Введение в асимптотические методы. Лекция 1

Алгебраические уравнения

1. Задача 1

$$\boxed{x^2 + \varepsilon x - 1 = 0} \Rightarrow x = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

$$x = \begin{cases} +1 - \varepsilon/2 + \varepsilon^2/8 - \varepsilon^4/128 + O(\varepsilon^6) \\ -1 - \varepsilon/2 - \varepsilon^2/8 + \varepsilon^4/128 + O(\varepsilon^6) \end{cases}$$

Ряды сходятся при $|\varepsilon| < 2$

Более важно для нас, что несколько членов ряда дают хорошую аппроксимацию при малых ε

	$n=1$	2	3	4	точное решение
$\varepsilon = 0.1 \Rightarrow$	1	0.95	0.95125	0.95124921	0.95124922

Два основных метода построения асимптотик:

1) метод итераций

2) метод асимптотических разложений

2. Итерации

- Основной шаг метода – такая **переформулировка** исходной задачи, которая будет базисом итерационного процесса

$$\boxed{x^2 + \varepsilon x - 1 = 0} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{1 - \varepsilon x}$$

- **Итерационный процесс и начальное приближение**

$$x_{n+1} = \sqrt{1 - \varepsilon x_n}, \qquad x_0 = 1$$

- **1-я итерация**

$$x_1 = \sqrt{1 - \varepsilon}, \qquad x_1 = \boxed{1 - \varepsilon / 2} - \varepsilon^2 / 8 - \ldots$$

- **2-я итерация**

$$x_2 = \sqrt{1 - \varepsilon\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)}, \qquad x_1 = \boxed{1 - \varepsilon / 2 + \varepsilon^2 / 8} + \varepsilon^3 / 16 + \ldots$$

3. Асимптотическое разложение

1) Полагаем $\varepsilon = 0$ и находим **невозмущенные корни** $x = \pm 1$

2) Ищем **разложение** вблизи $x = 1$ **в виде ряда** по степеням ε

$$x(\varepsilon) = 1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \dots \Longleftarrow \text{ФАР}$$

3) **Подставляем** разложение в исходное уравнение

$$\begin{array}{ll}
x^2 \rightarrow & 1 + \varepsilon 2x_1 + \varepsilon^2 \left(x_1^2 + 2x_2\right) + \varepsilon^3 \left(2x_1 x_2 + 2x_3\right) + \dots \\
+\varepsilon x \rightarrow & \quad + \varepsilon \quad + \quad \varepsilon^2 x_1 \quad + \quad \varepsilon^3 x_2 \quad + \dots \\
-1 \rightarrow & -1 \\
= 0 \rightarrow & = 0
\end{array}$$

4) **Сравниваем** коэффициенты при различных степенях ε

$$\varepsilon^0 \Rightarrow 1 - 1 = 0, \qquad \varepsilon^1 \Rightarrow 2x_1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = -1/2}$$

$$\varepsilon^2 \Rightarrow x_1^2 + 2x_2 + x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1/8}$$

$$\varepsilon^3 \Rightarrow 2x_1 x_2 + 2x_3 + x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{x_3 = 0}$$

4. Важный момент

- *Когда мы приравниваем коэффициенты при различных степенях* ε *к нулю, мы на самом деле* ***погружаем нашу частную задачу*** *с данным значением* ε*, скажем 0.1, в* ***семейство задач*** *со всеми малыми значениями параметра* ε*. Если, как мы надеемся, зависимость корней от* ε *гладкая при* $\varepsilon \to 0$*, то вначале мы находим эту общую для всех малых* ε *зависимость, и только потом подставляем в нее наше конкретное численное значение.*

5. Задача 2

$$\boxed{\varepsilon x^2 + x - 1 = 0}$$

1) Ищем **разложение** x **в виде ряда** по степеням ε

$$x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots$$

2) **Подставляем** разложение в исходное уравнение

$$
\begin{array}{l|l}
\varepsilon x^2 & \qquad\qquad\qquad \varepsilon x_0^2 + \varepsilon^2 2x_0x_1 + \ldots \\
+x & +x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots \\
-1 & -1 \\
=0 & =0
\end{array}
$$

3) **Сравниваем** коэффициенты при различных степенях ε

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^0 &\Rightarrow x_0 - 1 = 0, &&\Rightarrow x_0 = 1 \\
\varepsilon^1 &\Rightarrow x_0^2 + x_1 = 0 &&\Rightarrow x_1 = -1 \\
\varepsilon^2 &\Rightarrow 2x_0x_1 + x_2 = 0 &&\Rightarrow x_2 = 2
\end{aligned}
$$

6. Задача 2: сингулярность

$$\boxed{\varepsilon x^2 + x - 1 = 0}$$

У квадратного уравнения два корня. Куда делся второй?

$$x = \begin{cases} +1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 - 5\varepsilon^3 + \ldots \\ -1/\varepsilon - 1 + \varepsilon - 2\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3 + \ldots \quad \to -\infty \end{cases}$$

Он убежал на бесконечность.

$\varepsilon = 0$ один корень

$\varepsilon \neq 0$ два корня

Мы имеем дело с **сингулярно возмущенной задачей**:
предельная точка $\varepsilon = 0$ существенно отличается от предела $\varepsilon \to 0$

Интересные для практики задачи часто сингулярны

О задачах, не являющихся сингулярными, говорят как о **регулярных**

7. Задача 2: балансы в уравнении

$$\boxed{\varepsilon x^2 + x - 1 = 0}$$

Вычисляя x_0, мы по существу заявили, что главными членами в уравнении являются 1 и x; именно они балансируют друг друга, в то время как εx^2 есть малая поправка, которая используется для итерационного улучшения решения. Но является ли это единственным возможным балансом? Рассмотрим остальные возможности.

1) Все три члена, очевидно, не могут быть одного порядка

2) Можно пытаться сбалансировать εx^2 и 1. Но тогда x есть большая величина порядка $\varepsilon^{-1/2}$. При этом член x, предполагающийся малым по сравнению с остальными много больше их. Его нечем сбалансировать

3) Последняя возможность – сбалансировать члены x и εx^2. При этом x есть величина порядка ε^{-1} и 1 действительно меньше чем x и εx^2

8. Задача 2: перенормировка

$$\boxed{\varepsilon x^2 + x - 1 = 0}$$

Т.к $x \propto \varepsilon^{-1}$, то удобно **перенормировать** его, $X = \varepsilon x$ и переписать исходную задачу в виде

$$X^2 + X - \varepsilon = 0$$

1) Ищем **разложение в виде ряда** по степеням ε

$$X(\varepsilon) = X_0 + \varepsilon X_1 + \ldots$$

2) **Подставляем** разложение в исходное уравнение

$$\begin{array}{|c|}\hline X^2 \\ +X \\ -\varepsilon \\ =0 \\ \hline\end{array} \quad \begin{array}{l} \to \\ \to \\ \to \\ \to \end{array} \quad \begin{array}{c} X_0^2 + 2\varepsilon X_0 X_1 + \ldots \\ X_0 + \varepsilon X_1 + \ldots \\ -\varepsilon \\ = 0 \end{array}$$

3) **Сравниваем** коэффициенты при различных степенях

$$\varepsilon^0 \Rightarrow X_0^2 + X_0 = 0 \Rightarrow \boxed{X_0 = -1} \qquad \cancel{X_0 = 0}$$

$$\varepsilon^1 \Rightarrow 2X_0 X_1 + X_1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{X_1 = -1}$$

приведет к регулярному корню

9. Важные моменты

- *Стандартная процедура начинается с нахождения доминирующих членов, определяющих баланс в уравнении. После того как они определены, все остальное выступает в роли малых корректирующих членов. Нам очень не повезло если более двух или трех членов уравнения будут одновременно балансовыми.*
- *Найденный баланс подсказывает необходимые перенормировки некоторых из зависимых или независимых переменных*

10. Еще раз о перенормировках

$$\boxed{\varepsilon x^2 + x - 1 = 0}$$

Как найти все полезные перенормировки? Найти все возможные балансы!

$$x = \delta X, \quad \delta = \delta(\varepsilon), \quad X \propto 1\,(\varepsilon \to 0)$$

а) $\cancel{\delta \ll 1} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\delta^2 X^2 + \delta X - 1 = (\ll 1) + (\ll 1) - 1 = 0$

б) $\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\delta^2 X^2 + \delta X - 1 = (\ll 1) + X - 1 = 0 \Rightarrow \quad X = 1 + (\ll 1)$

дает **регулярный** корень

в) $\cancel{1 \ll \delta \ll \varepsilon^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \delta^{-1}\left(\varepsilon\delta^2 X^2 + \delta X - 1\right) = (\ll 1) + X + (\ll 1) = 0$

г) $\delta = \varepsilon^{-1} \quad \Rightarrow \quad \left(\varepsilon\delta^2 X^2 + \delta X - 1\right)/\,\varepsilon\delta^2 = X^2 + X + (\ll 1) = 0$

$X = -1 + (\ll 1)$ дает **сингулярный** корень

д) $\cancel{\delta \gg \varepsilon^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \left(\varepsilon\delta^2 X^2 + \delta X - 1\right)/\,\varepsilon\delta^2 = X^2 + (\ll 1) + (\ll 1) = 0$

11. Задача 3: Нецелые степени

$$\boxed{(1-\varepsilon)x^2 - 2x + 1 = 0}$$

$\varepsilon = 0$ двойной корень

$\varepsilon \neq 0$ два корня

$$x(\varepsilon) = 1 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^3 x_3 + \ldots$$

$$(1-\varepsilon)x^2 \to 1 + \varepsilon(2x_1 - 1) + \varepsilon^2(2x_2 + x_1^2 - 2x_1) + \ldots$$

$$-2x \to -2 - \varepsilon 2x_1 - \varepsilon^2 2x_2 + \ldots$$

$$+1 \to +1$$

$$= 0 \to = 0$$

$$\varepsilon^0 \Rightarrow -1 + 2 - 1 = 0, \qquad \varepsilon^1 \Rightarrow 2x_1 - 1 - 2x_1 = 0 \Rightarrow -1 \overset{?}{=} 0$$

Причина трудности: $x = \dfrac{1 \pm \varepsilon^{1/2}}{1-\varepsilon} \Rightarrow x = 1 + \varepsilon^{1/2} + \varepsilon + \varepsilon^{3/2} + \ldots$

Надо было раскладывать по дробным степеням $x(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/2} x_1 + \varepsilon x_2 + \ldots$

12. Задача 3: Правильное ФАР

$$\boxed{(1-\varepsilon)x^2 - 2x + 1 = 0}$$

$$x = 1 + \varepsilon^{1/2}x_1 + \varepsilon x_2 + \varepsilon^{3/2}x_3 + \ldots$$

$$\begin{array}{llllll}
1 & +\varepsilon^{1/2}2x_1 & +\varepsilon\left(2x_2 + x_1^2\right) & +\varepsilon^{3/2}\left(2x_3 + 2x_1x_2\right) & +\ldots \\
 & & -\varepsilon & -\varepsilon^{3/2}2x_1 & +\ldots \\
-2 & -\varepsilon^{1/2}2x_1 & -\varepsilon 2x_2 & -\varepsilon^{3/2}2x_3 & +\ldots \\
+1 & & & & \\
=0 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\varepsilon^0 & 1 - 2 + 1 = 0 & \\
\varepsilon^{1/2} & 2x_1 - 2x_1 = 0 & \\
\varepsilon^1 & 2x_2 + x_1^2 - 1 - 2x_2 = 0 & \Rightarrow x_1 = \pm 1 \\
\varepsilon^2 & 2x_3 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 2x_3 = 0 & \Rightarrow x_2 = 1
\end{array}$$

13. Задача 3: Поиск верного ФАР

$$\boxed{(1-\varepsilon)x^2 - 2x + 1 = 0}$$

$$x(\varepsilon) = 1 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \dots$$

$$1 >> \delta_1(\varepsilon) >> \delta_2(\varepsilon) >> \dots \;, \qquad x_i \propto 1$$

$$\begin{array}{|c|}\hline (1-\varepsilon)x^2 \\ -2x \\ +1 \\ =0 \\ \hline \end{array}
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array}
\begin{array}{l} \cancel{1} + 2\cancel{\delta_1} x_1 + 2\cancel{\delta_2} x_2 + \delta_1^2 x_1^2 + \dots - \varepsilon - \square \\ \cancel{-2} - 2\cancel{\delta_1} x_1 - 2\cancel{\delta_2} x_2 + \dots \\ \cancel{+1} \\ =0 \end{array}$$

если $\delta_1^2(\varepsilon) >> \varepsilon$ то $x_1 = 0$ **Невозможно** т.к. $x_1 \propto 1$

если $\delta_1^2(\varepsilon) = \varepsilon$ то $\boxed{\delta_1 = \varepsilon^{1/2},\ x_1 = \pm 1}$

если $\delta_1^2(\varepsilon) << \varepsilon$ то $x_1 >> 1$ **Невозможно** т.к. $x_1 \propto 1$

14. Важный момент

- *В ряде случаев структура ФАР не может задаваться заранее, но должна определяться в ходе стандартной асимптотической процедуры.*

15. Итерации: задача 2

Регулярный корень

Переформулировка $\varepsilon x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 - \varepsilon x^2$

Итерационный процесс и начальное приближение $x_{n+1} = 1 - x_n^2, \quad x_0 = 1$

1-я итерация $x_1 = 1 - \varepsilon$

2-я итерация $x_2 = 1 - \varepsilon(1-\varepsilon)^2 = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon^2 \ldots$

Сингулярный корень

Переформулировка $\varepsilon x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{\varepsilon} + \dfrac{1}{\varepsilon x}$

Итерационный процесс и начальное приближение $x_{n+1} = -\dfrac{1}{\varepsilon} + \dfrac{1}{\varepsilon x_n}, \quad x_0 = -\dfrac{1}{\varepsilon}$

1-я итерация $x_1 = -\varepsilon^{-1} - 1$

2-я итерация $x_2 = -\varepsilon^{-1} - (1+\varepsilon)^{-1} = -\varepsilon^{-1} - 1 + \varepsilon + \ldots$

16. Итерации: задача 3

Переформулировка

$$(1-\varepsilon)x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = \varepsilon x^2 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{\varepsilon}x$$

Итерационный процесс и начальное приближение

$$x_{n+1} = 1 \pm \varepsilon^{1/2} x_n, \qquad x_0 = 1$$

1-я итерация $\quad x_1 = 1 \pm \varepsilon^{1/2}$

2-я итерация $\quad x_2 = 1 \pm \varepsilon^{1/2} + \varepsilon$

17. Итерации: почему это работает?

$x = f(x)$ - исходное уравнение $\qquad$ x^* - корень

$x_{n+1} = f(x_n)$ - итерационный процесс $\qquad$ $\delta_n = x_n - x^*$ - погрешность

$$\delta_{n+1} = x_{n+1} - x^* = f(x_n) - f(x^*) =$$
$$= f(x^* + \delta_n) - f(x^*) = f'(x^*)\delta_n + o\left(\delta_n\right)$$

Итерации будут уменьшать ошибку при $\left|f'(x_*)\right| < 1$

Задача 1	$f = \sqrt{1 - \varepsilon x}$	$x_* \approx 1$	$f'(x_*) \approx -\varepsilon / 2$
Задача 2а	$f = 1 - \varepsilon x^2$	$x_* \approx 1$	$f'(x_*) \approx -2\varepsilon$
Задача 2б	$f = -1/\varepsilon + 1/\varepsilon x$	$x_* \approx -1/\varepsilon$	$f'(x_*) \approx -\varepsilon$
Задача 3	$f = 1 + \varepsilon^{1/2} x$	$x_* \approx 1$	$f'(x_*) \approx \varepsilon^{1/2}$

18. Упражнения к лекции 1

1. Найдите первые два члена в асимптотическом разложении всех вещественных корней следующих уравнений

$$\varepsilon x^3 - x^2 + x + \tfrac{3}{4} = 0 \qquad \varepsilon x^3 + \sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\varepsilon x^3 - x + 2\sqrt{x} - 1 = 0 \qquad \varepsilon^5 x^3 - \varepsilon x - \varepsilon + 1 - e^{-x} = 0$$

2. Проделайте то же самое для уравнений

$$1 + \varepsilon - 2\sqrt{\varepsilon} + \left(x\sqrt{\varepsilon} - 1\right)^3 - \sqrt{\varepsilon}\left(x + e^{-x/\varepsilon}\right) = 0$$

$$2\varepsilon x + \frac{2(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon x} - e^{-|x|/\varepsilon} = 0$$