МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
сударственное образовательное учреждение высшего образования Московской облас
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ОБЛАСТНОЙ УНИВЕРСИТЕТ
(МГОУ)

федра высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математи

КУРСОВАЯ РАБОТА

тема: «Задачи с параметром в материалах ГИА и методы их решения
(по материалам ЕГЭ за последние 5 лет)»

ВЫПОЛНИЛ СТУДЕНТ:
11 ГРУППЫ 1 КУРСА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ФАКУЛЬТЕТА
АГАБАБОВА АНАСТАСИЯ
КОНСТАНТИНОВНА

Научный руководитель:
ст. преподаватель Высоцкая Полина Андреевна

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ РАБОТЫ

- Цель: изучение методов решения задач с параметром из материалов ЕГЭ.
- Задачи:
- получение общего представления о заданиях с параметрами в материалах ЕГЭ;
- классификация методов их решения;
- разработка набора упражнений, на примерах которых реализуются эти методы.

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ В ЕГЭ

- Задания с параметром были введены в материалы ЕГЭ ещё с 2001 года, когда экзамен проводился в форме эксперимента. С 2009 года ЕГЭ является единственной формой выпускных экзаменов, где также содержатся задачи с параметром. Введение параметра способствовало появлению качественно новых типов задач, а также таких, как решение уравнений и неравенств.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

- **Тип 1.** Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, которые необходимо решить либо для любого значения параметра (параметров), либо для значений параметра, принадлежащих заранее оговоренному множеству.
- **Тип 2.** Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется определить количество решений в зависимости от значения параметра (параметров).
- **Тип 3.** Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых требуется найти все те значения параметра, при которых указанные уравнения, неравенства, их системы и совокупности имеют заданное число решений (в частности, не имеют или имеют бесконечное множество решений).
- **Тип 4.** Уравнения, неравенства, их системы и совокупности, для которых при искомых значениях параметра множество решений удовлетворяет заданным условиям в области определения.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

- Аналитический метод - это способ прямого решения, повторяющий стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра.

ПРИМЕР:

Найдите все значения параметра с, при каждом из которых уравнение не имеет решений.

$$8\ sin^3x = c + 9\ cos2x$$

Решение: **Перепишем уравнение в виде**

$$8\ sin^3x = c + 9(1 - 2sin^2x),\ \ 8\ sin^3x + 18\ sin^2x = c + 9$$

Найдём множество значений левой части получившегося уравнения.

Для этого обозначим $sinx = t$ **и рассмотрим функцию** $f(t) = 8t^3 + 18t^2$ **при** $t \in [-1; 1]$.

- **Её производная равна** $f'(t) = 24t^2 + 36t = 12(2t^2 + 3)$.

На отрезке $[-1; 1]$ **производная обращается в ноль при** $t = 0$, **положительна при** $t > 0$, **и отрицательна при** $t < 0$. **Значит, при** $t \in [-1; 0]$ **функция убывает, а при** $t \in [0; 1]$ **возрастает. Наименьшее значение функции** $f(t)$ **на отрезке – это** $f(0) = 0$. **Чтобы определить наибольшее значение, найдём значения** $f(t)$ **на концах отрезка:** $f(-1) = 10$, $f(1) = 26$. **Значит, наибольшее значение равно** 26, **и функция** $f(t)$ **принимает все значения из отрезка** $[0; 26]$.

Следовательно, данное уравнение имеет решения при $c + 9 \in [0; 26]$, **т. е. при** $c \in [-9; 17]$, **а при всех остальных с решений нет.**

Ответ: $c \in (-\infty; -9)U(17; +\infty)$

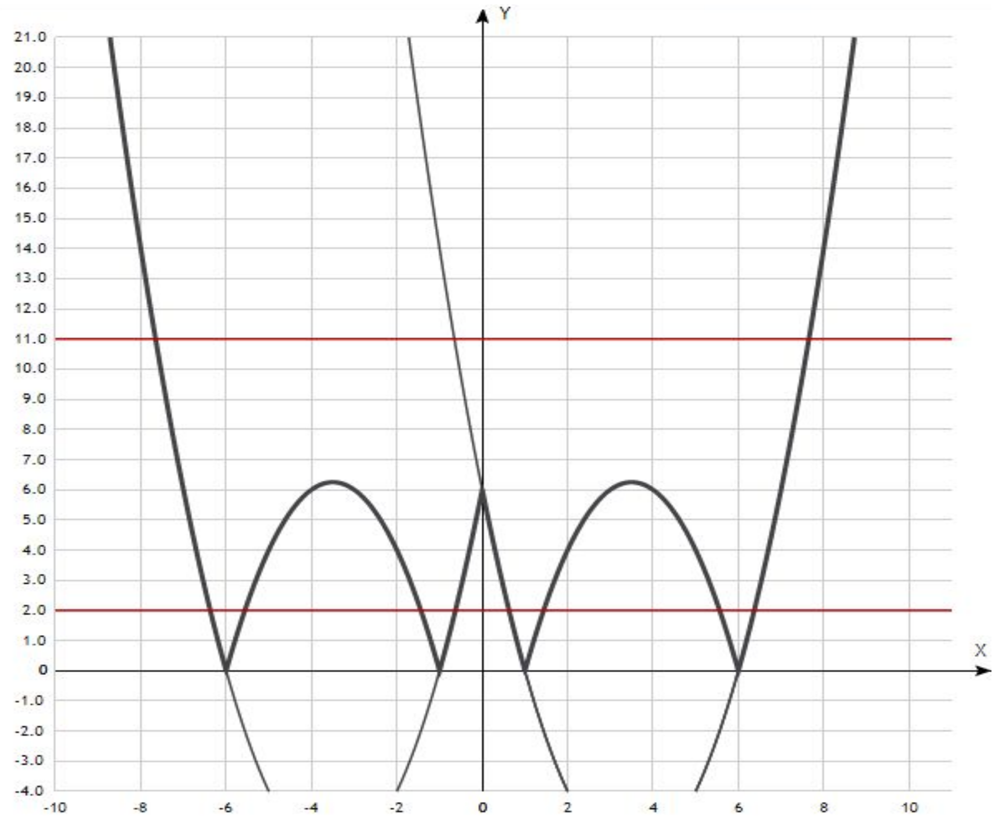
ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

- **Графический метод. Координатная плоскость** (xOy)

Легче всего решать уравнения с помощью графического представления зависимости переменной x **от параметра** c**. На плоскости** (xOy) **функция** $y = f$ (c) **задает группу кривых зависящих от параметра** c**. Нас будет интересовать с помощью какого преобразования плоскости можно переходить к другим кривым группы.**

ПРИМЕР:

Для каждого значения параметра с определите количество решений уравнения $|x^2 - 7|x| + 6| = c$



Решение: Заметим, что количество решений уравнения $|x^2 - 7|x|+6| = \text{c}$ равно количеству точек пересечения графиков функций $y = |x^2 - 7|x| + 6|$ и $y = \text{c}$.

Графики функций:

1) $y = x^2 - 7x + 6 = \ (x - \frac{7}{2})^2 - \frac{25}{4}$;

2) $y = x^2 - 7|x| + 6$;

3) $y = |x^2 - 7|x| + 6|$ показаны на рисунке 1.

$\text{y} \ = \ \text{c}$ - это горизонтальная прямая. По графику несложно установить количество точек пересечения в зависимости от c (например, при $\text{c} \ = 11$ – две точки пересечения; при $\text{c} \ = 2$ – восемь точек пересечения).

Ответ: при $\text{c} \ < \ 0$ - решений нет; при $\text{c} \ = \ 0$ и $\text{c} = \frac{25}{4}$ - четыре решения; при $0 \ < \text{c} \ < 6$ - восемь решений; при $\text{c} \ = \ 6$ - семь решений; при $6 < \text{c} < \frac{25}{4}$ - шесть решений; при $\text{c} > \frac{25}{4}$ - два решения.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

- **Графический метод. Координатная плоскость** $(\mathrm{x}0\mathrm{c})$

Рассмотрим метод, упрощающий работу по решению задач с параметром. Метод состоит в следующем:

- **Из уравнения (неравенства) с переменной** x **и параметра** c **выразим параметр как функцию от** x**:** $\mathrm{c} = f(x)$.
- **В координатной плоскости** $(x0\mathrm{c})$ **строим график функции:** $\mathrm{c} = f(x)$.
- **Рассмотрим прямые** $\mathrm{c} = \ const$ **и выделим те промежутки оси** $0\mathrm{c}$**, на которых эти прямые удовлетворяют следующим условиям: а) не пересекает график функции** $\mathrm{c} = f(x)$**, б) пересекает график функции** $\mathrm{c} = f(x)$ **в одной точке, в) в двух точках, г) в трех точках и так далее.**
- **Если поставлена задача найти значения** x**, то выражаем** x **через** c **для каждого из найденных промежутков значения с в отдельности.**

Взгляд на параметр как на равноправную переменную находит свое отражение в графических методах. Таким образом, возникает координатная плоскость $(x0\mathrm{c})$.

ПРИМЕР:

одно решение.

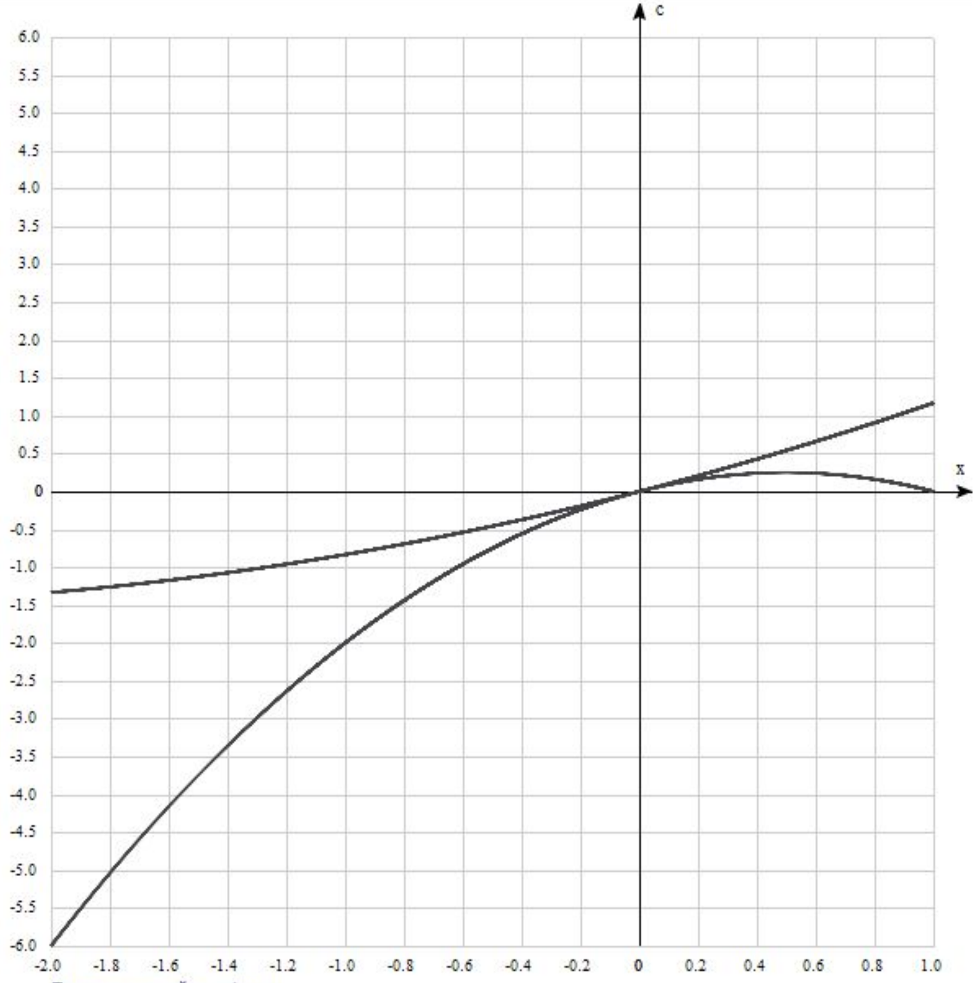
$$\begin{cases} x^2 - x - c \le 0, \\ x^2 + 2x - 6c \le 0. \end{cases}$$

Решение: Изобразим решения системы неравенств на плоскости xOc. (Рисунок 2) Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} c \le -x^2 + x \\ c \le \dfrac{x^2 + 6x}{6} \end{cases}$$

- Первому неравенству удовлетворяют точки, лежащие на параболе $c = -x^2 + x$ и ниже неё, а второму – точки, лежащие на параболе $c = \frac{x^2+6x}{6}$ и выше неё. Находим координаты вершин парабол и точек их пересечения, а затем строим график. Вершина первой параболы – $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, второй параболы $\left(-1; -\frac{1}{6}\right)$, точки пересечения – $(0; 0)$ и $\left(\frac{4}{7}; \frac{12}{49}\right)$. Видно, что система имеет ровно одно решение в случаях $c = 0$ и $c = \frac{1}{4}$.

Ответ: $c = 0, \quad c = \frac{1}{4}$



ПРИМЕР (РЕШЕНИЕ ТРЕМЯ СПОСОБАМИ):

Решение: Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} c - x^2 = (x-1)^2 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 2x + 1 - c = 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

1 способ (аналитический): **Корни квадратного уравнения:**

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{2c - 1}}{2}; \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{2c - 1}}{2}$$

Выясним, при каких значениях c **они лежат в области** $\frac{1-\sqrt{2c-1}}{2} \geq 1 \ \rightarrow \ \sqrt{2c-1} \leq -1 \rightarrow$ **решений нет;** $\frac{1+\sqrt{2c-1}}{2} \geq 1 \ \rightarrow$ $\sqrt{2c-1} \geq 1 \rightarrow \ c \geq 1.$

Ответ: **при** $\sqrt{2c-1} \leq -1$ **решений нет; при** $c \geq 1 \quad x = \frac{1+\sqrt{2c-1}}{2}.$

ПРИМЕР (РЕШЕНИЕ ТРЕМЯ СПОСОБАМИ):

Для всех действительных значений параметра с решите уравнение $x - \sqrt{c - x^2} = 1$

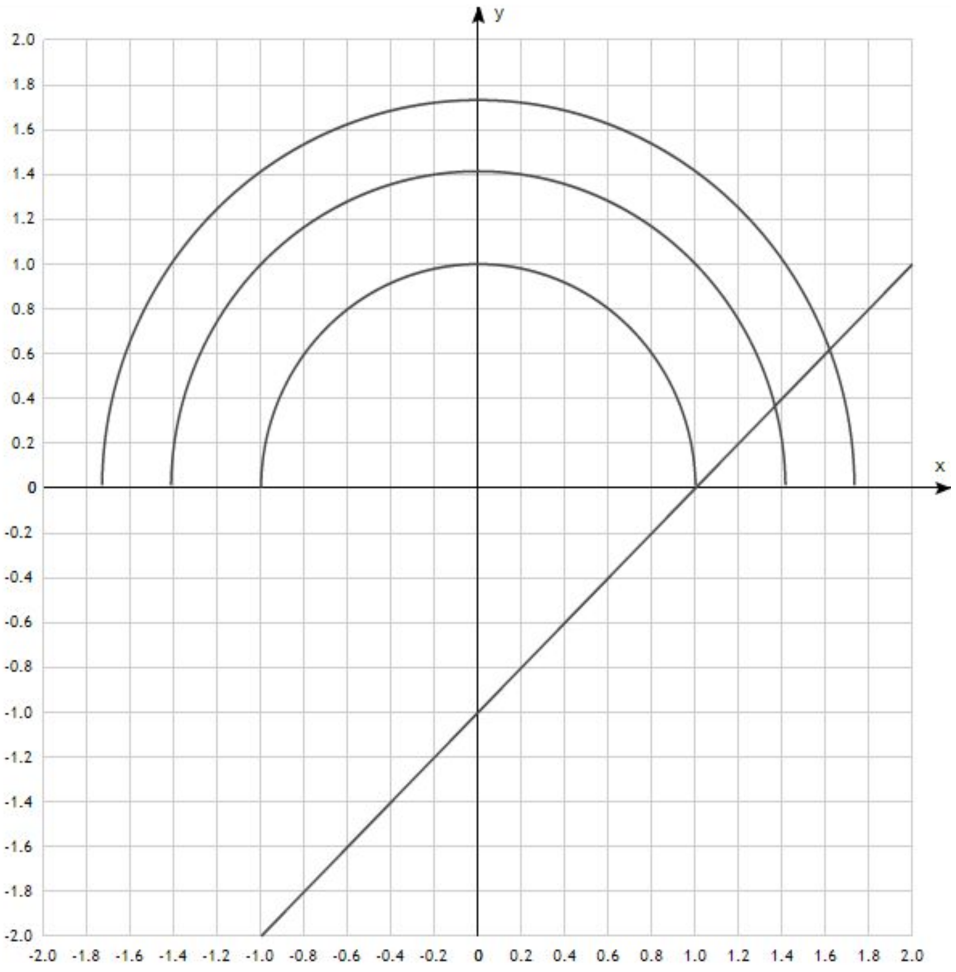
Решение:

2 способ (графический в плоскости xOy): Преобразуем исходное уравнение

$$\sqrt{c - x^2} = x - 1; \quad y_1 = \sqrt{c - x^2}, \qquad y_2 = x - 1.$$

Построим графики функций. Решением уравнения будут абсциссы точек пересечения графиков функций. Количество решений - количество точек пересечения (Рисунок 3)

Ответ: **при** $\sqrt{2c - 1} \le -1$ **решений нет; при** $c \ge 1$ $\quad x = \frac{1+\sqrt{2c-1}}{2}$.



ПРИМЕР (РЕШЕНИЕ ТРЕМЯ СПОСОБАМИ):

Для всех действительных значений параметра с решите уравнение $x - \sqrt{c - x^2} = 1$

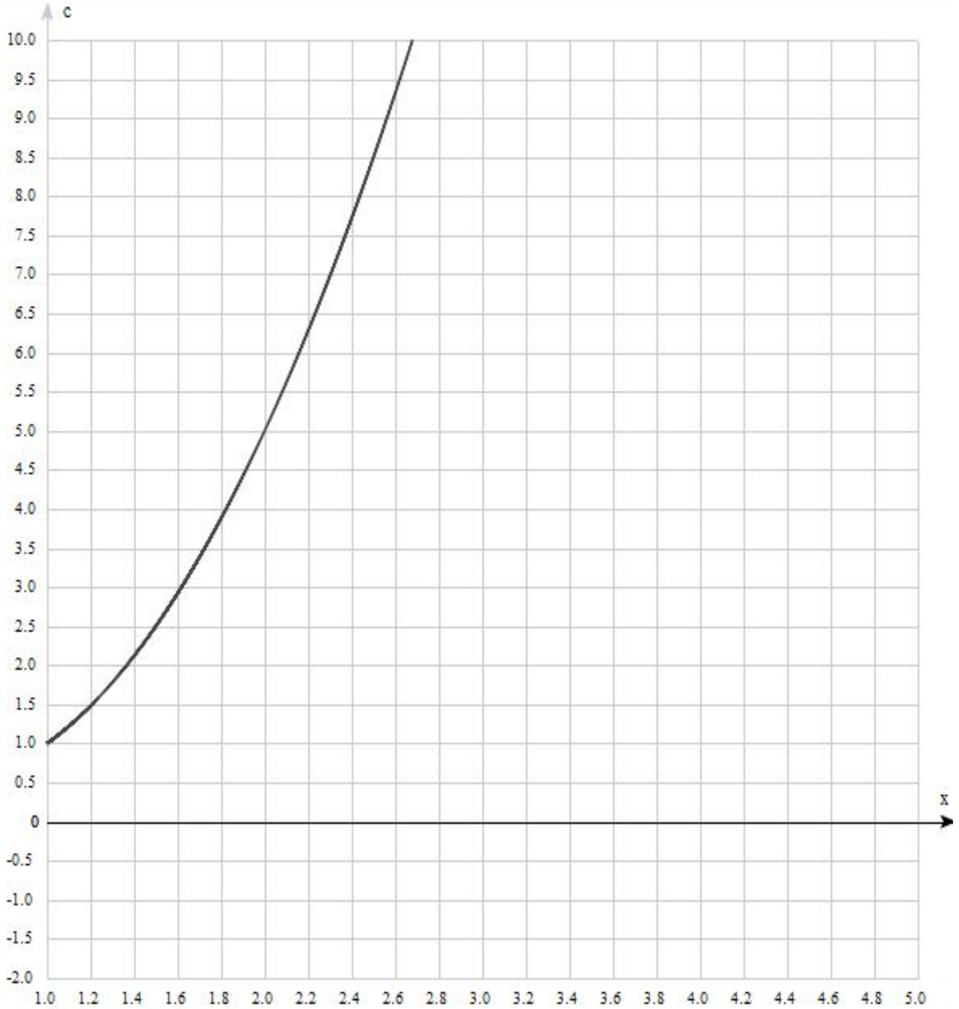
Решение:

3 способ (графический в плоскости xOc): **Исходное уравнение равносильно системе:**

$$\begin{cases} c = 2x^2 - 2x + 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

- **Решение системы - это точки параболы для которых, как видно из рисунка 4, решение существует при $x \geq 1$, причем каждому значению соответствует одно решение.**

Ответ: **при** $\sqrt{2c - 1} \leq -1$ **решений нет; при** $c \geq 1$ $\quad x = \frac{1+\sqrt{2c-1}}{2}$.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Подводя итоги можно сделать вывод о том, какой из методов решения наиболее удобный.

Исходя из примеров, приведенных в работе, наглядным способом решения является графический. Этот способ позволяет упростить анализ задач, а в некоторых случаях является единственным путем к решению задачи. Также данный метод решения задействует весь набор знаний, связанных с исследованием функции. В то время как аналитический способ решения задач с параметром является наиболее трудным, который требует больше знаний высокого уровня.

ЛИТЕРАТУРА

- Денищева, Л. О. Единый Государственный экзамен по математике / Л. О. Денищева, Ю. А. Глазков и др. – М.: Интеллект-Центр, 2009. – 272 с.
- Козко, А. И. Задачи с параметром и другие сложные задачи / А. И. Козко, В. Г. Чирский – М.: МЦНМО, 2007. – 296 с.
- Крамор, В. С. Примеры с параметрами и их решения / В. С. Крамор - М.: АРКТИ, 2001. – 48 с.
- Крамор, В. С. Задачи с параметрами и методы их решения / В. С. Крамор – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2007. – 416 с.
- Кулабухова, С. Ю. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2013 / С. Ю. Кулабухова, Ф. Ф. Лысенко – Ростов-на-Дону: Легион, 2012. – 400 с.
- Локоть, В. В. Задачи с параметрами / В. В. Локоть– М.: АРКТИ, 2005. – 96 с.
- Мирошин, В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика / В. В. Мирошин - М.: Экзамен, 2009. – 286 с.
- Прокофьев, А. А. Математика. Подготовка к ЕГЭ. Решение задач с параметрами / А. А. Прокофьев, А. Г. Корянов - М.: Легион, 2015. - 336 с.
- Просветов, Г. И. Задачи с параметрами и методы их решения / Г. И. Просветов - М.: Альфа-пресс, 2010. - 420 с.
- Рязановский, А. Р. Готовимся к ЕГЭ: Математика - решение задач повышенной сложности / А. Р. Рязановский, В. В. Мирошин - М.: Интеллект-Центр, 2007. - 480 с.
- Субханкулова, С. А. Задачи с параметрами / С. А. Субханкулова – М.: ИЛЕКСА, 2010. – 208 с.
- Шахмейстер, А. Х. Задачи с параметрами на экзаменах / А. Х. Шахмейстер - М.: Издательство МЦНМО: СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс», 2009. – 248 с.
- Решение задач с параметром // ЕГЭ по математике URL: http://4ege.ru/matematika/ (дата обращения: 15.04.18).
- Задачи с параметром // ЕГЭ по математике URL: https://academyege.ru/ (дата обращения: 17.04.18).
- Задачи с параметром из ЕГЭ // ЕГЭ по математике URL: https://yourtutor.info/ (дата обращения: 19.04.18).

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!