

Антонов В. А.

докт. техн. наук

МЕТОДОЛОГИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ФАКТОРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИРОДНЫХ И ТЕХНОГЕННЫХ ЯВЛЕНИЙ

Назначение

Научные экспериментальные исследования естественных природно-физических и техногенных явлений со сложным составом множества разнообразно влияющих факторов методом математического нелинейного моделирования.

Цель:

- извлечение новых знаний о процессах и связях наблюдаемых явлений;
- оптимизация режимов и параметров их практического применения;
- обоснование управления процессами и прогнозирование.

Содержание:

- функционально-факторный принцип формирования математической модели;
- допустимая погрешность моделирования;
- идентификация коэффициентов и параметров модели;
- метод приближений параболической вершины;
- оценка адекватности созданной модели по ее соответствию данным эксперимента;
- программные средства компьютерных расчетов;
- извлечение и интерпретация закономерностей природных и техногенных явлений.

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ФАКТОРНЫЙ ПРИНЦИП ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Применение в моделировании известных компьютерных программ MS EXCEL, STATISTICA, MATHCAD ограничено:

MS Excel, Statistica

- линейной зависимостью функции y от аргументов $x_1, x_2, x_3..$, а также наличием одной монотонности изменения y ;

- нелинейной полиномиальной зависимостью y от x с целочисленными показателями степени, выражающей формальную аппроксимацию в узких интервалах интерполяции.

Mathcad

- нелинейными зависимостями y от x , выраженными простыми дважды дифференцируемыми комбинациями элементарных функций, с рассчитываемыми параметрами и коэффициентами при условии, что их стартовые значения удачно заданы.

ВОЗМОЖНОСТИ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ РАСШИРЯЮТСЯ ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОЛОГИИ НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ФАКТОРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Повышается достоверность математического описания сложных причинно-следственных связей и зависимостей y от x наблюдаемого естественного и техногенного явления в форматах 2D, 3D и более.

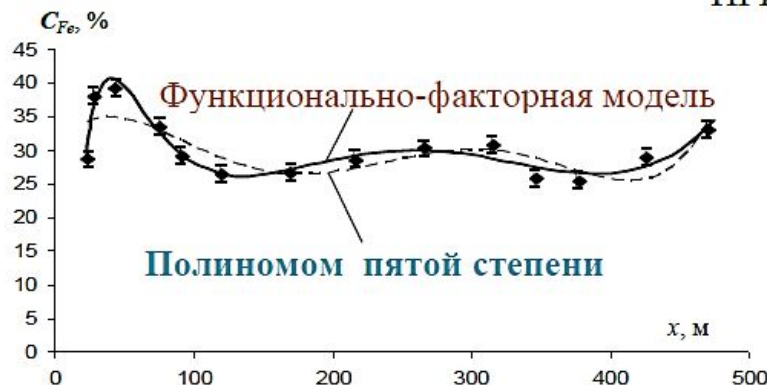
ПРИМЕР

Распределение содержания железа в руде вдоль профиля x описывается вместо формализованного малодостоверного ($R^2=0,596$) и неинтерпретируемого полинома пятой степени

$$C_{Fe} = A_1x^5 + A_2x^4 + A_3x^3 + A_4x^2 + A_5x + B$$

наиболее достоверной ($R^2=0,934$) и интерпретируемой по факторам моделью с пятью степенными функциями

$$C_{Fe} = A_1x^{2,21} + A_2x^{1,23} + A_3x^{0,33} + A_4x^{2,05} + A_5x^{0,74} + B$$



ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ - математическое функциональное описание свойств, состояния и изменений наблюдаемого естественно-природного или техногенного явления.

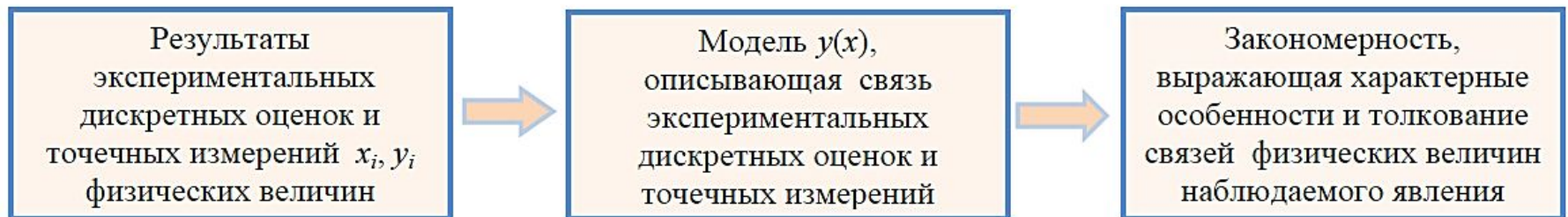
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ

- существенная и устойчиво повторяющаяся связь экспериментально наблюдаемых природных, техногенных явлений, отображающая их характерные черты и формы, этапы становления и развития;

- обнаруживается путем создания, анализа и интерпретации моделей, описывающих влияние в наблюдаемом явлении независимых величин x на зависимую величину y .

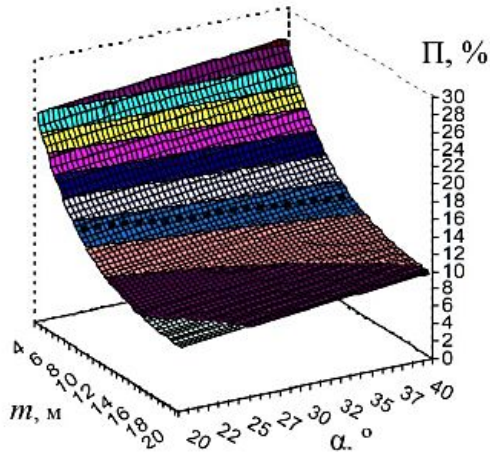
ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

По данным экспериментальных дискретных оценок или точечных измерений независимых и зависимых от них физических величин x_i, y_i , характеризующих с погрешностью воспроизводимости σ , природное или техногенное явление, требуется построить модель $y(x)$, отображающую с адекватной погрешностью σ_m их причинно-следственные связи и свойства, объясняющие наблюдаемое явление.

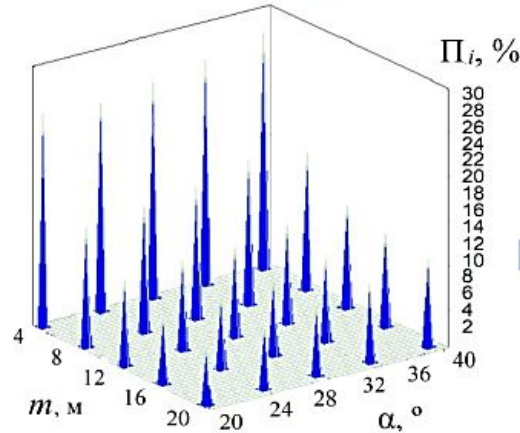


ПО ИНФОРМАТИВНОСТИ РАЗЛИЧАЮТ МОДЕЛИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И ЦИФРОВЫЕ

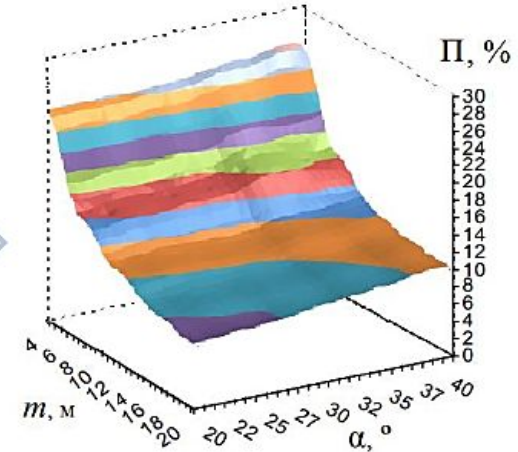
Функциональная модель



Данные эксперимента



Цифровая модель



- формируется с учетом причинно-следственных связей всей выборки данных эксперимента;

- реализуется по теоретическим представлениям или регрессионной аппроксимацией;

- выражается математическими функциями

$$P = 1,5 \alpha^{0,4943} + 40,67 e^{-\frac{m}{4,68}};$$

- статистически устойчива при воспроизводимости эксперимента, (перераспределении) его данных;

- **отображает связь всех данных эксперимента.**

- формируется в узлах сетки с учетом локального влияния расположенных вблизи частей данных эксперимента;

- применяются методы конечных элементов, Кригинга, обратных расстояний;

- выражается цифровыми значениями в виде таблицы (матрицы)

11,28	11,31	11,38	11,38	11,45	11,46
10,95	10,96	10,95	10,94	11,00	11,11
10,76	10,74	10,73	10,75	10,78	10,88
10,61	10,59	10,60	10,61	10,65	10,74
10,48	10,46	10,44	10,46	10,50	10,60

- статистически неустойчива при воспроизводимости эксперимента, (перераспределении) его данных.

- **не отображает связь всех данных эксперимента.**

ФАКТОРЫ

– Это причины, движущие природные обстоятельства и техногенные действия, оказывающие влияние на наблюдаемое явление и определяющие его характерные черты, этапы становления и развития.

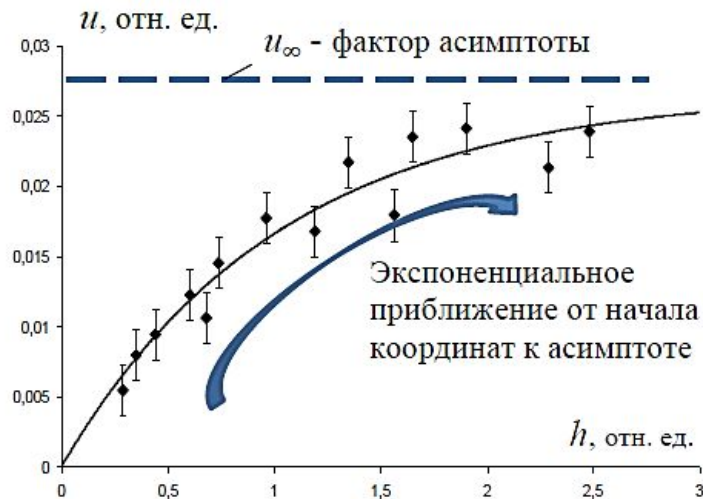
Действие и влияние факторов в модели выражается простыми и сложными комбинациями математических функций в форматах 2D, 3D и больше.

СТРУКТУРА ФУНКЦИОНАЛЬНО-ФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ

формируется в обобщенном математическом виде:

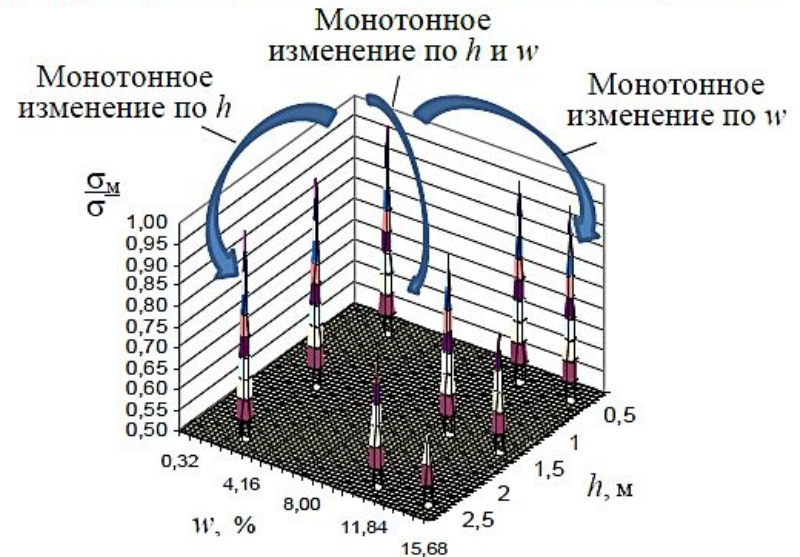
- по теоретическим представлениям факторного влияния, объясняющим наблюдаемое явление;
- по характерным особенностям (наблюдаемым феноменам) изменения экспериментально измеренных значений зависимой величины.

Формирование по теоретическим представлениям



$$u(h) = u_{\infty} \left(1 - e^{-\frac{h}{\lambda}}\right)$$

Формирование по особенностям данных эксперимента



$$\frac{\sigma_M}{\sigma} = A_1 w^{\mu_1} + A_2 h^{\mu_2} + A_3 w^{\mu_3} h^{\mu_4} + B$$

ДОПУСТИМАЯ ПОГРЕШНОСТЬ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Функциональная модель описывает изменение зависимой величины с погрешностью σ_m , соответствующей среднеквадратичной погрешности σ , данных эксперимента.

Учитывается, что модельное отображение не может быть точнее неизбежного случайного рассеяния (расхождения) результатов повторных экспериментальных измерений, происходящего из-за ошибок применяемых приборов, методов и влияния побочных (менее значимых) явлений.

Чем больше погрешность эксперимента, тем больше погрешность модели.

Интервал допустимой погрешности модели оценивается с учетом воспроизводимости данных

эксперимента с вероятностью P по распределению Пирсона $\sigma_3 \sqrt{\frac{f}{\chi_{\alpha_2, f}^2}} < \sigma_m < \sigma_3 \sqrt{\frac{f}{\chi_{\alpha_1, f}^2}}$,

f - число степеней свободы при определении погрешности σ_3 ;

$\chi_{\alpha_1, f}^2, \chi_{\alpha_2, f}^2$ - квантили распределения Пирсона на уровне значимости α_1, α_2 [$\alpha_1 = (1+P)/2, \alpha_2 = (1-P)/2$].

В моделях регрессии рассчитываются нижняя R_n^2 и верхняя R_b^2 границы допустимого интервала

коэффициента детерминации: $R_n^2 = 1 - \frac{f \cdot \sigma_3^2}{\chi_{\alpha_1, f}^2 \cdot D_y}$; $R_b^2 = 1 - \frac{f \cdot \sigma_3^2}{\chi_{\alpha_2, f}^2 \cdot D_y}$.

D_y – дисперсия экспериментальных значений зависимой величины.

Идентификация коэффициентов и параметров модели проводится из условий приведенных ограничений ее погрешности или коэффициента детерминации.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Модель M изменения физической величины представляется в виде суммы детерминированной компоненты U (функции) и доверительного интервала случайного отклонения (среднеквадратичной погрешности σ_m)

$$M = U(x, A, B, \xi) \pm \sigma_m$$

x – аргументы;
 A – коэффициенты при функциях; B – свободный член;
 ξ – функциональные параметры.

Коэффициенты и параметры модели определяются в процессе последовательных их приближений к оптимальным значениям по критерию сведения среднеквадратичной погрешности модели σ_m к допустимому минимуму

$$\sigma_m = \left\langle \frac{1}{n} \sum_n [U_{\text{э}i} - U_i(x_i, A, \xi)]^2 \right\rangle^{0,5} \rightarrow \text{допустимый минимум.}$$

РАСЧЕТЫ ПРОВОДЯТСЯ СОВМЕЩЕННО ДВУМЯ МЕТОДАМИ:

- коэффициенты A, B - методом наименьших квадратов (МНК);
- параметры ξ - методом приближений параболической вершины (МППВ).

Метод МНК

Основан на формировании системы линейных алгебраических уравнений, путем дифференцирования суммы квадратов отклонений модели от данных эксперимента по коэффициентам A, B при заданных функциональных параметрах ξ , и последующем решении системы относительно этих коэффициентов.

Метод МППВ

Основан на последовательном приближении множества функциональных параметров ξ к оптимальным значениям путем аппроксимации целевой функции σ_m параболической функцией, построенной по общим опорным ξ_v -точкам, с заменой в каждом приближении опорной точки ξ_v с наибольшим значением σ_m точкой ξ_{vB} , рассчитанной по вершине параболической функции.

В итоге оптимизации МППВ-МНК рассчитывается в области рациональных чисел (положительных, отрицательных, дробных) совокупность функциональных параметров и коэффициентов модели, при которых ее погрешность становится наименьшей.

МЕТОД ПРИБЛИЖЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ВЕРШИНЫ

Экстремальная область функции погрешности модели $\sigma_m(\xi)$ аппроксимируется m -мерной параболической функцией $P_k(\xi)$ вида:

$$P_k = C_k + \sum_{j=1}^m (C_{j1k} \xi_j + C_{j2k} \xi_j^2),$$

где ξ_{jk} – функциональные параметры; C_k, C_{j1k}, C_{j2k} – коэффициенты.

Аппроксимацию в k -приближении проводят по опорным v -точкам, принадлежащим функциям σ_m и P_k , взятым в количестве $t = 2m + 1$. По формуле $\xi_{jBB} = -C_{j1k} / 2C_{j2k}$ рассчитывают совокупность параметров ξ_{jk} , соответствующих вершине параболической функции.

Формируют новую опорную точку по найденной совокупности параметров вершины ξ_{jk} и соответствующей погрешности модели $\sigma_m(\xi_{jk})$. Переход в следующее $(k+1)$ -приближение осуществляется заменой точки с наибольшим значением σ_m новой опорной точкой (с пониженным значением σ_m).

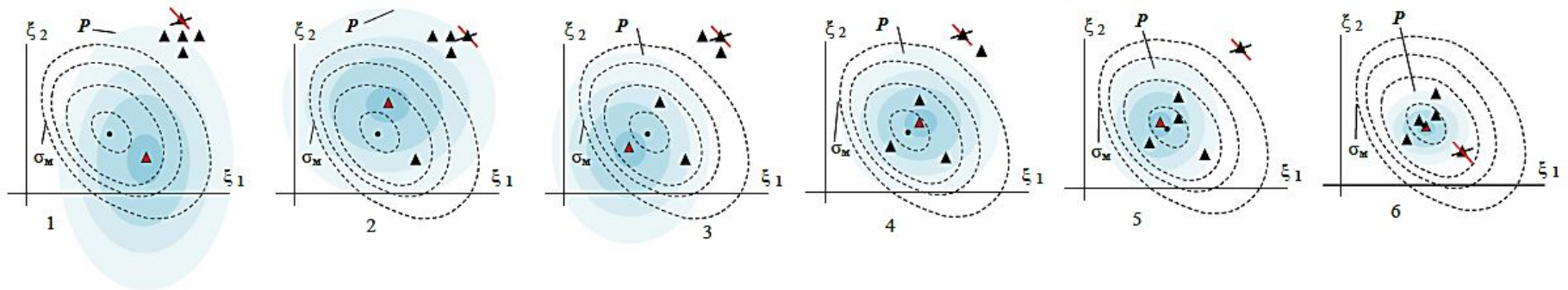
В последующих приближениях значения σ_m в опорных точках дискретно уменьшаются. Их параметры ξ_{jk} концентрируются и стягиваются к искомым оптимальным значениям, соответствующим ограниченному минимуму погрешности σ_m .

Содержание методик МППВ

Обозначение методики	M3T	M5T	M7T	M9T	M11T
Количество определяемых параметров	1	2	3	4	5
Количество опорных точек	3	5	7	9	11

Пример расчетов МППВ

Последовательные приближения опорных точек к оптимальным значениям двух параметров ξ_1 и ξ_2 по методике M5T



КОМПЬЮТЕРНЫЕ РАСЧЕТЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ в среде Microsoft office Excel

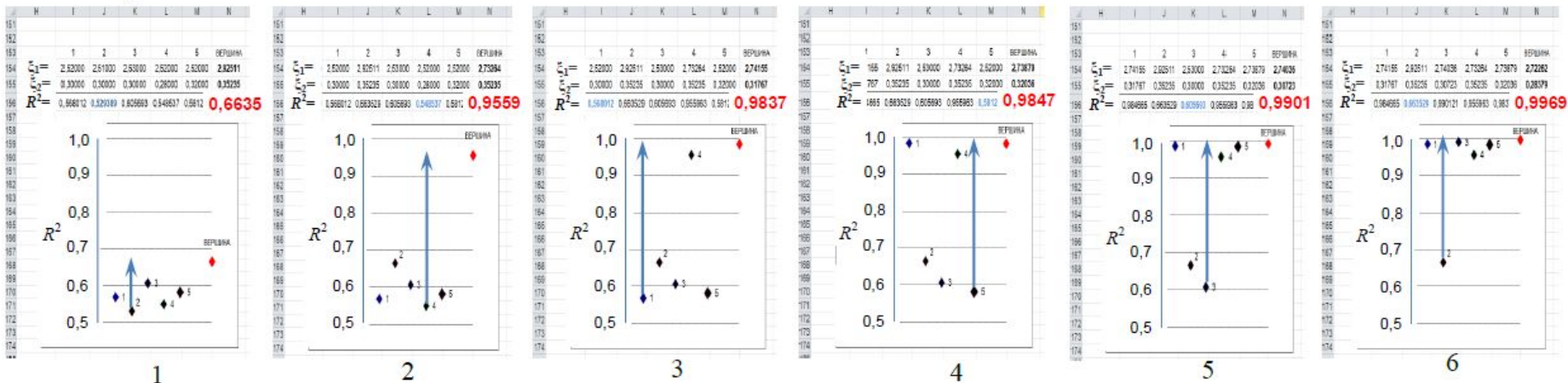
Расчет коэффициентов и функциональных параметров модели в формате Excel проводят в трех взаимосвязанных модулях:

- **модуль целевой функции** проводит расчет значений модели в узловых экспериментальных точках и целевой функции (σ_m или R^2) в опорных точках МППВ;
- **модуль МНК** проводит расчет коэффициентов $A_1, A_2, A_3 \dots$ и B ;
- **модуль МППВ** проводит расчет функциональных параметров $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots$

Операции МППВ по перемещению параметров $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \dots$ к оптимальным значениям проводятся по макросам – кодам, написанным на встроенном в Excel языке VBA (Visual Basic for Application).

ПРИМЕР

расчета и последовательных (1, 2, 3 ...) приближений в МППВ опорных точек двух функциональных параметров ξ_1, ξ_2 к их оптимальным значениям по методике М5Т с целевой функцией роста коэффициента детерминации R^2 модели.



ОЦЕНКА АДЕКВАТНОСТИ СОЗДАННОЙ МОДЕЛИ ПО ЕЕ СООТВЕТСТВИЮ ДАНЫМ ЭКСПЕРИМЕНТА

ОЦЕНИВАЕТСЯ И ПРОВЕРЯЕТСЯ:

- **соответствие погрешности модели σ_m (или коэффициента ее детерминации R^2)
предварительно установленному допустимому интервалу**

Превышение σ_m над максимально допустим значением (при наличии неравенств $\sigma_m > \sigma_{m(\max)}$, $R^2 < R_{н}^2$) свидетельствует о недостаточном учете значимых (закономерных) факторов исследуемого явления. Общий вид модели следует дополнить их функциями.

Снижение σ_m ниже минимально допустимого значения (при наличии неравенств $\sigma_m < \sigma_{m(\min)}$, $R^2 > R_{в}^2$) указывает на избыточный учет факторов в числе незначимых (случайных). Тогда их функции надо исключить из общего вида модели.

- **наличие нормальных и гомоскедастичных отклонений модели от данных
экспериментальных измерений**

По данному критерию проверяется обоснованность статистически доверительного интервала случайных отклонений модели от ее детерминированной части, выраженного среднеквадратичной погрешностью.

**ПРИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ПРОВЕРКИ ПРИЗНАЕТСЯ, ЧТО ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ
ОПИСЫВАЕТ ИЗМЕНЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ВЕЛИЧИНЫ ТЕХНОГЕННОГО ЯВЛЕНИЯ АДЕКВАТНО
ДАНЫМ ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ПРИЗНАКАМ ИХ ВОСПРОИЗВОДИМОСТИ И СЛУЧАЙНОГО РАССЕЯНИЯ**

ЭТАПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ



ОЦЕНКА НОВЫХ ЗНАНИЙ И ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ

Описание и интерпретация выявленных из модели связей и закономерностей зависимой величины y приводит к новым научным знаниям об исследуемом естественно-природном или техногенном явлении.

Знания оцениваются в результате смыслового толкования закономерных изменений зависимой величины с указанием найденных значений функциональных параметров ξ и коэффициентов A, B , характеризующих ее локальные особенности на разных стадиях становления и развития наблюдаемого природного или техногенного явления.

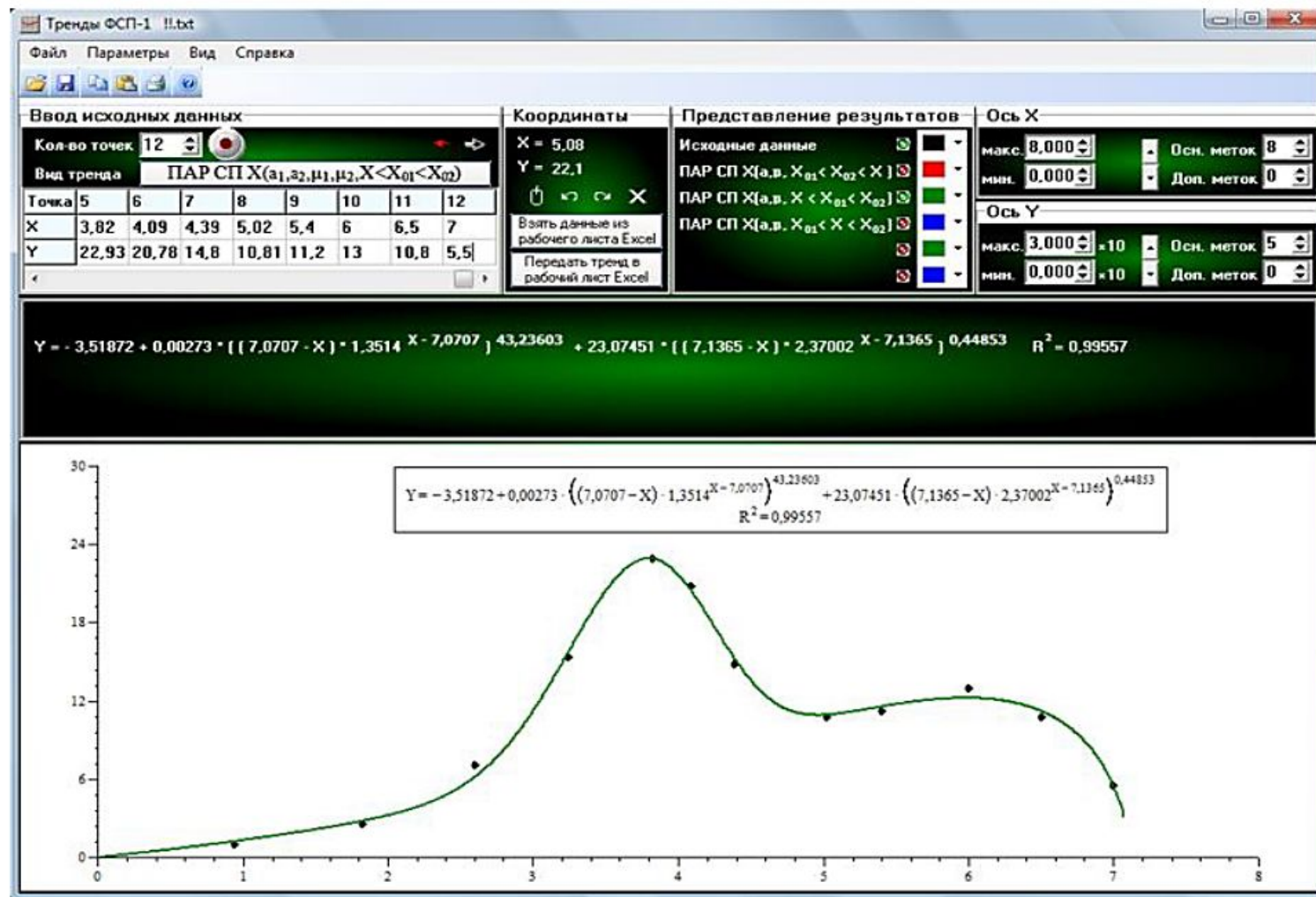
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ВЫРАЖЕНИЮ МОДЕЛИ
ОЦЕНИВАЮТСЯ:

- формы и размеры исследуемых объектов;
- координаты минимума или максимума зависимой величины;
- положение ее изолиний, выбранных по какому-либо критерию;
- интервалы релаксации, показатели степени и другие параметры, выражающие характерные особенности изменения зависимой величины y , крутизну ее роста или спада в направлениях разных аргументов и на отдельных стадиях естественного или техногенного явления;
- смысловое толкование отдельных слагаемых модели, ее селективных масштабных множителей и линейных коэффициентов A, B , а также функциональных параметров ξ и границ асимптотических приближений.

ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА МОДЕЛИРОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА «Тренды ФСП-1»

Модели нелинейной регрессии двумерные функционально-факторные с самоопределяющимися параметрами и повышенной достоверностью.

ГЛАВНАЯ СТРАНИЦА ПРОГРАММЫ



Авторы: Антонов В.А., Яковлев М.В.

Обобщенные математические выражения моделей в программе

Выбор типа тренда

$A \cdot x + B$ Линейный	$A \cdot x^\mu$ Степенной	$A \cdot a^{\beta \cdot x}$ Показательный		
$A \cdot x^\alpha + B$ ПС СПС X(μ)	$A_1 \cdot x^{\mu_1} + A_2 \cdot x^{\mu_2} + B$ ПС СПС X(μ_1, μ_2)	$A_1 \cdot x^{\mu_1} + A_2 \cdot x^{\mu_2} + A_3 \cdot x^{\mu_3} + B$ ПС СПС X(μ_1, μ_2, μ_3)	ПС СПС Ориентированный	
$A \cdot a^{\beta x} + B$ ПП СК X(β)	$A_1 \cdot a^{\beta_1 x} + A_2 \cdot a^{\beta_2 x} + B$ ПП СК X(β_1, β_2)	$A_1 \cdot a^{\beta x} + A_2 \cdot x + B$ ПППС СК X($\beta, \mu=1$)	<p>Модели (в комбинациях):</p> <ul style="list-style-type: none"> - степенные; - показательные; - асимметричные с одним и двумя экстремумами; - ступенчатые; - нормального распределения; - гармонических колебаний. 	
$A \cdot (x \cdot a^{-x})^\mu + B$ ПАР СП X(a, μ)	$A \cdot [(x - x_0) \cdot a^{x_0 - x}]^\mu + B$ ПАР СП X($a, \mu, X_0 < X$)	$A \cdot [(x_0 - x) \cdot a^{x - x_0}]^\mu + B$ ПАР СП X($a, \mu, X < X_0$)		
$\sum_{i=1}^2 A_i \cdot [(x - x_{0i}) \cdot a_i^{x_{0i} - x}]^{\mu_i} + B$ ПАР СП X($a_1, a_2, \mu_1, \mu_2, X_{01} < X_{02} < X$)	$\sum_{i=1}^2 A_i \cdot [(x_{0i} - x) \cdot a_i^{x - x_{0i}}]^{\mu_i} + B$ ПАР СП X($a_1, a_2, \mu_1, \mu_2, X < X_{01} < X_{02}$)	$\sum_{i=1}^2 A_i \cdot [(-1)^i (x_{0i} - x) \cdot a_i^{(-1)^i (x - x_{0i})}]^{\mu_i} + B$ ПАР СП X($a_1, a_2, \mu_1, \mu_2, X_{01} < X < X_{02}$)		
$\frac{A}{1 + e^{\beta(x - X_0)}} + B$ ПКС СП X(X_0, β) I	$\frac{A_1}{1 + e^{\beta_1(x - X_0)}} + \frac{A_2 \dots}{\dots} + \frac{A_3 \dots}{\dots} + B$ ПКС СП X(X_0, β) II	$\frac{A_1}{1 + e^{\beta(x - X_0)}} + \frac{A_2 \dots}{\dots} + \frac{A_3 \dots}{\dots} + B$ ПКС СП X(X_0, β)		
$A \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}$ НР СК X(\bar{x}, σ)	$A_1 \cdot e^{\beta x} + A_2 \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}} + B$ ППНР СК X(β, \bar{x}, σ)	$A \cdot \sin(\omega x + \varphi) + B$ П Sin X(ω, φ)		
$A \cdot e^{\beta x} \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + B$ ПАСin X(ω, φ, β_a)	$A_1 \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + A_2 \cdot e^{\beta x} + B$ ППSin X(ω, φ, β_n)	$A_1 \cdot e^{\beta x} \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + A_2 \cdot e^{\beta x} + B$ ППАСin X($\omega, \varphi, \beta_a, \beta_n$)		
				Закрыть (Esc)

КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА «Тренды ФСП-2»

Модели нелинейные трехмерные функционально-степенные с самоопределяющимися показателями степени.

Пример ввода данных эксперимента на главной странице программы

Тренды ФСП-2 - 05 - 2M.txt
Файл Настройка Вид Справка

Ввод данных | Редактирование | Галерея 3D | График 3D | Изолинии | Параметры

Точка	X	Y	Z
1	1,54	2,98	90
2	2,26	9,28	45
3	2,1	5,32	75
4	3,7	3	60
5	4	6,6	50
6	4,6	9,1	47
7	5,96	4,1	45
8	6,76	7,84	40
9	7,3	2,08	40
10	8,2	8,38	20
11	8,74	4,6	38
12	9,28	7,3	10
13	9,46	2,26	41
14	9,64	8,92	5

Число точек: 14

Xmin = 1,54
Xmax = 9,64

Ymin = 2,08
Ymax = 9,28

Zmin = 5
Zmax = 90

Найти min/max

Отобразить

Очистить

Сброс

Цвет данных: cBlue

Цвет сетки: cAqua

Подсветка: cLime

Вид данных:
 Точки 3D
 Пирамидки 3D
 Интерполяция 3D
 Карта данных

Вид куба:
 Нет куба
 Каркас
 Прозрачный куб

Размер точек:
 Маленькие
 Средние
 Большие

Дно:
 Нет дна
 В виде сетки


Авторы: Антонов В.А., Яковлев М.В.

**Типовые обозначения и графики функционально-степенных моделей в программе (слева).
Функциональные выражения и график созданной модели (справа).**

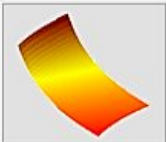
Тренды ФСП-2 - 06 - 2М.txt

Файл Настройка Вид Справка

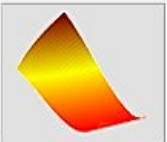
Ввод данных Редактирование Галерея 3D График 3D Изолинии Параметры




A(1,1)




M




A(1,1)M




A(1,1)2M




A(2,1)



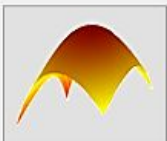
2M




A(2,1)M




A(2,1)2M




A(2,2)




A(3,2)




A(2,2)M




A(2,2)2M




A(3,1)



A(3,2)M



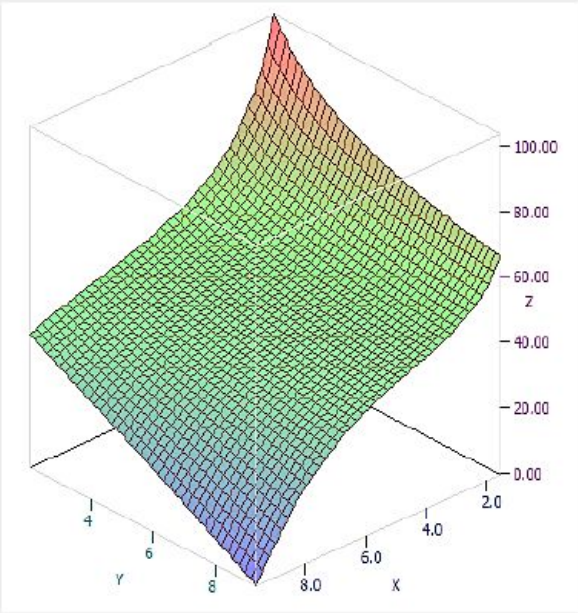
A(3,1)M



A(3,1)2M

$$A_0 + A_1 \cdot x^{\mu_1} \cdot y^{\mu_2} + A_2 \cdot x^{\mu_3} \cdot y^{\mu_4}$$

2M



$$Z = 35,4297 + 156,2989 \cdot X^{-1,0294} \cdot Y^{-0,5299} - 0,0001 \cdot X^{4,3318} \cdot Y^{1,328}$$

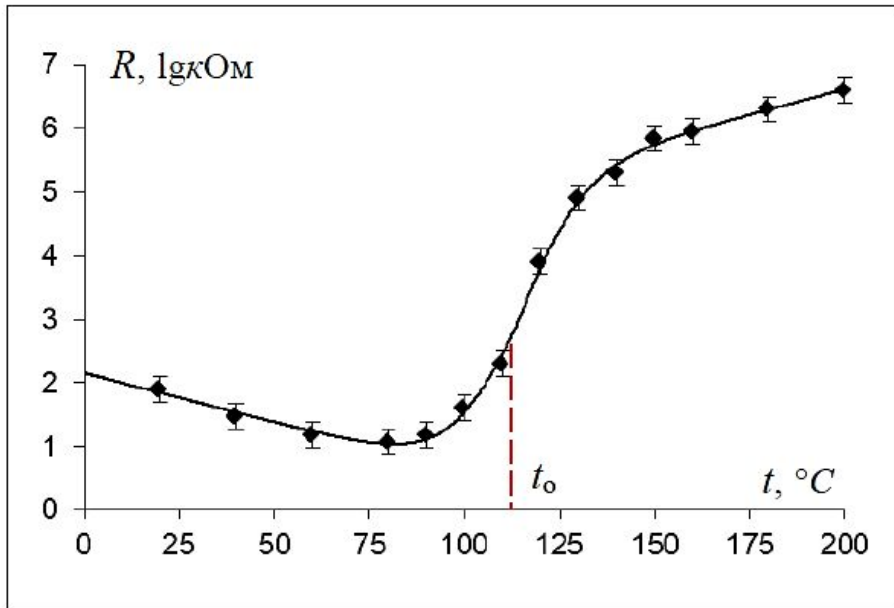
$$R^2 = 0,9407$$

Старт

ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

Физические
исследования

ОПРЕДЕЛЕНА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ R ПОЗИСТОРА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ t В ОБЛАСТИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА



Погрешность измерений $\sigma=0,1$. Требуемая детерминация модели $0,997 < R^2 < 0,999$

Линейное уменьшение десятичного логарифма электрического сопротивления позистора и его последующий рост в области фазового перехода выражается квазиступенчатой функцией

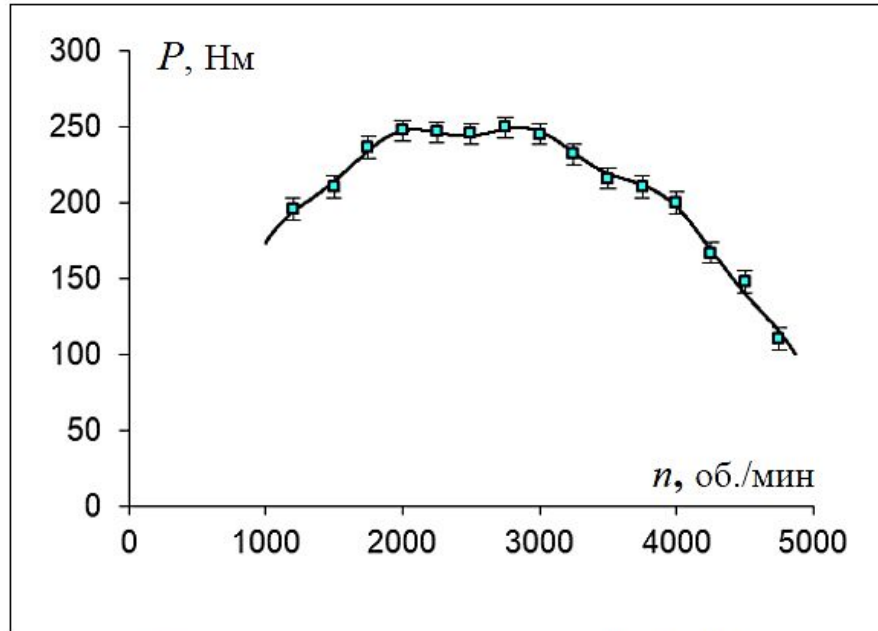
$$\lg R = \frac{A_1}{1 + e^{-\frac{t-t_0}{\lambda}}} + \frac{A_2(t-t_0)}{1 + e^{\beta(t-t_0)}} + \frac{A_3(t-t_0)}{1 + e^{-\beta(t-t_0)}} + B$$

Функциональные параметры λ , t_0 определены методом МППВ по методике М5Т
 $R^2=0,998$

$$\lg R = \frac{4,84}{1 + e^{-\frac{t-113,1}{9,1}}} - \frac{0,0154 (t-113,1)}{1 + e^{1,11(t-113,1)}} + \frac{0,0158 (t-113,1)}{1 + e^{-1,11(t-113,1)}} + 0,409 \pm 0,12$$

ВЫЯВЛЕНА ЗАКОНОМЕРНОСТЬ. Десятичный логарифм электрического сопротивления позистора, уменьшаясь линейно с угловым коэффициентом $-0,0154 \lg k\Omega/^{\circ}C$, изменяется экспоненциально с половинным релаксационным интервалом температуры $9,1^{\circ}C$ в области фазового перехода с центром $113,1^{\circ}C$ в направлении линейного роста, происходящего с угловым коэффициентом $0,0158 \lg k\Omega/^{\circ}C$.

ВЫЯВЛЕНЫ И ОБЪЯСНЕНЫ ОСОБЕННОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МОМЕНТА ВРАЩЕНИЯ P ВАЛА АВТОМОБИЛЬНОГО ДИЗЕЛЬНОГО ДВИГАТЕЛЯ ОТ ЧАСТОТЫ n ЕГО ОБОРОТОВ



Функциональные параметры λ_1 , λ_2 , T , φ определены методом МППВ по методикам МЗТ-2, М5Т.

$$P = -395,2e^{-\frac{n}{829,8}} - 6,5e^{\frac{n}{1388,9}} + 4,91\sin\left(\frac{2\pi}{996,8}n + 1,687\right) + 311,8 \pm 9 \quad R^2 = 0,994$$

ВЫЯВЛЕНЫ СВОЙСТВА ЗАВИСИМОСТИ. Момент вращения вала автомобильного двигателя на фоне его гармонических малых колебаний, происходящих с амплитудой 4,9 Нм и периодом 996,8 об/мин, экспоненциально возрастает по мере увеличений подачи топлива и соответствующей частоты оборотов с интервалом релаксации 892,8 об/мин до значений 240 Нм, достигаемых при частоте 2500 об/мин, а затем экспоненциально с интервалом релаксации 1388,9 об/мин уменьшается из-за перенасыщения топлива.

Погрешность измерений $\sigma=7$ Нм. Требуемая детерминация модели $0,988 < R^2 < 0,998$.

Учтено действие трех факторов.

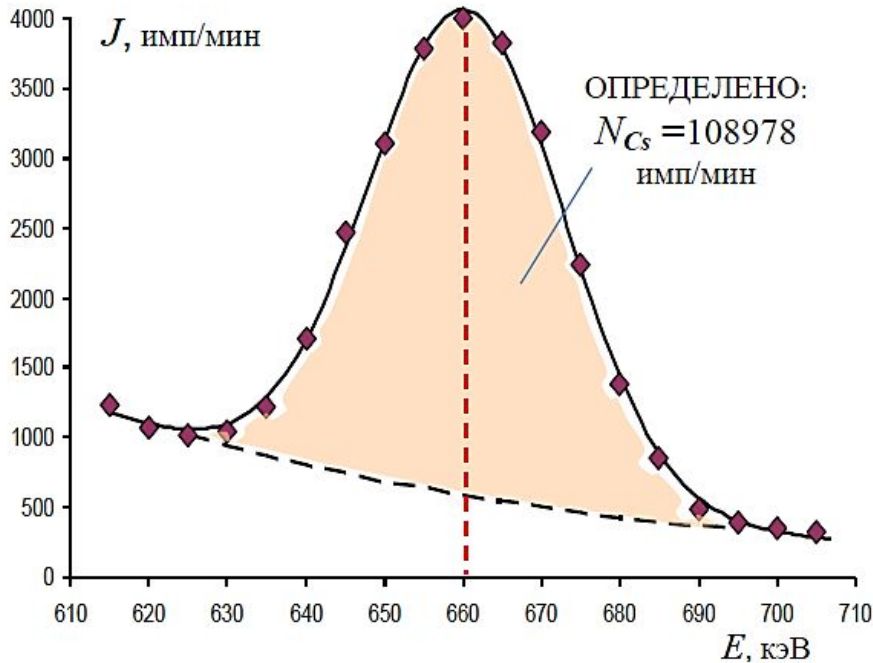
1. Монотонное увеличение P - фактор роста концентрации подаваемого в двигатель топлива. Отображается показательной функцией.

2. Монотонное уменьшение P - фактор перенасыщения концентрации подаваемого в двигатель топлива. Отображается так же показательной функцией.

3. Периодические колебания P - фактор балансировки двигателя. Отображается функцией синуса.

$$P = A_1e^{\frac{n}{\lambda_1}} + A_2e^{\frac{n}{\lambda_2}} + A_3\sin\left(\frac{2\pi}{T}n + \varphi\right) + B$$

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СПЕКТРОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ J ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ



Погрешность измерений $\sigma_J = 75$ имп/мин.
Ограничение требуемой детерминация модели
 $0,99 < R^2 < 0,999$.

Учтено действие двух факторов.

1. Монотонное уменьшение интенсивности фонового излучения по мере роста его энергии отображается показательной функцией.
2. Интенсивность рассеянного гамма-излучения нуклида в области фотопика его регистрации отображается функцией нормального распределения.

$$J = A_1 e^{-\frac{E}{\lambda}} + \frac{A_2}{\sigma_E \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(E-E_0)^2}{2 \cdot \sigma_E^2}} + B$$

Функциональные параметры λ , σ_E , E_0 определены методом МППВ по методикам МЗТ, М5Т. $R^2 = 0,998$.

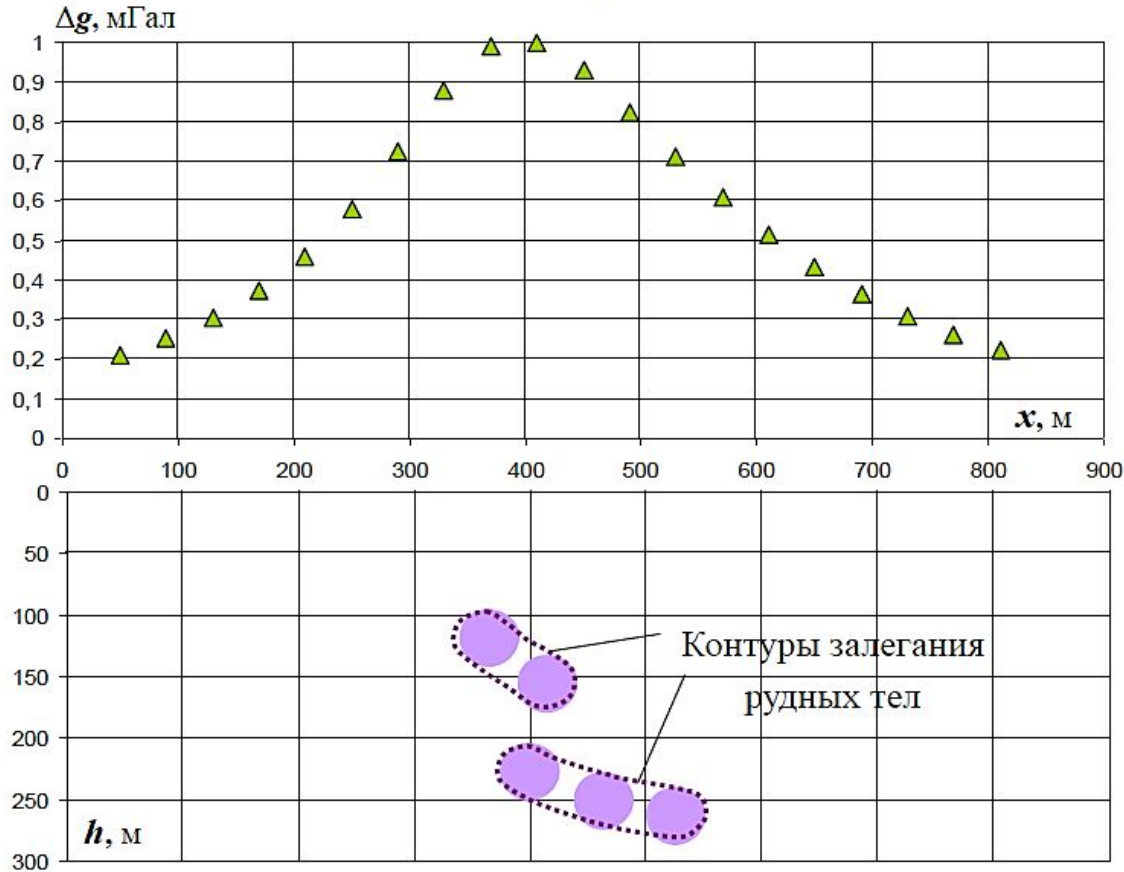
$$J = 19906653 \cdot e^{-\frac{E}{63,3}} + \frac{108978}{12,47 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(E-660,5)^2}{2 \cdot 12,47^2}} + 5,5587 \pm 65$$

МОДЕЛЬНАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ. Фоновое гамма-излучение уменьшается с ростом его энергии по экспоненте с интервалом релаксации 63,3 кэВ. Определенная энергия гамма-излучения в центре фотопика $E_0 = 660,5$ кэВ указывает на излучатель - нуклид цезий-137. Интегральная интенсивность излучения нуклида в фотопике определена значением $A_2 = N_{Cs} = 108978$ имп/мин.

Геофизические исследования

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ГРАВИТАЦИОННОЙ РАЗВЕДКИ ПРОТЯЖЕННЫХ РУДНЫХ ТЕЛ

по уточненным измерениям аномалии ускорения силы тяжести Δg на профиле x , расположенном на поверхности земли вкрест их простирания



Погрешность измерений $\sigma = 0,02$ мГал.
Ограничение требуемой погрешности модели $0,015 < \sigma_m < 0,03$ мГал.

Контуры сечения рудных тел по глубине залегания h аппроксимированы сечениями пяти протяженных цилиндров. По теоретическим пред-

$$\Delta g = A \sum_{i=1}^{i=5} \frac{h_i}{(x - x_i)^2 + h_i^2},$$

ставлениям:

где $A = 2GSp\rho$, S – площадь сечения цилиндра, ρ – избыточная плотность 1800 кг/м³.

Залегание центров цилиндрических тел (x_i, h_i) определено методом МППВ по методикам М5Т-5, М11Т-2.

$$\sigma_m = 0,022$$

РЕЗУЛЬТАТ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Определены контуры залегания рудных тел в геопространстве (x, h) .

$$\Delta g = 39,89 \left[\frac{119}{(x - 365)^2 + 119^2} + \frac{156,5}{(x - 416)^2 + 156,5^2} + \frac{228}{(x - 401)^2 + 228^2} + \frac{252}{(x - 464)^2 + 252^2} + \frac{264}{(x - 526)^2 + 264^2} \right] \pm 0,022$$

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ РЯДОВЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ
ПОКАЗАТЕЛЕЙ x_i ПРЕДПРИЯТИЯ НА РЕЗУЛЬТИРУЮЩИЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ПОКАЗАТЕЛЬ Y
по результатам моделирования множественной регрессии

Значения производственных и экономических
показателей (узловые точки)

Y	532	765	407	850	594	743	795	844	721	825	908	1092	870	980	707
x_1	18	44	13	30	18	34	24	51	40	28	49	67	38	42	30
x_2	17	29	11	31	13	39	21	20	11	12	49	42	40	28	16
x_3	20	33	11	37	12	38	41	23	26	46	45	34	24	49	19
x_4	32	16	38	14	26	17	17	15	19	13	13	13	16	15	21
x_5	42	30	48	27	47	46	36	36	41	41	17	19	29	9	38

Влияние на Y производственных показателей по номерам выражено суммой соответствующих степенных функций

$$Y = A_1 x_1^{\mu_1} + A_2 x_2^{\mu_2} + A_3 x_3^{\mu_3} + A_4 x_4^{\mu_4} + A_5 x_5^{\mu_5} + B$$

Показатели степени определены МППВ по методикам: на старте МЗТ-5, на финише М11Т.

Вклад каждого показателя в регрессию представлен его относительной долей в сумме значений Y , вычисленных в узловых точках.

Вид модели	R^2	Относительный вклад показателей x_i в экономический показатель Y				
		Номер показателя в модели регрессии				
		1	2	3	4	5
Функционально-факторный $Y = 2,42 \cdot 10^{-22} x_1^{13,08} - 7,79 \cdot 10^{-11} x_2^{6,68} - 0,03 x_3^{1,86} - 22,8 x_4^{0,93} + 1642 x_5^{-0,11}$	0,984	0,0155	-0,0025	-0,0211	-0,45	1,46
Для сравнения - линейные статистически значимые модели:						
Линейный $Y_1 = 9,63 x_1 + 1,23 x_2 + 8,53 x_3 + 3,61 x_4 + 2,19 x_5$	0,783	0,44	0,04	0,34	0,09	0,10
Линейный с целочисленными показателями степени $Y_2 = 2,73 x_1 + 0,52 x_2 + 1740,8 x_3^{-1} + 9062,9 x_4^{-1} + 1814 x_5^{-1}$	0,910	0,12	0,02	0,09	0,68	0,09

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ФАКТОРНОЙ МОДЕЛЬЮ ОБНАРУЖЕНО, что наибольший вклад показателя 5 в регрессию Y незначительно увеличивается по мере уменьшения самого показателя. Более существенный рост Y наблюдается при уменьшении показателя 4, создающего относительно меньший отрицательный вклад.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНТУРА ЗАЛЕГАНИЯ РУДНОГО ПЛАСТА В ВЕРТИКАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ

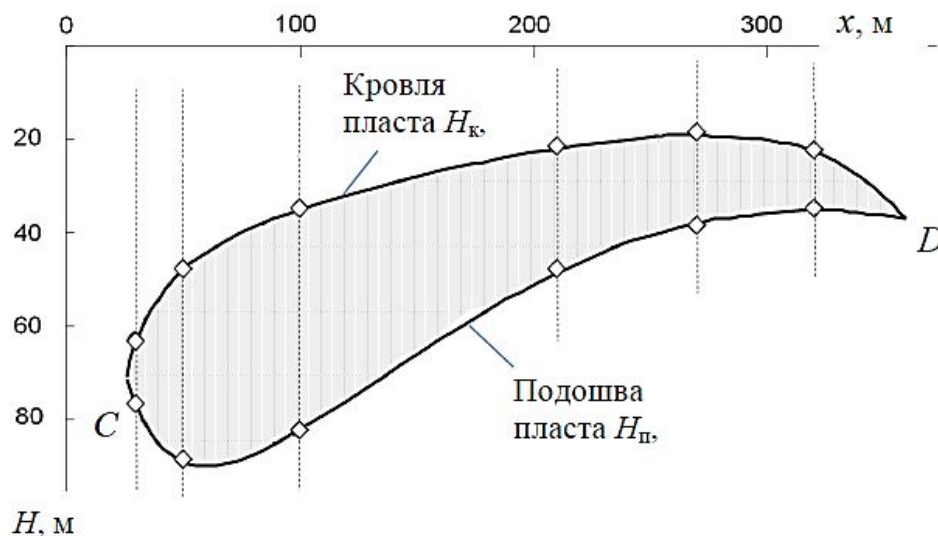
Модель контура рудного пласта создается по данным геологического опробования горных пород в буровых скважинах профиля. В скважинах определены вертикальные координаты подсеченной кровли $H_{кв}$ и подошвы $H_{пв}$ рудного пласта. Среднеквадратичная погрешность определений $\sigma=0,47$ м.

Учитывая наличие трех монотонностей в изменениях граничных отметок пласта в скважинах вдоль профиля, обобщенные модели его кровли и подошвы представлены суммой трех степенных функций

$$H = A_1 x^{\mu_1} + A_2 x^{\mu_2} + A_3 x^{\mu_3} + B.$$

Интервал требуемой детерминации
 $0,9985 < R^2 < 0,9999$

Расчеты показателей степени μ_1, μ_2, μ_3 проведены МППВ по методике МЗТ-3



СОЗДАНЫ МОДЕЛИ:

- кровли пласта $H_k = -2,82 \cdot 10^{-20} x^{8,211} - 14178 x^{-1,9558} + 3,31 x^{0,4697} - 62 \pm 0,55, \quad R^2=0,9992;$

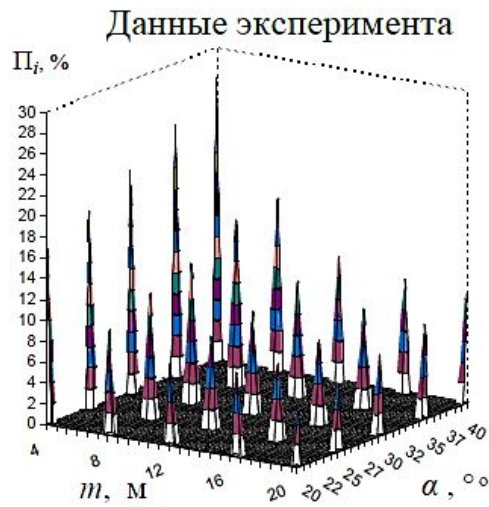
- подошвы пласта $H_p = 12,23 x^{0,6648} - 0,00326 x^{1,8512} - 8263 x^{0,0129} + 8440 \pm 0,57, \quad R^2=0,9989.$

Замыкание моделей кровли и подошвы происходит в точках C и D

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДОБЫЧИ КВАРЦЕВОГО СЫРЬЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ ПОТЕРЬ

по результатам экспериментальных оценок показателя потерь кварцевого сырья Π , при разных значениях мощности рудного тела m и угла его падения α .

Среднеквадратичная погрешность экспериментальных оценок 0,37 %. Интервал допустимого коэффициента детерминации модели $0,98 < R^2 < 0,999$. Требуется выявить закономерность изменения показателя Π и по ней найти ограничение участка добычи кварца с потерями не более 14 %.



Обобщенный вид модели

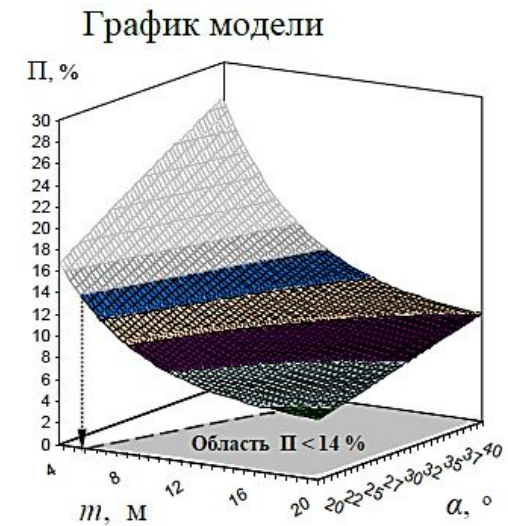
$$\Pi = A_1 \alpha^\mu + A_2 e^{-\frac{m}{\lambda}} + A_3 \alpha^\mu e^{-\frac{m}{\lambda}}$$

Параметры μ и λ рассчитаны МППВ
по методике М5Т.

$$\Pi = 0,368 \alpha^{0,88} + (10,494 + 1,145 \alpha^{0,88}) e^{-\frac{m}{4,81}} \pm 0,32$$

$$R^2 = 0,997$$

ВЫЯВЛЕНА ЗАКОНОМЕРНОСТЬ:



Показатель потерь кварцевого сырья уменьшается экспоненциально с интервалом релаксации 4,81 м по мере увеличения мощности рудного тела и слабо увеличивается по степенной функции с показателем 0,88 при росте угла его падения.

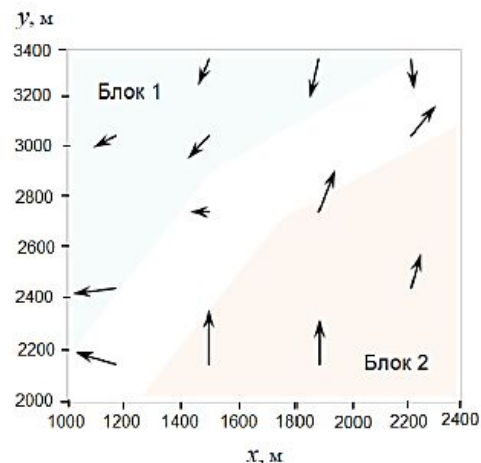
Участок добычи кварцевого сырья с потерями не более 14 % ограничен по мощности и углу падения рудного тела неравенством $m \geq 0,241 \alpha + 0,46$

Геодеформационные исследования

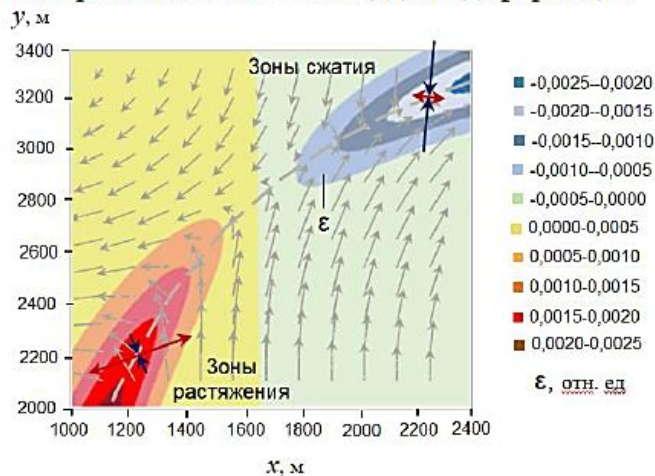
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ БЛОКОВ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ЗОН ОБРАЗУЮЩЕЙСЯ ПЛОЩАДНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

по данным зарегистрированных трендовых перемещений пунктов геодезической наблюдательной сети

Перемещения геодезических пунктов



Моделируемые перемещения точек земной поверхности и зоны площадной деформации



Среднеквадратичная погрешность регистрации перемещений пунктов 3,4 мм. Требования к погрешности модели перемещений точек земной поверхности – не более 4,2 мм.

Моделируемые перемещения точек земной поверхности в проекциях U_x , U_y и зоны обнаруженной моделью площадной деформации ϵ как суммы линейных и угловых компонент определяются по теоретическим представлениям вращения и поступательного смещения ее блоков

$$U_x = -\frac{(y - y_{ц1}) \Delta\phi_1}{1 + e^{\frac{(x-x_1)}{\lambda_x}}} - \frac{(y - y_{ц2}) \Delta\phi_2}{1 + e^{\frac{(x-x_2)}{\lambda_x}}} \quad U_y = \frac{(x - x_{ц1}) \Delta\phi_1}{1 + e^{\frac{(y-y_1)}{\lambda_y}}} + \frac{(x - x_{ц2}) \Delta\phi_2}{1 + e^{\frac{(y-y_2)}{\lambda_y}}}$$

Положение серединной линии межблочного контакта выражается функцией $y_r = Ax^\mu + B$

Координаты условных центров вращения блоков $x_{ц}$, $y_{ц}$, углы их поворота $\Delta\phi$, параметры линии межблочного контакта A , B , μ и его ширина λ определены МППВ по методам МТЗ, МТ7, МТ13 с погрешностью перемещений 3,9 мм.

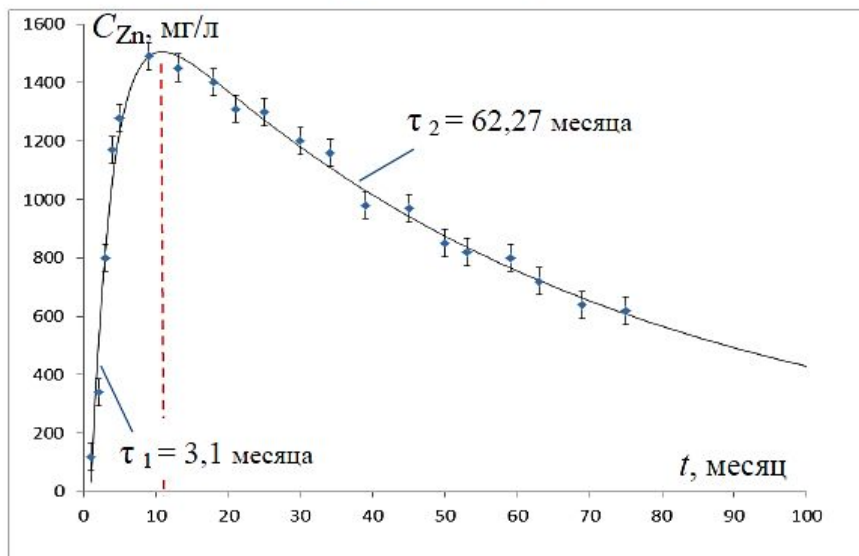
В результате моделирования на земной поверхности определяются контуры межблочных зон разнонаправленной площадной деформации, которые используются в прогнозных оценках безопасного ведения горных работ в обозначенной зоне и содержания в ней техногенных объектов.

ОПРЕДЕЛЕНЫ ВРЕМЕННЫЕ ИНТЕРВАЛЫ ГИДРОПЕРЕНОСА ЦИНКА В ШАХТНЫХ ВОДАХ ЗАКОНСЕРВИРОВАННОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ

по данным мониторинга химического состава подземных вод.

Среднеквадратичная погрешность определения содержания цинка C_{Zn} в мониторинге 47 мг/л.
Интервал допустимой погрешности модели гидропереноса $40 \text{ мг/л} < \sigma_m < 56 \text{ мг/л}$.

Данные мониторинга и график модели



Феномены роста и последующего спада содержания цинка в шахтной воде, происходящие в течение времени t из-за влияния соответствующих факторов растворения вторичных сульфатов в зоне обрушения и притока латеральных вод, поступающих с прилегающих территорий, выражаются в модели экспоненциальными функциями

$$C_{Zn} = A_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_1}} + A_2 \cdot e^{-\frac{t}{\tau_2}} + B$$

Параметры модели τ_1 и τ_2 рассчитаны МППВ по методике МЗТ-2

$$C_{Zn} = -2492,87 \cdot e^{-\frac{t}{3,1}} + 1798,35 \cdot e^{-\frac{t}{62,27}} + 68,97 \mp 53$$

ВЫЯВЛЕНА ЗАКОНОМЕРНОСТЬ

Содержание цинка в шахтной воде на первом этапе консервации месторождения увеличивается по экспоненте с временным интервалом релаксации 3,1 месяца до максимума, достигаемого через 11 месяцев, а затем на втором этапе консервации уменьшается из-за преимущественного притока латеральных вод также по экспоненциальной функции с увеличенным временным интервалом релаксации 62,27 месяца.

НЕКОТОРЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АНТОНОВА В. А. ПО ДАННОЙ ТЕМЕ

Извлечение математико-статистических закономерностей в экспериментальных исследованиях горно-технологических процессов. // Проблемы недропользования. Екатеринбург, - ИГД УрО РАН. - 2018. - Вып. № 4 (19). – С. 61-70.

DOI: 10.25635/2313-1586.2018.04.061; https://elibrary.ru/download/elibrary_36654351_35062234.pdf

Методология геоинформационного отображения экспериментальных горно-технологических закономерностей. // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2017. - № 10, – С. 17-24.

DOI: 10.25018/0236-1493-2017-10-0-17-24; <https://elibrary.ru/item.asp?id=30451179>

Алгоритм оптимизации дискретных аппроксимаций табулированных функций // Известия ЮФУ. Технические науки - 20017. – № 7(192). - С. 133-144.

DOI 10.23683/2311-3103-2017-7-133-144; https://elibrary.ru/download/elibrary_32251809_62685983.pdf

Построение и оптимизация моделей нелинейной функционально-факторной регрессии. // Информационные технологии. - 2013. - № 5. - С. 17-24. <https://elibrary.ru/item.asp?id=19039857>

Об одном методе построения полиноминых трендов с самоопределяющимися показателями и коэффициентами // Экономика и математические методы. - 2010. - Т. 46. - № 2. - С. 78-88.

https://elibrary.ru/download/elibrary_13567805_26318490.pdf

Антонов Владимир Александрович

Главный научный сотрудник института горного дела УрО РАН, докт. техн. наук, Antonov@igduran.ru