)$, но оно очевидным образом истинно, так как представляет собой импликацию, в которой посылка и заключение совпадают.

Для доказательства б) надо убедится в истинности высказывания

$$(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in C) \to (x \in A \to x \in C)$$

Обозначим: "$x \in A$" через U, "$x \in B$" через V , "$x \in C$" через . Тогда надо убедиться в истинности высказывания .

Упростим это высказывание:

$$F = (U \to V) \wedge (V \to Z) \to (U \to Z) =$$

$$= \left(\overline{U} \cdot \overline{V} \vee \overline{U} \cdot Z \vee VZ\right) \to \left(\overline{U} \vee Z\right) =$$

$$= \overline{\overline{U}\,\overline{V} \vee \overline{U} Z \vee VZ} \vee \overline{U} \vee Z =$$

$$= (U \vee V)\left(U \vee \overline{Z}\right)\left(\overline{V} \vee \overline{Z}\right) \vee \overline{U} \vee Z =$$

$$= \left(U \vee VU \vee U\overline{Z} \vee V\overline{Z}\right)\left(\overline{V} \vee \overline{Z}\right) \vee \overline{U} \vee Z =$$

$$= \left(U \vee V\overline{Z}\right)\left(\overline{V} \vee \overline{Z}\right) \vee \overline{U} \vee Z =$$

$$= U\overline{V} \vee U\overline{Z} \vee V\overline{Z} \vee \overline{U} \vee Z =$$

$$= \left(U\overline{V} \vee \overline{U}\right) \vee \left(U\overline{Z} \vee Z\right) \vee V\overline{Z} =$$

$$= \overline{V} \vee \overline{U} \vee U \vee Z \vee V\overline{Z} = \mathbf{1}.$$

Конечно, теорема 2 интуитивно очевидна, но если мы, кроме очевидности, стремимся еще и к строгости, то приходится проделывать непростые логические вычисления. Доказательство этой теоремы является неплохим упражнением по алгебре высказываний.

Определение 3

Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов $(A=B)$. Другими словами, обозначение $A=B$ служит сокращением для высказывания

$$(x \in A \leftrightarrow x \in B).$$

Если множество A конечно и состоит из элементов $a1, a2, \ldots, an$, то пишем:

$A=\{a1, a2, \ldots, an\}$.

Иногда подобное обозначение распространяется и на некоторые бесконечные множества. Так,

$N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$

$Z=\{\ldots,-n,\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$.

Вопрос

Можно ли подобным образом записать множество Q рациональных чисел? А множество R вещественных чисел?

Вернемся к определению равенства множеств

Пример 1

$\{a, b, c, d\} = \{c, d, a, b\}$.

Пример 2

$\{a, b, c, d\}$ $\{a, c, b\}$.

Пример 3

$\{x|x2\text{-}3x+2=0\} = \{1,2\}$.

Теорема 4

Для любых множеств A и B $A=B$ тогда и только тогда, когда

$A \subseteq B$ и $B \subseteq A$

Доказательство

Доказательство этого факта основано на том, что эквивалентность $X \leftrightarrow Y$ равносильна конъюнкции двух импликаций $(X \to Y) \wedge (Y \to X)$.

Таким образом, для того, чтобы доказать равенство множеств A и B, надо доказать два включения: $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, что часто используется для доказательства теоретико-множественных равенств.

Определение 5

$A \subset B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $A \neq B$.

Теорема 6

Для любых множеств A, B, C, если $A \subseteq B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$

Доказательство

Доказать самостоятельно.

Определение 7

Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента, то есть x не принадлежит этому множеству (для любого x). Обозначение: $\varnothing$.

Отметим, что понятия элемента и множества довольно условны. Один и тот же объект в одной ситуации может выступать как элемент, а в другой – как множество.

Например, N, Z, Q, R – числовые множества, но в множестве $A=\{N, Z, Q, R\}$ каждое из них является элементом четырехэлементного множества A. В этом отношении достаточно привлекательным является множество $x=\{\varnothing\}$. Отметим, что $\varnothing \in X$ и $\varnothing \subseteq X$ одновременно. В связи с этим возникает следующая

Задача 1

Существует ли объект X, такой, что $X \in X$?

2. Операции объединения и пересечения

Определение 1

Объединением двух множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Другими словами, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$ (теоретико-множественной операции *"объединение"* соответствует логическая операция *"или"*).

Пример

Пусть $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, тогда $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$.

Теорема 2

Пусть *A, B, C* – произвольные множества. Тогда:

а) $A \cup A = A$ – *идемпотентность* объединения;

б) $A \cup B = B \cup A$ – *коммутативность* объединения;

в) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; – *ассоциативность* объединения;

г) $A \cup \varnothing = A$

д) $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = B = \varnothing$

Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \cup A \leftrightarrow x \in A \vee x \in A \leftrightarrow x \in A.$$

При последнем переходе мы воспользовались идемпотентностью дизъюнкции. Таким образом, идемпотентность объединения в теории множеств есть следствие идемпотентности дизъюнкции в алгебре высказываний.

б) Возьмем

$$x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B \leftrightarrow x \in B \vee$$
$$\vee\, x \in A \leftrightarrow x \in B \cup A$$

Мы доказали, что $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in B \cup A$.

Следовательно, $A \cup B = B \cup A.$

в) Возьмем

$$x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup B \vee x \in C \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee x \in C \leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

(ассоциативность дизъюнкции). Мы доказали, что

$$x \in (A \cup B) \cup C \leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$$

Следовательно, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

г) Возьмем

$$x \in A \cup \varnothing \leftrightarrow x \in A \vee x \in \varnothing \leftrightarrow x \in A,$$

так как высказывание $x \in \varnothing$ тождественно ложно.

Следовательно, $A \cup \varnothing = A$.

д) Если $A = B = \varnothing$, то $A \cup B = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$.

В другую сторону. Пусть $A \cup B = \varnothing$То есть, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in \varnothing$. Значит высказывание является тождественно ложным. С другой стороны, $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$, а дизъюнкция двух высказываний ложна тогда и только тогда, когда ложны оба эти высказывания. Следовательно, $x \in A \leftrightarrow x \in \varnothing$ и $x \in B \leftrightarrow x \in \varnothing$ а значит $A = B = \varnothing$.

Теорема 3

Пусть *A, B* – произвольные множества, тогда:

а) $A \subseteq A \cup B$;

б) $A = A \cup B \leftrightarrow B \subseteq A$.

Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \to x \in A \vee x \in B$$

(свойство импликации) $\to x \in A \cup B$.

Итак, $A \subseteq A \cup B$.

б) Пусть $A = A \cup B$. Докажем, что $B \subseteq A$. Возьмем

$$x \in B \to x \in A \cup B \to x \in A .$$

Итак, мы доказали, что $x \in B \to x \in A$, то есть $B \subseteq A$.

Теперь пусть $B \subseteq A$. Чтобы доказать равенство $A = A \cup B$, надо доказать два включения: $A \subseteq A \cup B$ и $A \cup B \subseteq A$.

Первое включение – есть пункт а).

Докажем второе включение. Возьмем

$$x \in A \cup B \to x \in A \vee x \in B \to x \in A \vee x \in A \text{ ,}$$

так как $B \subseteq A$, $\to x \in A$.

Следовательно, $A \cup B \subseteq A$.

Теорема доказана.

Определение 4

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\} .$$

Пример

Пусть $A=\{1,2,4,7,8,9\}$, $B=\{1,3,5,7,8,10\}$, тогда

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{1,7,8\} .$$

Теорема 5

Пусть *A, B, C* – произвольные множества, тогда:

а) $A \cap A = A$ - *идемпотентность* пересечения;

б) $A \cap B = B \cap A$ - *коммутативность* пересечения;

в) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - *ассоциативность* пересечения;

г) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \cap A \leftrightarrow x \in A \wedge x \in A \leftrightarrow x \in A .$$

Следовательно,

$$A \cap A = A .$$

б) Возьмем

$$x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \leftrightarrow x \in B \cap A .$$

Следовательно,

$$A \cap B = B \cap A .$$

в) Возьмем

$$x \in (A \cap B) \cap C \leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cap C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \cap (B \cap C)$$

Следовательно,

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \cdot$$

г) $x \in A \cap \varnothing \leftrightarrow x \in A \wedge x \in \varnothing \leftrightarrow x \in \varnothing$, так как $x \in \varnothing$ – тождественно ложное высказывание.

Теорема 6

Пусть *A, B* – произвольные множества. Тогда:

а) $A \cap B \subseteq A$;

б) $A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B$.

Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \cap B \to x \in A \wedge x \in B \to x \in A$$,

то есть $A \cap B \subseteq A$.

б) Пусть $A \cap B \subseteq A$. Возьмем

$$x \in A \to x \in A \cap B \to x \in A \wedge x \in B \to x \in B$$,

то есть $A \subseteq B$. Теперь пусть $A \subseteq B$. Включение $A \cap B \subseteq A$ уже доказано.

Докажем включение в другую сторону.

Возьмем

$$x \in A \to x \in A \wedge x \in B$$,

так как $A \subseteq B$' $\to x \in A \cap B$.

Следовательно, $A \subseteq A \cap B$, поэтому $A = A \cap B$.

Теорема 7 (дистрибутивные законы)

Пусть *A, B, C* – произвольные множества, тогда:

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – дистрибутивность пересечения относительно объединения;

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения.

Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

3. Разность множеств, дополнение, симметрическая разность

Определение 1

Разностью множеств называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Пример

Пусть $A=\{1,3,4,7,8,9,10\}$, $B=\{2,3,4,5,6,7\}$, тогда $A\setminus B=\{1,8,9,10\}$, $B\setminus A=\{2,5,6\}$.

Теорема 2

Пусть A, B, C – произвольные множества, тогда:

а) $A \setminus A = \varnothing$;

б) $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$;

в) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

г) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Доказательство

а) Возьмем $x \in A \setminus A \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A$ – тождественно ложное высказывание. Оно равносильно другому тождественно ложному высказыванию , поэтому $A \setminus A = \varnothing$.

б) Пусть $A \setminus B = \varnothing$. Возьмем $x \in A$, так как $A \setminus B = \varnothing$, то $x \notin A \setminus B$, значит $x \in B$, то есть $A \subseteq B$.

Теперь пусть $A \subseteq B$. Возьмем $x \in A \setminus B \leftrightarrow x \in A \wedge$

$$\wedge x \notin B \rightarrow x \in B \wedge x \notin B \rightarrow x \in \varnothing$$

, то есть $A \setminus B = \varnothing$.

в) Возьмем

$$x \in (A \cup B) \setminus C \leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \setminus C \vee x \in B \setminus C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

г) Возьмем

$$x \in A \setminus (B \cup C) \leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \cup C} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \vee x \in C} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \leftrightarrow \left(x \in A \setminus B\right) \wedge x \notin C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in \left(A \setminus B\right) \setminus C$$

Теорема 3 (законы Моргана)

а) $A \setminus \left(B \cup C\right) = \left(A \setminus B\right) \cap \left(A \setminus B\right)$;

б) $A \setminus \left(B \cap C\right) = \left(A \setminus B\right) \cup \left(A \setminus B\right)$.

Доказательство

а) Возьмем

$$x \in A \setminus \left(B \cap C\right) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cup C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge \left(x \notin B \wedge x \notin C\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(x \in A \wedge x \notin B\right) \wedge \left(x \in A \wedge x \notin C\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in A \setminus C \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in \left(A \setminus B\right) \cap \left(A \setminus C\right)$$

б) Возьмем

$$x \in A \setminus (B \cap C) \leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \cap C} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge \overline{x \in B \wedge x \in C} \leftrightarrow$$

$$x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Множество U назовем *"универсальным"*, если оно содержит все элементы и все множества являются его подмножествами. Понятие абсолютно универсального множества, то есть множества, для которого истинно высказывание *"для любого x "*, несмотря на кажущуюся его простоту, мгновенно приводит к так называемым теоретико-множественным парадоксам. Поэтому понятие *"универсального множества"* у нас будет зависеть от круга задач, которые мы рассматриваем.

Довольно часто под универсальным множеством понимают множество R — множество вещественных чисел или множество C – комплексных чисел. Возможны и другие примеры. Всегда в контексте необходимо оговорить, что мы понимаем под универсальным множеством U.

Определение 4

Пусть U – универсальное множество и . *Дополнением* A в U (или просто *дополнением* A) называется множество .

Пример

Если U – множество вещественных чисел и A – множество рациональных чисел, то – множество иррациональных чисел

Теорема 5

а) $\overline{\varnothing} = U$;

б) $\overline{U} = \varnothing$;

в) $\overline{\overline{A}} = A$

Доказательство

Доказать самостоятельно

Теорема 6 (законы Моргана для дополнений)

а) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.