Логические основы компьютеров

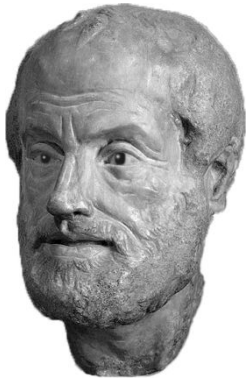
Логические операции. Таблицы истинности

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2013 http://kpolyakov.spb.ru

Логика, высказывания

Логика (др.греч. *λογικος*) – это наука о том, как правильно рассуждать, делать выводы, доказывать утверждения.

Формальная логика отвлекается от конкретного содержания, изучает только истинность и ложность высказываний.



Аристотель
(384-322 до н.э.)

Логическое высказывание – это повествовательное предложение, относительно которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Высказывание или нет?

- ✓ Сейчас идет дождь.
- ✓ Жирафы летят на север.
- История – интересный предмет.
- ✓ У квадрата – 10 сторон и все разные.
- Красиво!
- В городе N живут 2 миллиона человек.
- Который час?

Логика и компьютер

Двоичное кодирование – все виды информации кодируются с помощью 0 и 1.

Задача – разработать оптимальные правила обработки таких данных.

Почему «логика»?

Результат выполнения операции можно представить как истинность (1) или ложность (0) некоторого высказывания.

Джордж Буль разработал основы алгебры, в которой используются только 0 и 1 (алгебра логики, булева алгебра).

Обозначение высказываний

A – Сейчас идет дождь.
B – Форточка открыта.

простые высказывания (элементарные)

Любое высказывание может быть ложно (0) или истинно (1).

Составные высказывания строятся из простых с помощью логических связок (операций) «**и**», «**или**», «**не**», «**если … то**», «**тогда и только тогда**» и др.

A и B	Сейчас идет дождь и открыта форточка.
A или не B	Сейчас идет дождь или форточка закрыта.
если A, то B	Если сейчас идет дождь, то форточка открыта.
A тогда и только тогда, когда B	Дождь идет тогда и только тогда, когда открыта форточка.

Операция НЕ (инверсия)

Если высказывание **A** истинно, то «**не A**» ложно, и наоборот.

A	не A
0	1
1	0

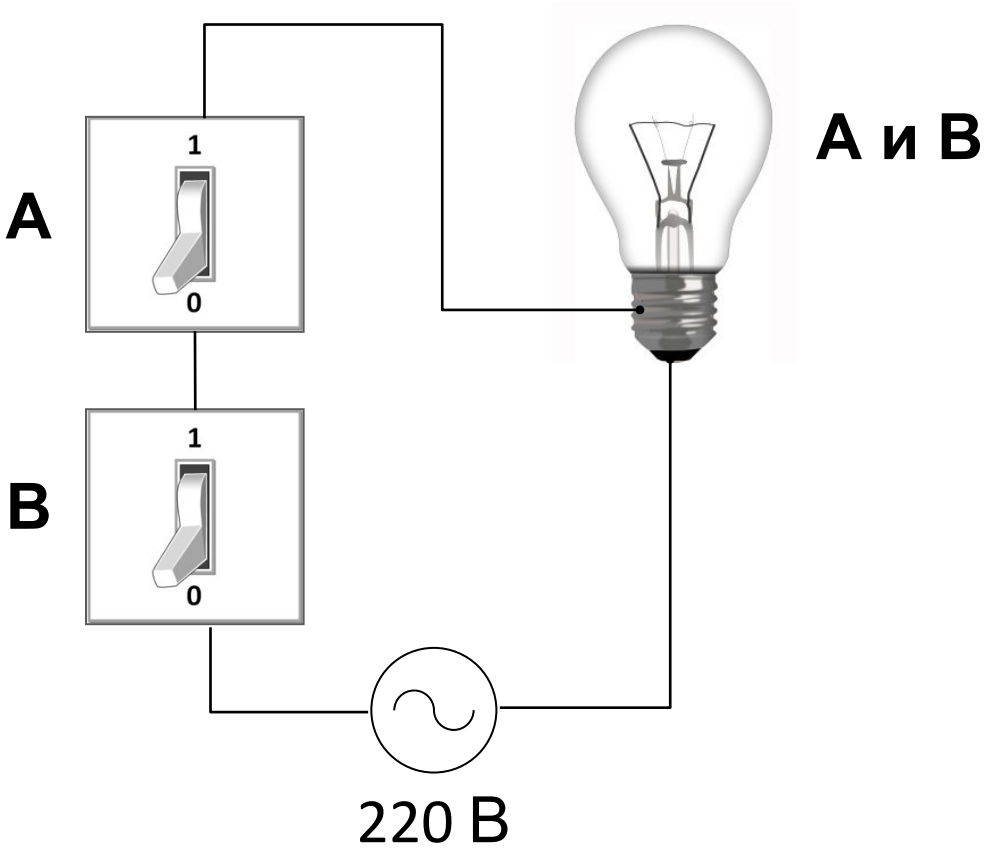
также $\overline{\mathbf{A}}$, $\neg\mathbf{A}$, **not A** (Паскаль), **! A** (Си)

таблица истинности операции НЕ

Таблица истинности логического выражения X – это таблица, где в левой части записываются все возможные комбинации значений исходных данных, а в правой – значение выражения X для каждой комбинации.

Операция И

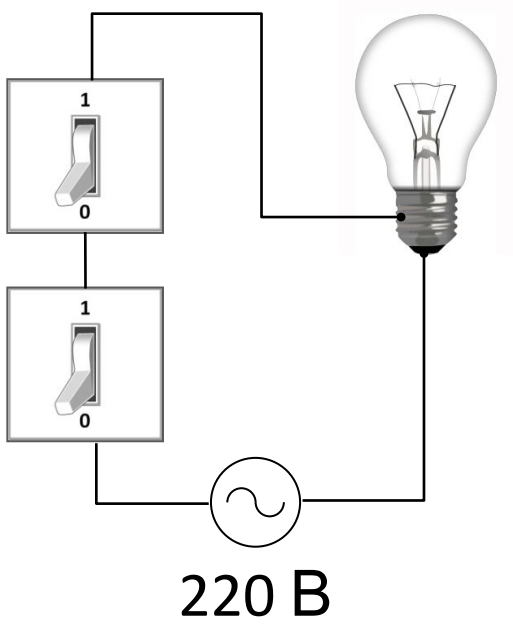
Высказывание «**A и B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** истинны одновременно.



Операция И (логическое умножение, конъюнкция)

A	B	A и B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

также: **A·B**, **A ∧ B**, **A and B** (Паскаль), **A && B** (Си)

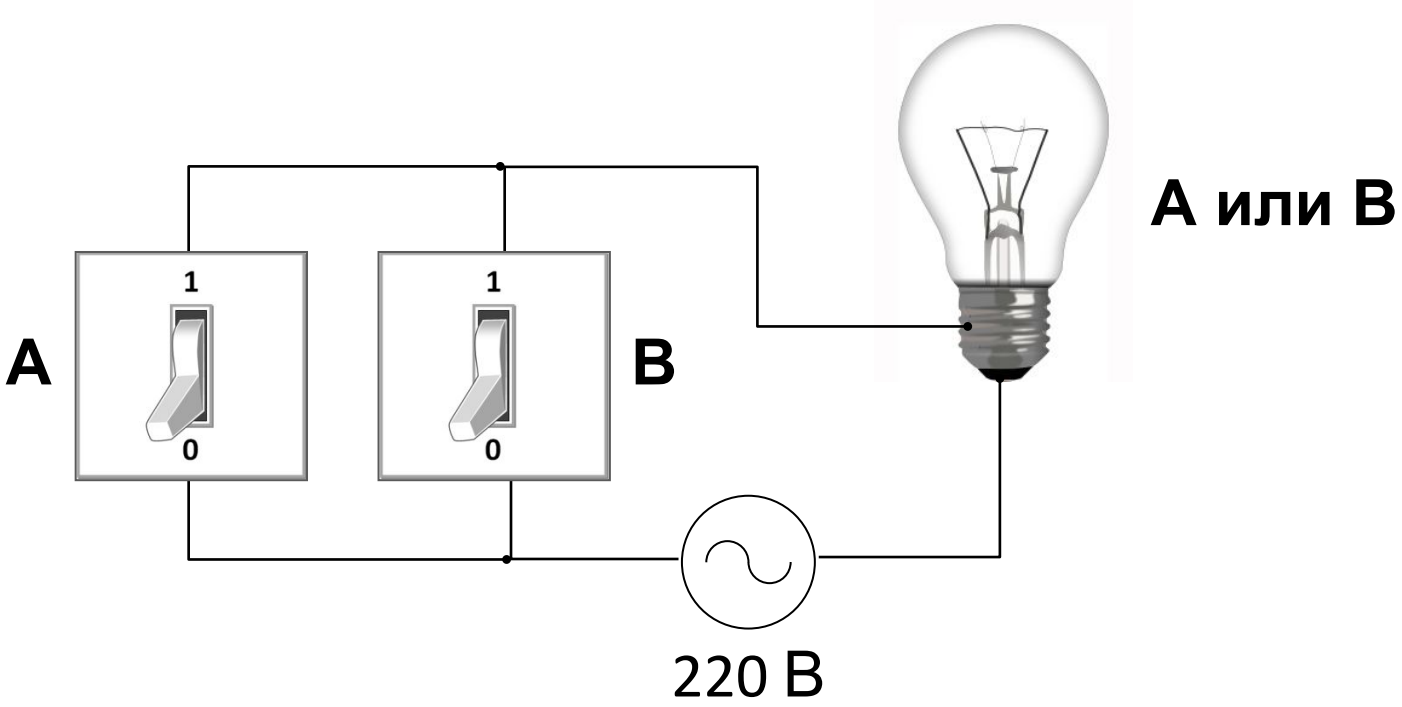


A ∧ B

конъюнкция – от лат. *conjunctio* — соединение

Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

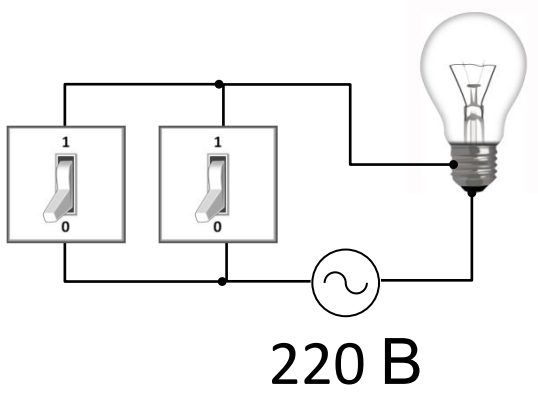
Высказывание «**A или B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, или оба вместе.



Операция ИЛИ (логическое сложение, дизъюнкция)

A	B	A или B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

также: **A+B**, **A ∨ B**, **A or B** (Паскаль), **A || B** (Си)



дизъюнкция – от лат. *disjunctio* — разъединение

Операция «исключающее ИЛИ»

Высказывание «**A ⊕ B**» истинно тогда, когда истинно **A** или **B**, но ***не оба одновременно*** (то есть **A ≠ B**).

«Либо пан, либо пропал».

A	B	A ⊕ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

также:
A xor B (Паскаль),
A ^ B (Си)

Импликация («если …, то …»)

Высказывание «**A** → **B**» истинно, если не исключено, что из **A** следует **B**.

A – «Правильно записано условие задачи».

B – «Задача решена верно».

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$A \rightarrow B = \overline{A} + B$$

Импликация («если …, то …»)

«Если Вася идет гулять, то Маша сидит дома».

A – «Вася идет гулять».

B – «Маша сидит дома».

$$A \rightarrow B = 1$$

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

А если Вася не идет гулять?

Маша может пойти гулять (B=0), а может и не пойти (B=1)!

Эквивалентность («тогда и только тогда, …»)

Высказывание «**A** ↔ **B**» истинно тогда и только тогда, когда **A** и **B** равны.

A	B	A ↔ B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

© К.Ю. Поляков, Е.А. Ерёмин, 2013 http://kpolyakov.spb.ru

Базовый набор операций

С помощью операций **И, ИЛИ** и **НЕ** можно реализовать любую логическую операцию.

Вычисление логических выражений

1 4 2 5 3

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

Порядок вычислений:

- скобки
- НЕ
- И
- ИЛИ, исключающее ИЛИ
- импликация
- эквивалентность

Задание 1 Составление таблиц истинности

$$X = A \cdot B + A \cdot C + B \cdot C$$

A	B	C	A·B	A·C	B·C	X
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Задание 2. Какие из приведенных слов удовлетворяют логическому условию:

(первая буква согласная→вторая буква согласная) & (последняя буква гласная → предпоследняя буква гласная)?

1) Тренаж
2) Мафия
3) Озон
4) Игра

Задание 3 Построить таблицу истинности

$$a \wedge \neg b \vee (a \vee b) \wedge c$$

Задание 4 Построить таблицу истинности

$$((a \wedge b) \equiv \neg c) \wedge (b \rightarrow d).$$