

**Вопросы:**

- 1. Свободные затухающие колебания.  
Характеристики затухания.**
- 2. Вынужденные колебания. Резонанс.**

**Затухающими являются колебания, происходящие в диссипативной колебательной системе. В реальной колебательной системе имеются силы сопротивления (трения), действие которых уменьшает энергию колебаний.**

При небольших скоростях движения в среде сила сопротивления пропорциональна скорости:

$$F_{\text{сопр}x} = -rV_x = -r \frac{dx}{dt}$$

где  $r$  – коэффициент сопротивления среды,  $[r] = \text{кг/с}$ .

Знак минус в формуле показывает, что сила и скорость имеют противоположные направления.

**Уравнение движения (второй закон Ньютона) при наличии квазиупругих сил и сил сопротивления имеет вид:**

$$ma_x = -kx - rV_x$$

Обозначения:  $2\beta = \frac{r}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\beta$  – коэффициент затухания колебаний;  $[\beta] = 1/c$

$\omega_0$  – собственная циклическая частота колебаний системы (частота, с которой происходили бы свободные колебания системы при отсутствии сопротивления среды, т. е. при  $r = 0$ ).

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний примет вид:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

*Общее решение* этого уравнения имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

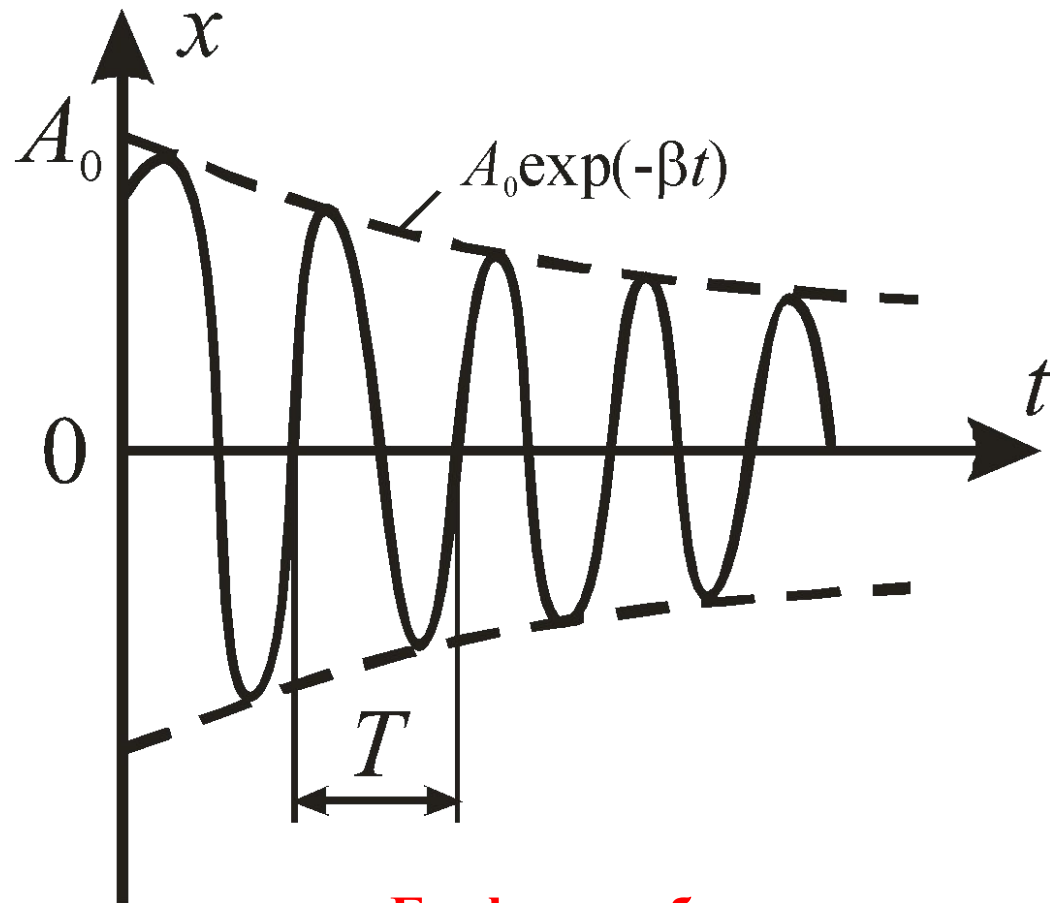
$\omega_3 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – *циклическая частота затухающих колебаний.*

**Начальные амплитуда  $A_0$  и фаза  $\alpha$  определяются из начальных условий:  $x(0) = x_0$ ;  $v(0) = v_0$ .**

Затухание называется слабым, когда:  $\beta < \omega_0$

При слабом затухании движение системы можно рассматривать как квазигармоническое колебание частоты  $\omega_3$  с амплитудой, изменяющейся по закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$$



**График свободных  
затухающих колебаний**

## Характеристики затухания

1. Коэффициент затухания колебаний  $\beta$  характеризует скорость затухания колебаний:

$$\beta = \frac{r}{2m}$$

2. Время релаксации  $\tau$  – время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e \approx 2,7$  раз:

$$\frac{A(t)}{A(t + \tau)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = e^{\beta\tau} = e$$

откуда  $\beta\tau = 1$ , или:  $\tau = \frac{1}{\beta}$

**Физический смысл коэффициента затухания колебаний: это величина, обратно пропорциональная времени, за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.**

### 3. Период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

4. **Декремент затухания** – отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период:

$$\frac{A(t)}{A(t + T)} = e^{\beta T}$$

5. **Логарифмический декремент затухания  $\theta$**  – натуральный логарифм от декремента затухания:

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t + T)} = \beta T$$

За время  $\tau$  система успевает совершить число колебаний, равное:

$$N_e = \frac{\tau}{T}$$

**Физический смысл логарифмического декремента затухания** – это величина, обратная числу колебаний, совершаемых за время релаксации  $\tau$  (за время уменьшения амплитуды в  $e$  раз):

$$\theta = \frac{1}{N_e}$$

**6. Добротность  $Q$  системы** – безразмерная величина, обратно пропорциональная потерям энергии в колебательной системе.

$$Q = \pi/\theta = \pi N_e$$

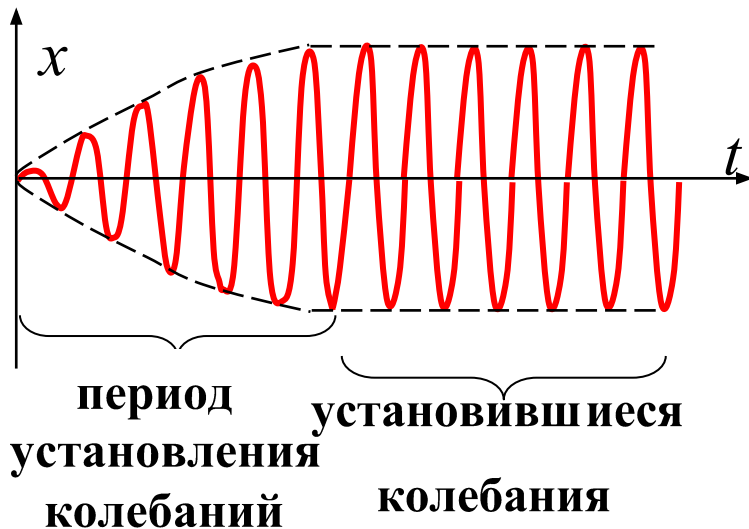
$$Q = 2\pi \cdot \frac{\text{Запас энергии в колебательной системе}}{\text{Потери энергии за один период колебаний}}$$

**Для идеальной системы (без затухания колебаний):  $Q \rightarrow \infty$**



## Вынужденные колебания

**Вынужденными** называются такие колебания, которые возникают в колебательной системе под действием внешней периодически изменяющейся силы (вынуждающей силы). Вынужденные колебания – это *незатухающие* колебания.



*Вынуждающая сила* изменяется со временем по гармоническому закону:

$$F_x = F_0 \cos \omega t$$

$\omega$  – частота вынуждающей силы;

$F_0$  – амплитуда вынуждающей силы.

В уравнении движения (втором законе Ньютона) кроме квазиупругой силы и силы сопротивления среды учитываем вынуждающую силу:

$$ma_x = -kx - rV_x + F_0 \cos \omega t$$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

**Это неоднородное (правая часть отлична от нуля) дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.**

**Общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения, и частного решения данного неоднородного уравнения:**

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + A \cos(\omega t - \varphi)$$



**Жан  
Даламбер  
(1717 – 1783)**

*Первое слагаемое играет роль только при установлении колебаний.* С течением времени из-за множителя  $e^{-\beta t}$  роль этого слагаемого уменьшается. После установления колебаний первым слагаемым можно пренебречь, сохраняя лишь второе, которое описывает установившиеся вынужденные гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы:

$$x = A \cos(\omega t - \varphi)$$

**Амплитуда вынужденных колебаний зависит от частоты вынуждающей силы.**

**Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания  $\phi$  также зависит от частоты вынуждающей силы.**

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}; \quad \text{tg} \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

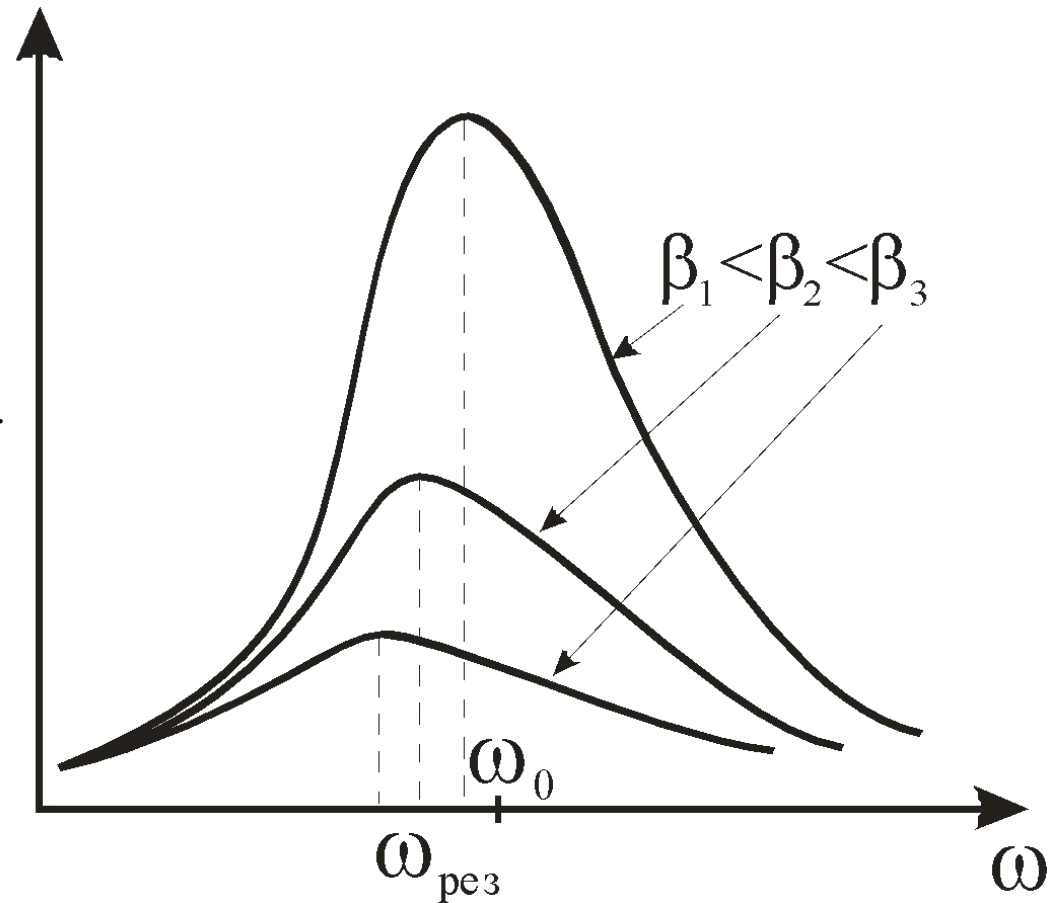
**Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к некоторому значению, называется резонансом, а соответствующая частота – резонансной частотой  $\omega_{\text{рез}}$ .**

**Резонансная амплитуда**  
**и резонансная частота:**

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0 / m}{2\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

На рисунке приведены резонансные кривые для различных значений коэффициента затухания колебаний.



**Чем больше добротность колебательной системы, тем сильнее выражены в ней резонансные явления.**

**Необходимость учитывать явление резонанса в технике:**  
при конструировании и эксплуатации машин (станков, самолетов и др.) и различных сооружений (мостов, зданий и др.) их собственная частота колебаний не должна быть близкой к частоте возможных внешних воздействий.



**Пример: обрушение Египетского моста в Санкт-Петербурге в 1905 году при прохождении по нему эскадрона гвардейской кавалерии.**

**Египетский мост сегодня  
(восстановлен в другом виде  
в 1955 году).**

