Лекция 7

МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ

Вопросы:

1. Свободные затухающие колебания. Характеристики затухания.
2. Вынужденные колебания. Резонанс.

<u>Затухающими</u> являются колебания, происходящие в диссипативной колебательной системе. В реальной колебательной системе имеются силы сопротивления (трения), действие которых уменьшает энергию колебаний.

При небольших скоростях движения в среде **сила сопротивления пропорциональна скорости**:

$$F_{\text{сопр}\,x} = -r\text{v}_x = -r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

где r – ***коэффициент сопротивления среды***, $[r] = \text{кг/с}$.

Знак минус в формуле показывает, что сила и скорость имеют противоположные направления.

Уравнение движения (второй закон Ньютона) при наличии квазиупругих сил и сил сопротивления имеет вид:

$$ma_x = -kx - r\text{v}_x$$

Обозначения: $2\beta = \dfrac{r}{m}$; $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

β – ***коэффициент затухания колебаний***; $[\beta] = 1/\text{с}$

ω_0 – ***собственная циклическая частота колебаний системы*** (частота, с которой происходили бы свободные колебания системы при отсутствии сопротивления среды, т. е. при $r = 0$).

<u>Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний</u> примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_з t + \alpha)$$

$$\omega_з = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$ – ***циклическая частота затухающих колебаний***.

Начальные амплитуда A_0 и фаза α определяются из *начальных условий*: $x(0) = x_0$; $\upsilon(0) = \upsilon_0$.

Затухание называется __слабым__, когда: $\beta < \omega_0$

При слабом затухании движение системы можно рассматривать как квазигармоническое колебание частоты $\omega_з$ с амплитудой, изменяющейся по закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$

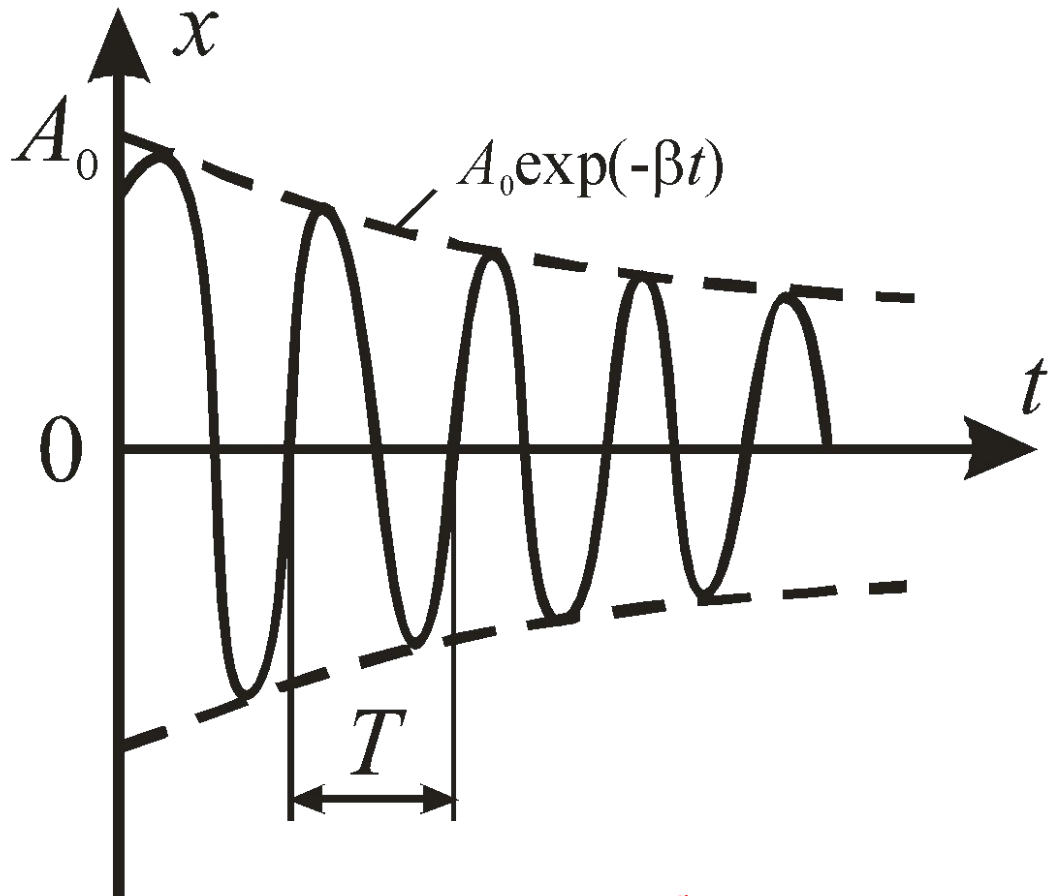


График свободных затухающих колебаний

Характеристики затухания

1. Коэффициент затухания колебаний β характеризует скорость затухания колебаний:

$$\beta = \frac{r}{2m}$$

2. Время релаксации $\boldsymbol{\tau}$ – время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в **e** ≈ 2,7 раз:

$$\frac{A(t)}{A(t+\tau)} = \frac{A_0 \mathrm{e}^{-\beta t}}{A_0 \mathrm{e}^{-\beta(t+\tau)}} = \mathrm{e}^{\beta\tau} = \mathrm{e}$$

откуда $\beta\tau = 1$, или: $\tau = \dfrac{1}{\beta}$

Физический смысл коэффициента затухания колебаний**:**
это величина, обратно пропорциональная времени,
за которое амплитуда колебаний уменьшается в е раз.

3. Период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_з} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

4. Декремент затухания – отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период:

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \mathrm{e}^{\beta T}$$

5. Логарифмический декремент затухания θ – натуральный логарифм от декремента затухания:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$

За время τ система успевает совершить число колебаний, равное:

$$N_e = \frac{\tau}{T}$$

Физический смысл логарифмического декремента затухания – это величина, обратная числу колебаний, совершаемых за время релаксации τ (за время уменьшения амплитуды в **e** раз):

$$\theta = \frac{1}{N_e}$$

6. Добротность Q системы – безразмерная величина, обратно пропорциональная потерям энергии в колебательной системе.

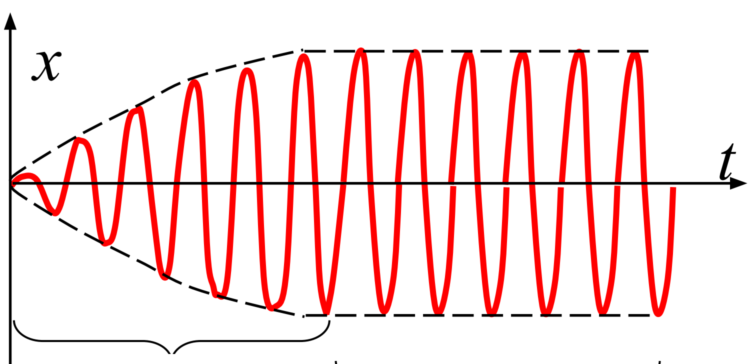
$$Q = \pi/\theta = \pi N_e$$

$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{Запас энергии в колебательной системе}}{\text{Потери энергии за один период колебаний}}$$

Для идеальной системы (без затухания колебаний): $Q \to \infty$

Вынужденные колебания

Вынужденными называются такие колебания, которые возникают в колебательной системе **под действием внешней периодически изменяющейся силы (вынуждающей силы). Вынужденные колебания – это *незатухающие* колебания.**



Вынуждающая сила изменяется со временем по гармоническому закону:

$$F_x = F_0 \cos \omega t$$

ω – ***частота вынуждающей силы***;

F_0 – ***амплитуда вынуждающей силы***.

В уравнении движения (втором законе Ньютона) кроме *квазиупругой силы* и *силы сопротивления среды* учитываем *вынуждающую силу*:

$$ma_x = -kx - r\mathrm{v}_x + F_0 \cos\omega t$$

<u>Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний</u>:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

Это неоднородное (правая часть отлична от нуля) дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения, и частного решения данного неоднородного уравнения:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha) + A\cos(\omega t - \varphi)$$

Жан Даламбер (1717 – 1783)

Первое слагаемое **играет роль** ***только при установлении колебаний*.** С течением времени из-за множителя $e^{-\beta t}$ роль этого слагаемого уменьшается. После установления колебаний первым слагаемым можно пренебречь, сохраняя лишь **второе, которое описывает установившиеся вынужденные гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы:**

$$x = A\cos(\omega t - \varphi)$$

Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы.

Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания ϕ также зависит от частоты вынуждающей силы.

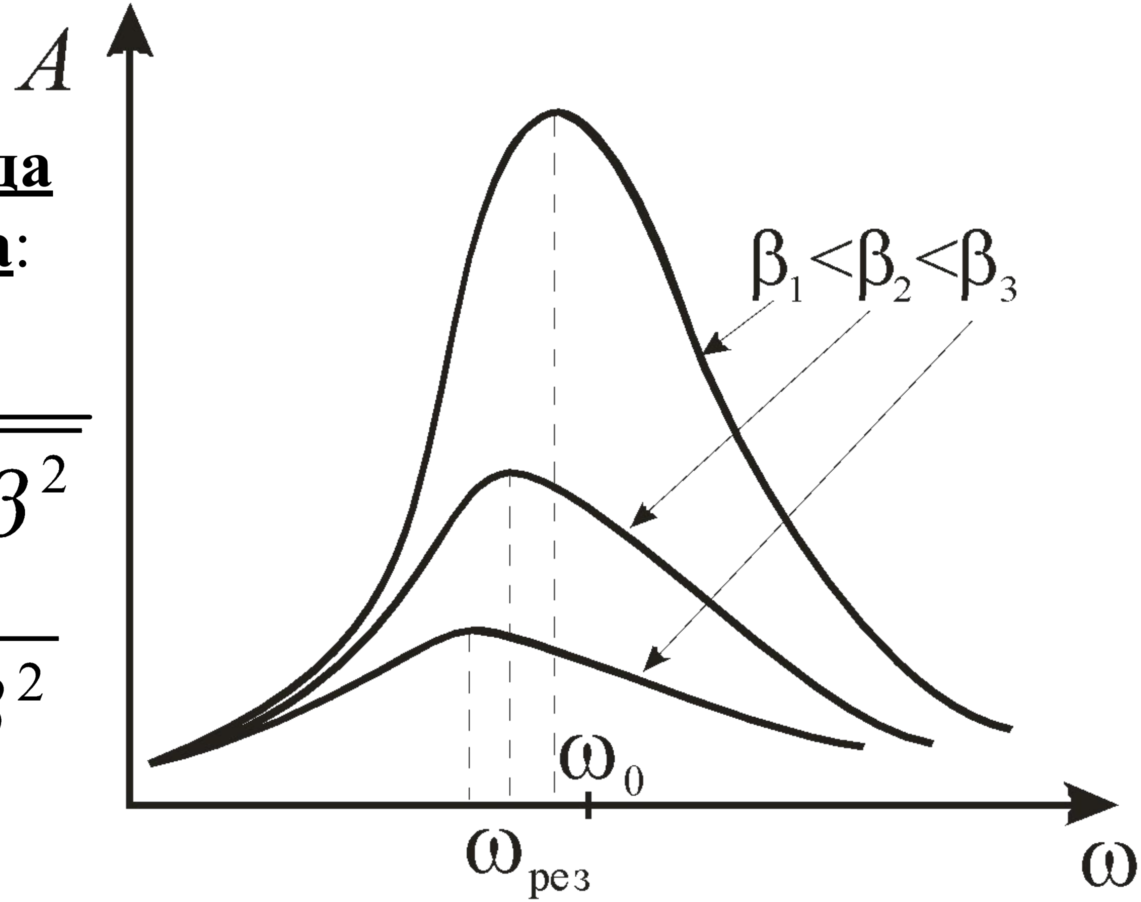
$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}; \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к некоторому значению, называется резонансом, а соответствующая частота – резонансной частотой $\omega_{\text{рез}}$.

<u>Резонансная амплитуда</u> и **<u>резонансная частота</u>**:

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0 / m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$



На рисунке приведены ***резонансные кривые*** для различных значений коэффициента затуха-ния колебаний.

Чем больше добротность колебательной системы, тем сильнее выражены в ней резонансные явления.

Необходимость учитывать явление резонанса в технике: при конструировании и эксплуатации машин (станков, самолетов и др.) и различных сооружений (мостов, зданий и др.) их собственная частота колебаний не должна быть близкой к частоте возможных внешних воздействий.

Пример: обрушение Египетского моста в Санкт-Петербурге в 1905 году при прохождении по нему эскадрона гвардейской кавалерии.

Египетский мост сегодня (восстановлен в другом виде в 1955 году).