Применение вычислительных методов в теории приближений непрерывных функций линейными положительными операторами и многочленами Бернштейна.

Введение

Теория приближений функций играет важную роль в математике и ее приложениях. В прикладных вопросах возникает задача восстановления функции по имеющейся информации об определённых свойствах этой функции. Используя эту информацию, математики приближённо представляют исследуемую величину с помощью некоторых простых для вычислительной работы функций, например, с помощью многочленов. Цель моей работы: обсуждение свойств многочленов Бернштейна и теорем о приближении непрерывных функций многочленами Бернштейна.

Я уточнил и дополнил полученные результата полученные результаты, рассматривая задачи, связанные с этим вопросами.

Моя дипломная работа состоит из четырех глав. Первая посвящена многочленами Бернштейна и их свойства, вторая – модулю непрерывности, в третьей рассматривается аппроксимация производных, четвертая глава посвящена решению задач.

Многочлены Бернштейна.

Пусть f - действительная функция, заданная на отрезке [0; 1], n – натуральное число, $p_{kn}(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, k = 0,1,\dots,n.$

Многочлен Бернштейна $B_n(f)$ функции f определяют формулой

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{kn}(x)$$

Поскольку каждая из функций $p_{kn}(x)$ является многочленом степени n, то $B_n(f,x)$ также будет многочленами степени n.

Функции, которые принимает в точках $\frac{k}{n}, k = 0,1,\dots,n$, одинаковые значения, имеют один и тот же многочлен Бернштейна. Поэтому для оценки уклонения данного многочлена от функции f на отрезке [0; 1] нужно располагать дополнительной информацией о свойствах функции на этом отрезке. В качестве такого свойства мы будем использовать свойство непрерывности. Полагая, что функция f непрерывна на отрезке [0; 1] мы покажем, что при увеличении n уклонение многочлена $B_n(f)$ от функции f стремится к нулю. Предварительно установим необходимые для дальнейшего свойства многочленов $p_{kn}(x)$

Лемма 1. При любом натуральном n и для всякого действительного x справедливы равенства (1):

$$а)\ \sum_{k=0}^{n} p_{kn}(x) = 1$$

$$б)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} p_{kn}(x) = x$$

$$в)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} p_{kn}(x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

Следствие. Имеет место формула $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 p_{kn}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$.

Теорема Бернштейна.

Мы называем уклонением многочлена Бернштейна от функции f в точке x величину $|f(x) - B_n(f,x)|$. Если при $n \to \infty$ оно стремится к нулю, то говорят, что последовательность $\{B_n(f,x)\}$ сходится к $f(x)$ и пишут

$$\lim_{n\to\infty} B_n(f;x) = f(x).$$

Уклонением многочлена $B_n(f)$ от функции f на отрезке [0; 1] называется величина $\|f - B_n(f)\| = \max\{|f(x) - B_n(f;x)|: x \in [0;1]\}$ - так называемое равномерное уклонение. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - B_n(f)\| = 0$, то говорят что последовательность $\{B_n(f)\}$ равномерно на отрезке [0; 1] сходится к функции f. Этот факт записывают в виде $B_n(f) \to f$ при $n \to \infty$.

Терема 1 (С.Н. Бернштейн). Для любой непрерывной на отрезке [0;1] функции f последовательность $\{B_n(f)\}$ равномерно на этом отрезке сходится к функции f.

§ 4. Теорема Вейерштрасса.

Теорема 2 (К. Вейерштрасс). Для всякой непрерывной на отрезке функции найдется такая последовательность алгебраических многочленов, которая равномерно на данном отрезке сходится к этой функции.

Для отрезка [0; 1] утверждение теоремы следует из теоремы Бернштейна, так как в качестве последовательности многочленов можно взять последовательность $\{B_n(f)\}$.

Модуль непрерывности.

Пусть функция f определена на отрезке $[a;b]$. Модулем непрерывности функции f называется функция $\omega(f): [0;b-a] \to R$, заданная формулой

$$\omega(f;u) = \sup\{|f(x)-f(t)|: x,t \in [a;b], |x-t| \le u\}.$$

Из этого определения следует, что $\omega(f;0) = 0$ и при любых x и t из отрезка $[a;b]$ выполняется равенство $|f(x)-f(t)| \le \omega(f,|x-t|)$.

Свойства модуля непрерывности.

1) Для любой непрерывной на отрезке функции выполняется условие $\lim\limits_{u\to 0+0} \omega(f;u) = 0$;

2)Если $u_1 < u_2$, то $\omega(f;u_1) \le \omega(f;u_2)$;

3)$\omega(f;u_1+u_2) \le \omega(f;u_1) + \omega(f;u_2)$;

4)Если функция f непрерывна на отрезке $[\mathrm{a},b]$, то ее модуль непрерывности будет непрерывной функцией на отрезке $[0,b-\mathrm{a}]$.

5)При любом натуральном n и $nu \in [0,b-\mathrm{a}]$ имеет место неравенство $\omega(f;nu) \le n\omega(f;u)$;

6)Для произвольного положительного числа λ, при котором $\lambda u \in [0,b-\mathrm{a}]$ и $(\lambda+1)u \in [0,b-\mathrm{a}]$ будет $\omega(f;\lambda u) \le (\lambda+1)\omega(f;u)$;

7)Если $f \neq const$ и $h = b-a$, то при любом $u \in [0,b-\mathrm{a}]$ справедливо неравенство $\omega(f;u) \ge \frac{1}{2h}\omega(f;h)u$.

Аппроксимация производных.

Теперь мы обратимся к изучению производных от многочленов Бернштейна. Продифференцируем равенство $B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{kn}(x)$ тогда мы получим формулу

$$B_n'(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) p_{kn}'(x)$$

Здесь $p_{kn}'(x) = C_n^k\left[kx^{k-1}(1-x)^{n-k} - (n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}\right] = n\left\{p_{k-1,n-1}(x) - p_{k,n-1}(x)\right\}, 1 \leq k \leq n-1.$

Теорема. Если функция f имеет на отрезке $[0;1]$ непрерывную производную f', то последовательность $\{B_n'(f)\}$ равномерно на этом отрезке сходится к f'.

Следствие. Для любой функции f, имеющей на отрезке [a; b] непрерывную производную f' существует такая последовательность алгебраических многочленов $\{P_n\}$, что при $n \to \infty$ равномерно на [a; b] выполняются соотношения: $P_n \to f$ и $P_n' \to f'$.

Примеры.

Пример 1.

Составить многочлен Бернштейна четвертой степени для функции $f(x) = |x - 0{,}5|$, и найти уклонение $B_4(f,x)$ от $f(x)$ в точках $x_1 = 0{,}25$, $x_2 = 0{,}5$ и $x_3 = 0{,}75$.

Решение:

$$B_4(f,x) = \frac{1}{4}\left[2(1-x)^4 + 4x(1-x)^3 + 4(1-x)x^3 + 2x^4\right] = \frac{1}{2}\left[1 - 2x + 4x^3 + 2x^4\right].$$

$$|B_4(f,x) - f(x)| = \begin{cases} \frac{7}{256}, & \text{если } x = 0{,}25 \\ \frac{3}{16}, & \text{если } x = 0{,}5 \\ \frac{7}{256}, & \text{если } x = 0{,}75 \end{cases}$$