



Тема «ОСНОВЫ ЛОГИКИ»



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Логика – наука о формах и способах мышления. Основными формами мышления являются *понятие*, *суждение*, *умозаключение*.

Понятие – это форма мышления, фиксирующая основные, существенные признаки объекта.

Высказывание – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о реальных предметах, их свойствах и отношениях между ними.

Высказывание может быть либо истинно, либо ложно.

Умозаключение – это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (вывод).



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Логика — это наука, изучающая законы и формы мышления.

Алгебра логики — это математический аппарат, с помощью которого записывают (кодируют), упрощают, вычисляют и преобразовывают логические высказывания.

Высказывание — это повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно. При этом считается, что высказывание удовлетворяет закону исключенного третьего, т.е. каждое высказывание или истинно, или ложно и не может быть одновременно и истинным, и ЛОЖНЫМ.

Если высказывание:

ИСТИННО - его значение равно 1 (True, T);

ЛОЖНО - 0 (False, F).



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Высказывание не может быть выражено повелительным или вопросительным предложением, так как оценка их истинности или ложности невозможна.

Для образования **сложных высказываний** наиболее часто используются базовые логические операции, выражаемые с помощью **логических связок И, ИЛИ и частицей НЕ**. Значение истинности **сложных высказываний** зависит от истинности входящих в них простых высказываний и объединяющих их связок.

*В математической логике не рассматривается конкретное содержание высказывания, важно только, **истинно** оно или **ложно**.*



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Поэтому высказывание можно представить некоторой переменной величиной, значением которой может быть **0** или **1**.

Если высказывание:

ИСТИННО - его значение равно **1 (True, T)**,

ЛОЖНО - **0 (False, F)**.

Простые высказывания называли логическими переменными, а сложные высказывания логическими функциями. Значения логической функции также только 0 или 1. Для простоты записи высказывания обозначаются латинскими буквами A, B, C.

Пример простых высказываний:

A = “2+2=4” – истинно,

B = “Земля не вертится” – ложно.



ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

В основе булевой алгебры лежат 16 основных функций. Наиболее часто применяемые из них:

- логическое отрицание (инверсия) – «не»; \neg ; $\bar{}$;
- логическое умножение (конъюнкция) – «и»; $\&$; \wedge ; \cdot ;
- логическое сложение (дизъюнкция) – «или»; $+$; \vee ;
- логическое следование (импликация) – \rightarrow ;
- логическая операция эквивалентности – \sim ; \Leftrightarrow ; \leftrightarrow ;
- функция Вебба (отрицание дизъюнкции) – **ИЛИ-НЕ**;
- функция Шеффера (отрицание конъюнкции) – **И-НЕ**;
- сложение по модулю 2 (**M2**).



ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Приведенные функции можно свести в таблицу истинности:

Аргументы		Функции								
A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	ИЛИ-НЕ	И-НЕ	M2
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0



ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Логическое отрицание (инверсия):

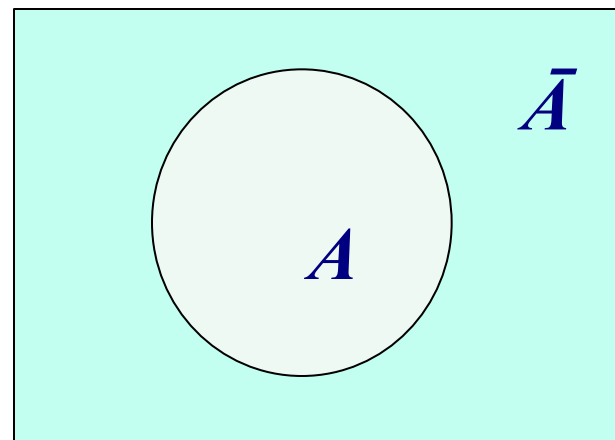
- в естественном языке соответствует словам *неверно, что...* и частице *не*;
- в языках программирования **Not**.

Обозначение $\neg A$; \bar{A} .

Таблица истинности:

A	\bar{A}
0	1
1	0

Диаграмма Эйлера-Венна





ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Логическое сложение (дизъюнкция):

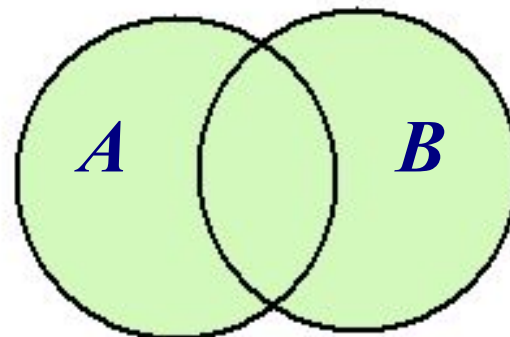
- В естественном языке соответствует союзу **или**;
- в языках программирования **Or**.

Обозначение $+$; \vee .

Таблица истинности:

A	B	A \vee B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Диаграмма Эйлера-Венна





ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Логическое умножение (конъюнкция):

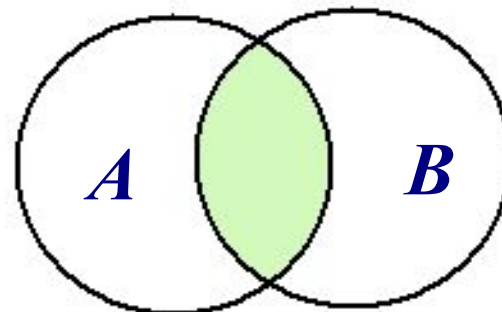
- в естественном языке соответствует союзу **и**;
- в языках программирования **And**.

Обозначение **&**; \wedge ; \cdot .

Таблица истинности:

A	B	A\wedgeB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Диаграмма Эйлера-Венна





ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Логическое следование (импликация) - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум простым высказываниям составное высказывание, являющимся **ЛОЖНЫМ** тогда и только тогда, когда из **истинной предпосылки** (первого высказывания) следует **ЛОЖНЫЙ ВЫВОД** (второе высказывание). В естественном языке соответствует обороту «если ..., то ...».

Обозначение \rightarrow .

A	B	A \rightarrow B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Логическое следование соответствует высказыванию
не А или В

Сравним таблицы истинности:

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Логические выражения, у которых последние столбцы истинности совпадают, называются ***равносильными***.



ОСНОВНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Логическая операция эквивалентности (равнозначность)

- Логическое равенство образуется соединением двух простых высказываний в одно с помощью оборота речи

«... тогда и только тогда, когда ...».

Обозначение \sim ; \Leftrightarrow ; \leftrightarrow .

*Составное высказывание, образованное с помощью логической операции эквивалентности, **истинно** тогда и только тогда, когда оба высказывания **одновременно либо ложны, либо истинны.***

A	B	A \leftrightarrow B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



ПРИОРИТЕТ ВЫПОЛНЕНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ

- Логическое отрицание (инверсия) – «не»; \neg ; $\bar{\quad}$.
- Логическое умножение (конъюнкция) – «и»; $\&$; \wedge ; \cdot .
- Логическое сложение (дизъюнкция) – «или»; $+$; \vee .
- Логическое следование (импликация) – \rightarrow .
- Логическая операция эквивалентности – \sim ; \Leftrightarrow ; \leftrightarrow .

Для изменения указанного порядка могут использоваться скобки.



ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

Таблица истинности определяет истинность или ложность логической функции при всех возможных комбинациях исходных значений простых высказываний.

Правила построения таблиц истинности.

- 1) Подсчитать количество переменных ***n*** в логическом выражении.
- 2) Определить количество **строк** в таблице, которое равно
$$m=2^n$$
- 3) Подсчитать количество операций в логическом выражении и определить количество **столбцов** в таблице:
***k* = количество переменных (*n*) + количество операций.**
- 4) Ввести названия столбцов таблицы в соответствии с последовательностью выполнения логических операций с учетом скобок и приоритетов.
- 5) Заполнить столбцы логических переменных наборами значений.
- 6) Провести заполнение таблицы истинности по столбцам, выполняя базовые логические операции в соответствии с установленной в п. 4 последовательностью.



ТАБЛИЦЫ ИСТИННОСТИ

Пример. Определить истинность формулы

$$F = ((C \vee B) \rightarrow B) \wedge (A \wedge B) \rightarrow B$$

Формула является **тождественно истинной**, если все значения строк результирующего столбца будут равны **1**.

1 шаг. Определяем количество **строк** в таблице:

$$m = 2^3 = 8$$

2 шаг. Определяем количество **столбцов** в таблице:

$$k = 3 + 5 = 8$$



ТАБЛИЦА ИСТИННОСТИ

$$F = ((C \vee B) \rightarrow B) \wedge (A \wedge B) \rightarrow B$$

1	2	3	4=3 \vee 2	5=4 \rightarrow 2	6=1 \wedge 2	7=5 \wedge 6	8=7 \rightarrow 2
A	B	C	C \vee B	(C \vee B) \rightarrow B	A \wedge B	((C \vee B) \rightarrow B) \wedge (A \wedge B)	F
0	0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1



ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$



Задание 1.

Для какого из указанных значений X истинно
высказывание

$$\neg((X > 2) \rightarrow (X > 3))?$$

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4



Решение

(Вариант 1. Прямая подстановка)

- 1) Определим порядок действий: сначала вычисляются результаты отношений в скобках, затем выполняется импликация (поскольку есть «большие» скобки), затем – отрицание (операция «НЕ») для выражения в больших скобках.

$$\neg((X > 2) \rightarrow (X > 3))$$



Решение

(Вариант 1. Прямая подстановка)

2) Выполняем операции для всех приведенных возможных ответов (1 обозначает истинное условие, 0 – ложное); определяем результаты сравнения в двух внутренних скобках:

x	$x > 2$	$x > 3$	$(x > 2) \rightarrow (x > 3)$	$\neg((x > 2) \rightarrow (x > 3))$
1	0	0	1	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1
4	1	1	1	0

Таким образом, ответ – 3.



Возможные ловушки и проблемы

- 1) Можно «забыть» отрицание (помните, что правильный ответ – всего один!)
- 2) Можно перепутать порядок операций (скобки, «НЕ», «И», «ИЛИ», «импликация»)
- 3) Нужно помнить таблицу истинности операции «импликация», которую очень любят составители тестов.
- 4) Этот метод проверяет только заданные числа и не дает общего решения, то есть не определяет все множество значений X , при которых выражение истинно.



Решение

(Вариант 2. Упрощение выражения)

$$\neg((X > 2) \rightarrow (X > 3))$$

1. Обозначим простые высказывания буквами:

$$A = X > 2, \quad B = X > 3$$

2. Тогда можно записать все выражение в виде:

$$\neg(A \rightarrow B) \quad \text{или} \quad \overline{A \rightarrow B}$$

3. Выразим импликацию через «НЕ» и «ИЛИ»:

$$A \rightarrow B = \neg A + B = \neg A \vee B \quad \text{или} \quad \overline{A \rightarrow B} = \overline{\neg A + B}$$

4. Раскрывая по формуле де Моргана, получаем:

$$\neg(\neg A \vee B) = A \wedge \neg B \quad \text{или} \quad \overline{\neg A + B} = A \cdot \overline{B}$$

5. Таким образом, данное выражение истинно только тогда,

когда A истинно ($X > 2$), а B – ложно ($X \leq 3$),

то есть для всех X , таких что $2 < X \leq 3$

Таким образом, ответ – 3.



Возможные проблемы

1. Нужно помнить законы логики (например, формулы де Моргана).
2. При использовании формул де Моргана нужно не забыть заменить «И» на «ИЛИ» и наоборот.
3. Нужно не забыть, что инверсией (отрицанием) для выражения $X > 3$ является $X \leq 3$, а не $X < 3$



Выводы

1. В данном случае, наверное, проще первый вариант решения (прямая подстановка всех предложенных ответов).
2. Второй вариант позволяет не только проверить заданные значения, но и получить *общее решение* – *все множество X* , для которых выражение истинно; это более красиво для человека, обладающего математическим складом ума.



A8 (базовый уровень, время – 1 мин)

Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению

$$A \wedge \neg(\neg B \vee C)$$

- 1) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$
- 2) $A \vee \neg B \vee \neg C$
- 3) $A \wedge B \wedge \neg C$
- 4) $A \wedge \neg B \wedge C$



Решение

(Вариант 1. Использование законов де Моргана)

1. Перепишем заданное выражение в других обозначениях: $A \wedge \neg(\neg B \vee C) = A \cdot (\overline{B} + C)$
2. Применим формулу де Моргана, а затем закон двойного отрицания: $A \cdot (\overline{B} + C) = A \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \overline{\overline{C}}$

$$A \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \overline{\overline{C}} = A \cdot B \cdot \overline{C}$$

3. Перепишем ответы в других обозначениях:

$$1) \quad \neg A \vee \neg B \vee \neg C = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$$

$$2) \quad A \vee \neg B \vee \neg C = A + \overline{B} + \overline{C}$$

$$3) \quad A \wedge B \wedge \neg C = A \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$4) \quad A \wedge \neg B \wedge C = A \cdot \overline{B} \cdot C$$

4. Таким образом, **правильный ответ – 3**.
-



Возможные ловушки и проблемы

- 1) Серьезные сложности представляет применяемая в заданиях ЕГЭ форма записи логических выражений, поэтому рекомендуется сначала внимательно перевести их в удобный вид; потом сразу становится понятно.
 - 2) При использовании законов де Моргана часто забывают, что нужно заменить «И» на «ИЛИ» и «ИЛИ» на «И».
 - 3) Иногда для решения нужно упростить не только исходное выражение, но и заданные ответы, если они содержат импликацию или инверсию сложных выражений.
-



Решение

(Вариант 2. Через таблицы истинности,
если забыли формулы де Моргана)

1. Перепишем заданное выражение в других обозначениях: $A \wedge \neg(\neg B \vee C) \Rightarrow A \cdot (\overline{B} + C)$
 2. Перепишем ответы в других обозначениях:
 - 1) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C \Rightarrow \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$
 - 2) $A \vee \neg B \vee \neg C \Rightarrow A + \overline{B} + \overline{C}$
 - 3) $A \wedge B \wedge \neg C \Rightarrow A \cdot B \cdot \overline{C}$
 - 4) $A \wedge \neg B \wedge C \Rightarrow A \cdot \overline{B} \cdot C$
 3. Для доказательства равносильности двух логических выражений достаточно показать, что они принимают равные значения при всех возможных комбинациях исходных данных.
-



Решение

(Вариант 2. Продолжение)

4. Поэтому можно составить таблицы истинности для исходного выражения и всех ответов и сравнить их.
5. Здесь 3 переменных, каждая из которых принимает два возможных значения (всего 8 вариантов).



Решение. (Вариант 2. Продолжение)

A	B	C	$A \cdot \overline{(B+C)}$	$\overline{A+B+C}$	$A+\overline{B+C}$	$A \cdot B \cdot \overline{C}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C$
0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0

Таким образом, правильный ответ – 3 .



Решение
(комментарий к таблице)

- 6) Исходное выражение $A \cdot \overline{(\overline{B} + C)}$ истинно только тогда, когда $\overline{B} + C = 0$ и $A = 1$, то есть только при $A = 1, B = 1, C = 0$ (в таблице истинности одна единица, остальные – нули)
- 7) Выражение $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ истинно, если хотя бы одна из переменных равна нулю, то есть, оно будет ложно только при $A = B = C = 1$ (в таблице истинности один нуль, остальные – единицы).



Решение
(комментарий к таблице)

- 8) Аналогично выражение $A + \overline{B} + \overline{C}$ ложно только при $A = 0, B = C = 1$, а в остальных случаях – истинно.
- 9) Выражение $A \cdot B \cdot \overline{C}$ истинно только при $A = B = 1, C = 0$, а в остальных случаях – ложно.
- 10) Выражение $A \cdot \overline{B} \cdot C$ истинно только при $A = 1, B = 0, C = 1$, а в остальных случаях – ложно.
-



Возможные проблемы Выводы

- Сравнительно большой объем работы.
- Очевидно, что **проще использовать первый** вариант решения (упрощение исходного выражения и, если нужно, ответов), но для этого нужно помнить формулы.
- Если формулы забыты, всегда есть простой (хотя и более трудоемкий) вариант решения через таблицы истинности.