

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Модуль

**Основные термины и
определения**

Литература

1. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления. - М.: Высшая школа, 1973. - 507 с.
2. Теория автоматического управления: учебник для вузов / под ред. А.В. Нетушила. – 2-е изд. - ч.1. - М.: Высш. шк., 1976. – 400 с.

Дополнительная

3. Протасов А.П., Рычков В.В. Теория автоматического управления. Учебное пособие по курсу «Теория автоматического управления». - Киров: Изд-во ВятГУ , 2011.-107 с.
4. Ишутинов Д.В., Рычков В.В. Основы работа в System View. – Киров: изд-во ВятГУ, 2008.- 23 с.
5. Рычков В.В. Теория автоматического управления. : учебно-методическое пособие по лабораторным работам и самостоятельной работе. - Киров: ФГБОУ ВПО «ВятГУ», 2014. – 49 с.
6. Рычков В.В. Теория автоматического управления: учебно-методическое пособие по курсовому проекту - Киров: ФГБОУ

Лабораторные работы

1. Методичка.
2. Развёрнутый лист в клеточку.
3. Линейка или прямоугольный треугольник (равнобедренный с углами 45°).
4. Простой карандаш.
5. Цветные карандаши.
6. Резинка или ластик.
7. Точилка.
8. Трафарет.
9. Калькулятор с вычислением \lg .

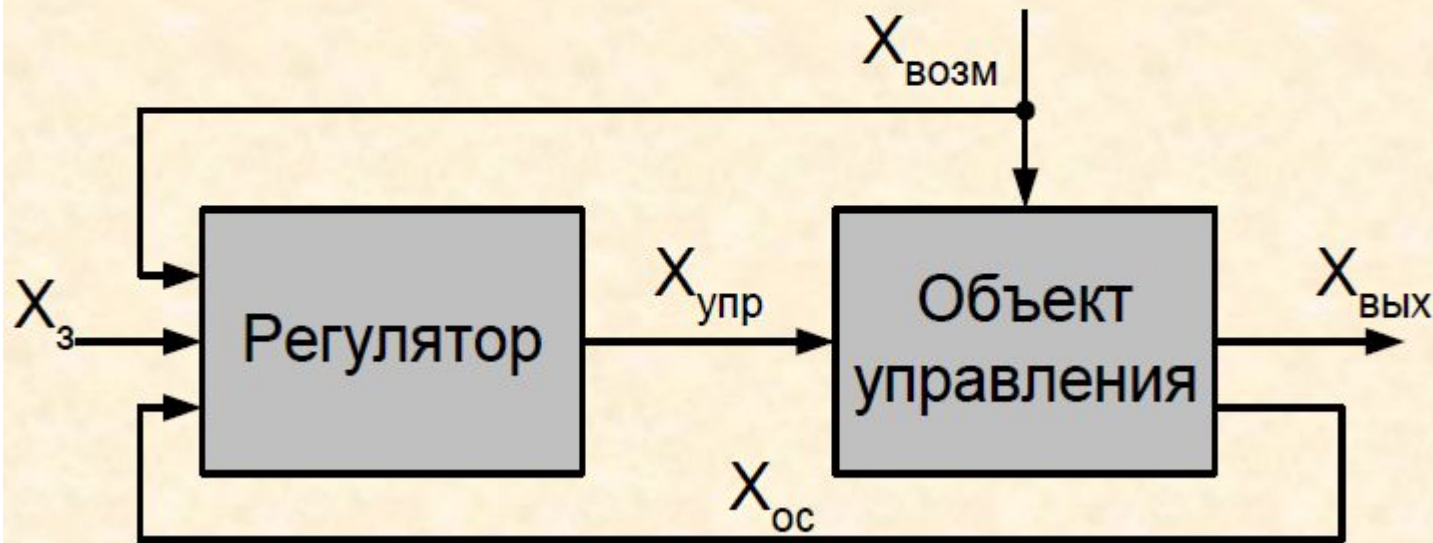
Автоматическим управлением называется процесс поддержания или изменения по заданному закону значений показателей какого-либо процесса за счет подачи на регулятор сигналов, определяемых действительным ходом этого процесса.

Регулируемой величиной в ТАУ называют физическую величину, которую нужно регулировать. Машины или иные технические устройства, поведением которых управляют, называются **объектами управления**.

Совокупность устройств, с помощью которых обеспечивается поддержание или изменение по заданному закону регулируемой величины, называется **регулятором или управляющим устройством**.

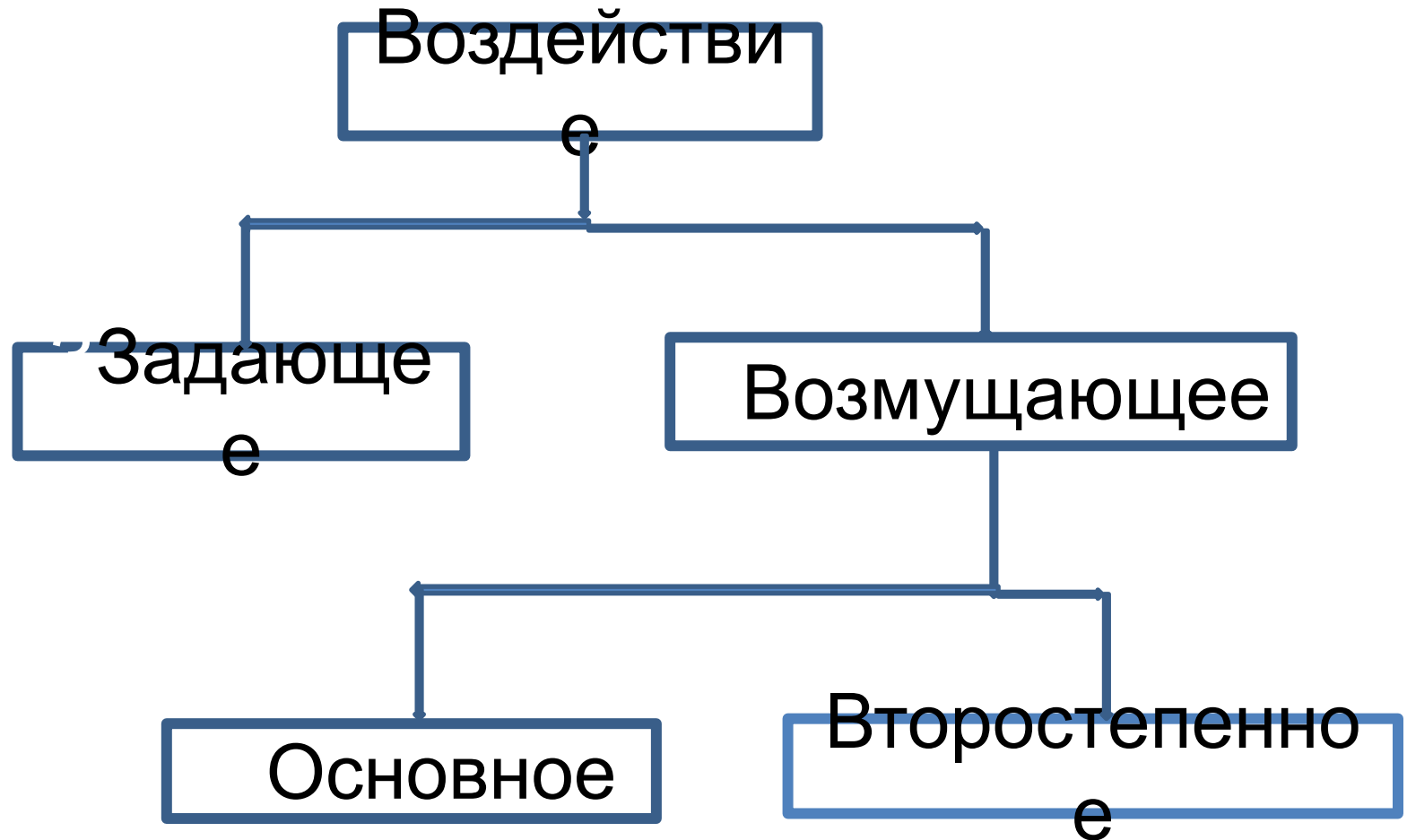
Совокупность объекта регулирования и регулятора

Типовая упрощенная Структура САУ



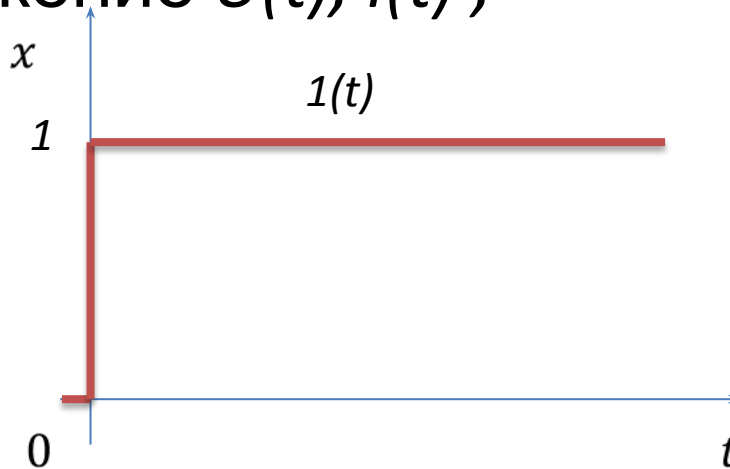
1 Типовые

Отклонение регулируемой величины от заданного значения происходит под действием различных причин или, как их называют в ТАУ, – **воздействие**. Основными воздействиями, оказываемыми на САУ, являются задающие и возмущающие. **Задающие воздействия** определяют закон изменения управляемой величины. **Возмущающие воздействия**, основные и второстепенные, стремятся нарушить требуемую функциональную связь между задающим воздействием и регулируемой величиной. **Основные возмущающие воздействия** определяются нагрузкой системы. **Второстепенные возмущающие воздействия** обуславливаются главным



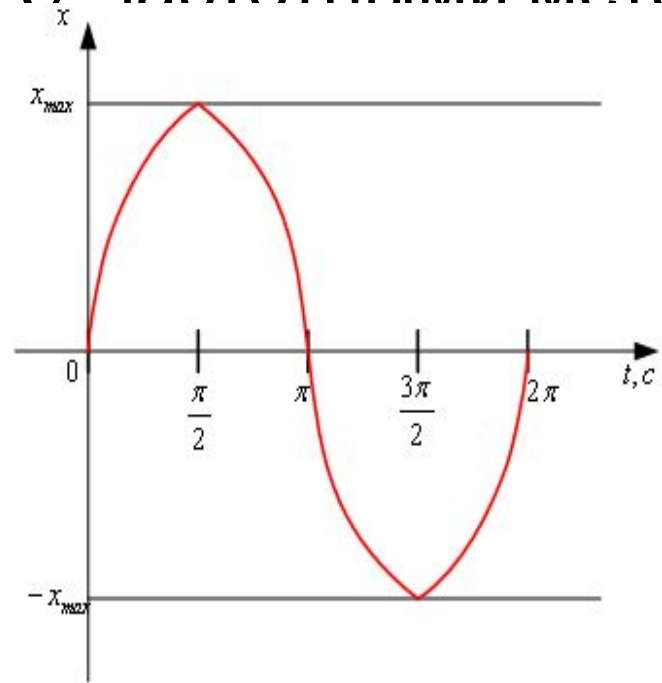
Характер переходных процессов в результате приложенного к системе воздействия зависит главным образом от структуры и свойств системы, а также от закона изменения воздействия во времени. Для исследуемых динамических свойств системы пользуются **типовым воздействием**, которое выбирается близким к наиболее неблагоприятному из всего разнообразия возможных реальных воздействий конкретной САУ. К типовым воздействиям относятся:

а) **единичный скачок** (единичное ступенчатое воздействие) - замыкание или размыкание цепи, приложенное напряжение $U(t)$, $I(t)$;



- Реакция системы на единичное ступенчатое воздействие называется **переходной функцией**.

б) **гармоническое воздействие** – изменение по синусоидальному или косинусоидальному закону во времени, используется при анализе динамических свойств САУ частотными методами.

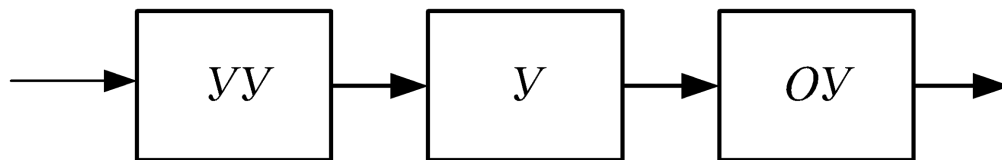


2 Обратные

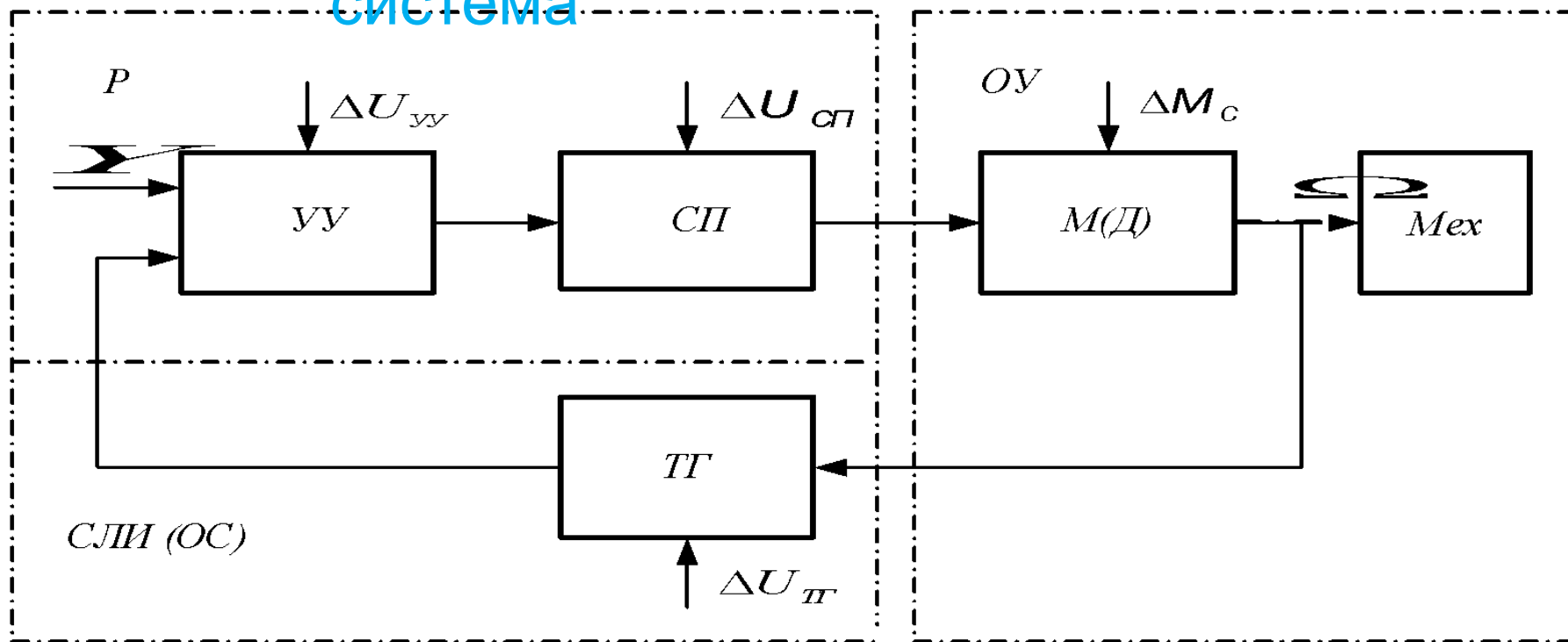
Задача САУ - **обеспечить** процесс поддержания или изменения по заданному закону значений показателей какого-либо процесса за счет подачи на регулятор сигналов, определяемых действительным ходом этого процесса. Такая подача сигналов осуществляется при помощи средств **обратной связи**.

Если же функции управления системы не ставится в зависимость от действительного хода производственного процесса и выполняются по разомкнутому циклу, то такие системы называются **разомкнутыми**, в отличие от САУ, называемыми **замкнутыми**.

Разомкнутая система



Замкнутая одноконтурная система

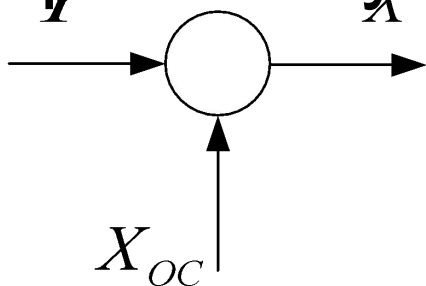


- P – регулятор;
- $УУ$ – управляющее устройство;
- $У$ – усилитель; $СП$ – силовой преобразователь;
- $ОУ$ – объект управления;
- $M(Д)$ – машина (двигатель);
- $Мех$ – механизм;
- Ω – скорость;
- $СПИ$ – система логической информации (технической информации);
- $ТГ$ – тахогенератор;
- $У$ – задающее воздействие;
- ΔM_C – основное возмущающее воздействие;
- $\Delta U_{УУ}$, $\Delta U_{СП}$, $\Delta U_{ТГ}$ – второстепенные возмущающие воздействия.

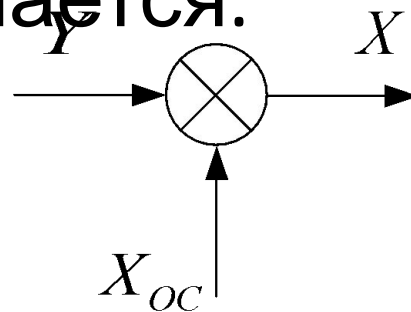
Системы, имеющие одну главную обратную связь, называются **одноконтурными**. Некоторые САУ, помимо главных ОС, число которых определяется числом регулируемых величин, имеют еще несколько **дополнительных** (местных). Последние соединяют выход и вход одного или нескольких элементов системы. САУ, имеющие, кроме главной, еще одну или несколько дополнительных обратных связей, называются **многоконтурными**. В ЭП используется до четырёх контуров: по **пути**, **скорости**, по **напряжению** или э.д.с., по **току**.

В зависимости от характера передаваемого воздействия О.С. подразделяются на жесткие и гибкие. **Жесткие** обратные связи действуют как в установившемся, так и в переходном режиме системы. Средства жесткой ОС - различные датчики (измеряющие устройства), передающие сигнал на узел сравнения. **Гибкие** ОС (ГОС) действуют только в период переходного процесса.

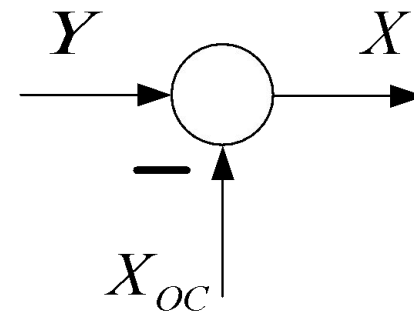
По оказываемому на систему действию ОС делятся на положительные и отрицательные. ОС называется **положительной**, если с увеличением сигнала на выходе управляющий сигнал на входе увеличился и **отрицательной**, если он при этом уменьшается.



$$x = y + x_{oc}$$



$$x = y - x_{oc}$$



Классификация связей в САУ



Классификация САУ



Классификация САУ

по закону изменения
регулируемой величины

САУ
поддержания
постоянства
регулируемой
величины

**Системы
Программного
управления**

**Следящие
системы**

Классификация САУ

по виду статических характеристик

```
graph TD; A[по виду статических характеристик] --> B[Статические САУ]; A --> C[Астатические САУ];
```

**Статические
САУ**

**Астатические
САУ**

Классификация САУ



Классификация САУ



Применение операционного метода в математическом описании САУ

Передаточная функция звена или системы – это отношение изображений выходного и входного сигналов.

Характеристическое уравнение – приравненный нулю знаменатель передаточной функции.

Нули передаточной функции – корни её числителя.

Полюсы передаточной функции – корни её знаменателя.

Применение операционного метода в математическом описании САУ

Главная задача ТАУ – определение реакции звена (системы) на определенное входное воздействие.

Математически данная задача решается в три этапа:

- 1) Замена дифференциальных уравнений, описывающих звено (систему), алгебраическими уравнениями с переходом от оригиналов к изображениям.
- 2) Решение полученного уравнения (системы уравнений).
- 3) Перевод полученного решения из изображений в оригиналы.

Операторный метод

Сущность операторного метода заключается в том, что расчет переходного процесса переносится из области функций действительной переменной (времени t) в область функций комплексного переменного. При этом операции дифференцирования и интегрирования функций времени заменяются соответствующими операциями умножения и деления функций комплексного переменного на оператор p . Это существенно упрощает расчет, так как сводит систему дифференциальных уравнений к системе алгебраической. Переход из области действительного переменного в область функций комплексного переменного осуществляется с помощью *прямого преобразования Лапласа*. После этого решаются алгебраические уравнения относительно изображений искомых функций. Полученное решение алгебраических уравнений *обратным преобразованием Лапласа* переносится в область действительного переменного.

Прямое преобразование Лапласа определяется

уравнением

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (1)$$

где $f(t)$ – функция действительного переменного t , определенная при $t > 0$.

Функция $F(p)$, определяемая уравнением (1), называется **изображением по Лапласу**, а функция $f(t)$ в (1) – **оригиналом**.

Обратное преобра

решения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt} dp$$

целяют из

Следовательно, оригинал и изображение представляют собой пару функций действительного $f(t)$ и комплексного $F(p)$ переменного, связанных преобразованием Лапласа и поставленных друг другу в строгое соответствие

Для сокращения записи преобразований (1) используют следующую символику:

$$f(t) \equiv F(p); f(t) \leftrightarrow F(p); F(p) = L[f(t)]; f(t) = L^{-1}[F(p)] ,$$

где L – оператор Лапласа.

В дальнейшем для определенности будем использовать знак соответствия.

Функция оригинал $f(t)$		Изображение функции $F(p)$
Выражение функции	Вид функции	
$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$ единичная функция		$\frac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$		$\frac{1}{p + \alpha}$
$1 - e^{-\alpha t}$		$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
t		$\frac{1}{p^2}$
$e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$		$\frac{\beta - \alpha}{(p + \alpha)(p + \beta)}$

Рассмотрим некоторые **свойства преобразования Лапласа**, называемые также теоремами.

1. Теорема о сложении или линейность преобразования

$$L[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 L[f_1(t)] + a_2 L[f_2(t)] .$$

2. Теорема о дифференцировании

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = p \cdot F(p) - f(0_+).$$

$L[f(t-T)] = e^{-pT} L[f(t)] = e^{-pT} F(p)$

3. Теорема об интегрировании

$$L\left[\int_0^t f(t) \cdot dt\right] = \frac{F(p)}{p}.$$

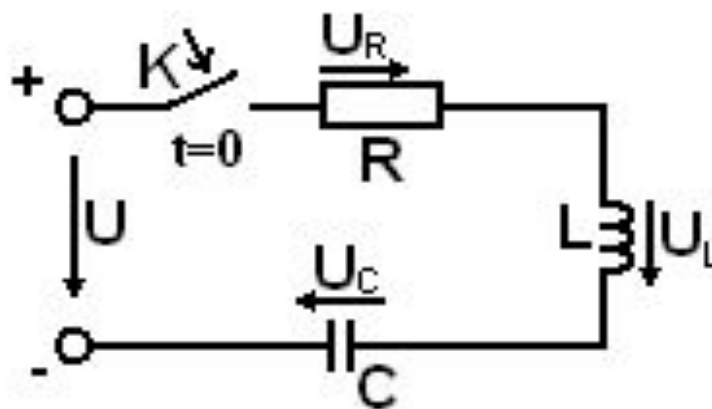
4. Теорема запаздывания

$$L[f(t-T)] = e^{-p \cdot T} \cdot L[f(t)] = e^{-p \cdot T} \cdot F(p).$$

Пользуясь основными свойствами преобразования Лапласа, можно получить основные законы теории цепей в операторной форме.

Рассмотрим, например, последовательный RLC – контур (рис.), находящийся при ненулевых начальных условиях:

$$U_c(0_-) \neq 0; i_L(0_-) \neq 0 .$$



Уравнение равновесия напряжений для этого контура согласно второго закона Кирхгофа имеет вид:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \int_{-\infty}^t i dt = Ri + L \frac{di}{dt} + U_c(0_-) + \frac{1}{c} \int_0^t i dt .$$

Применив к прямое преобразование Лапласа и учитывая свойства линейности дифференцирования и интегрирования оригинала или выражения для напряжений на резистивном индуктивном и емкостном элемент:

$$U(p) = RI(p) + LpI(p) - Li(0) + \frac{U_c(0)}{p} + \frac{1}{Cp} I(p)$$

Второй закон Кирхгофа в операторной форме:

$$\sum_{k=1}^m I_k(p)Z_k(p) = \sum_{k=1}^k E_k(p)$$

алгебраическая сумма операторных падений напряжений на всех участках замкнутого контура равна алгебраической сумме операторных ЭДС, включенных в этот контур.

Алгоритм анализа переходных процессов операторным методом.

Расчет переходного процесса операторным методом предусматривает следующий порядок операций:

- вычерчивается исходная расчетная схема замещения цепи и определяются начальные условия коммутации;
- все известные электрические величины и параметры изображаются в операторной форме (сложение функции – с помощью таблиц оригиналов и изображений) и осуществляется переход к операторной схеме замещения цепи;
- на основе законов Кирхгофа в операторной форме в соответствии с выбранным методом расчета цепи после ее коммутации составляется система операторных уравнений с учетом начальных условий, которая решается относительно изображений искомых переходных токов и напряжений;
- получение изображения искомых переходных токов и напряжений преобразуются либо к табличным, либо к виду, удобному для применения теоремы разложения, и определяются оригиналы (переходные токи и напряжения);
- производится анализ характера переходного процесса.

Уравнение в оригиналах
(обычное уравнение – среди x
(t))

Уравнение в изображениях
(среди $X(p)$)

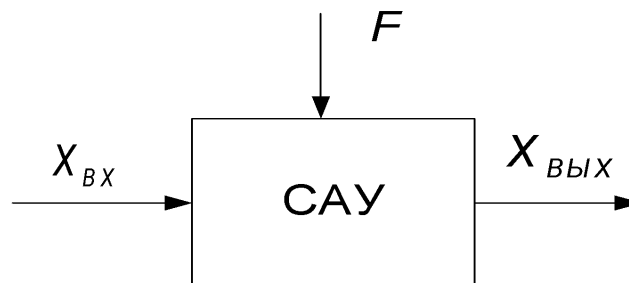
Уравнение решается относительно
неизвестного (решается как в
алгебре)

Возвращаются к оригиналам

1 Динамика объектов

Уравнение динамики объектов

Пусть дана система



Если получить систему дифференциальных уравнений, составленных для каждого элемента САУ относительно какой-либо одной регулируемой величины $x(t) = x_{ВЫХ}(t)$ по отношению к отклонению $x(t) = x_{ВХ}(t)$ и к возмущающему воздействию $f(t)$, то в результате получим **дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами** следующего вида:

$$\begin{aligned}
& a_n \frac{d^n x_{BBLX}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_{BBLX}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_{BBLX}}{dt} + a_0 \cdot \quad = \\
& = b_m \frac{d^m x_{BX}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x_{BX}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx_{BX}}{dt} + b_0 \cdot \quad + \\
& + c_k \frac{d^k f}{dt^k} + c_{k-1} \frac{d^{k-1} f}{dt^{k-1}} + \dots + c_1 \frac{df}{dt} + c_0 f
\end{aligned}$$

где $a_0, a_1, \dots, a_n; b_0, b_1, \dots, b_m; c_0, c_1, \dots, c_k$ — постоянные коэффициенты.

Уравнение носит название **общего дифференциального уравнения САУ** или **уравнения движения САУ**.

Применяя к дифференциальному уравнению при нулевых начальных условиях преобразование Лапласа, запишем это уравнение в операторной форме:

$$\begin{aligned} X_{\text{ВЫХ}}(p) \cdot [a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0] &= \\ = X_{\text{ВХ}}(p) \cdot [b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_1 \cdot p + b_0] &+ \\ + F(p) \cdot [c_k \cdot p^k + c_{k-1} \cdot p^{k-1} + \dots + c_1 \cdot p + c_0], & \end{aligned}$$

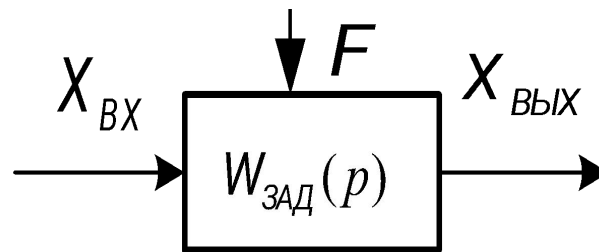
где $X_{\text{ВЫХ}}(p)$; $X_{\text{ВХ}}(p)$ и $F(p)$ – изображения соответственно функций $x_{\text{ВЫХ}}(t)$; $x_{\text{ВХ}}(t)$ и $f(t)$.

1.1 Понятие о передаточной функции

Передаточной функцией САУ по

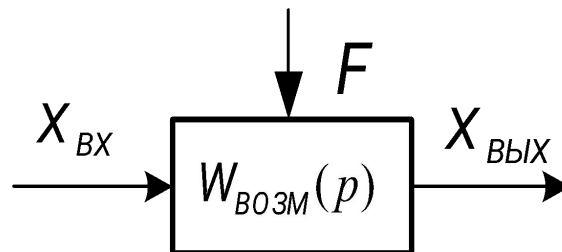
задающему воздействию называется отношение операторного изображения выходной величины САУ к операторному изображению входной величины САУ при нулевых начальных условиях, т.е.:

$$W_{\text{ЗАД}}(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{X_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$



- **передаточной функцией** САУ по возмущающему воздействию называют отношение операторного изображения выходной величины к операторному изображению возмущающего воздействия при нулевых начальных условиях

$$W_{\text{ВОЗМ}}(p) = \frac{X_{\text{ВЫХ}}(p)}{F(p)} = \frac{c_k p^k + c_{k-1} p^{k-1} + \dots + c_1 p + c_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$



Т.к. при записи уравнений линейной САУ в операторной форме дифференциальные уравнения становятся алгебраическими, то с ними можно оперировать совершенно так же, как с линейными уравнениями для установившегося режима.

Обозначим соответственно

$$A^n(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0;$$

$$B^m(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0$$

- ПОЛИНОМЫ

n -ой и m -ой степени от p .

Тогда передаточная функция по задающему воздействию равна $W(p) = \frac{B^m(p)}{A^n(p)}$,

$$A^n(p) = 0$$

где - характеристическое уравнение.

Найдём переходную функцию при входном единичном ступенчатом воздействии

$$x_{BX}(t) = 1(t), \text{ тогда } X_{BX}(p) = \frac{1}{p}.$$

Вычислим

$$X_{ВЫХ}(p) = X_{BX}(p) \cdot W(p) = \frac{1}{p} \cdot W(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{B^m(p)}{A^n(p)} = \frac{B^m(p)}{G^{n+1}(p)}.$$

Перейдём к оригиналу.

$$x_{ВЫХ}(t) = \frac{B^m(0)}{\frac{dG^{n+1}(0)}{dp}} + \sum_{i=2}^{n+1} \frac{B^m(p_i)}{\frac{dG^{n+1}(p_i)}{dp}} \cdot e^{p_i t}$$

где p_i – корни уравнения $G^{n+1}(p) = 0$.

1.2 Частотные характеристики

Совместное изменение амплитуды и фазы выходной величины от частоты можно получить, если представить синусоидальные функции **в комплексной форме**:

$$X_{BX}(j\omega) = A_{BX} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_{BX})}$$

$$X_{ВЫХ}(j\omega) = A_{ВЫХ} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_{ВЫХ})}$$

Если взять отношение выходной величины $X_{ВЫХ}(j\omega)$ к входной величине $X_{ВХ}(j\omega)$, то получим

$$W(j\omega) = \frac{X_{ВЫХ}(j\omega)}{X_{ВХ}(j\omega)} = \frac{A_{ВЫХ}(\omega)}{A_{ВХ}(\omega)} e^{j[\varphi_{ВЫХ}(\omega) - \varphi_{ВХ}(\omega)]} = (\omega) \cdot j\varphi(\omega)$$

- показательная форма записи комплексного числа

Комплексная функция $W(j\omega)$ называется **комплексным коэффициентом передачи САУ** или **амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ) САУ**. Модуль этой функции представляет собой **амплитудно-частотную характеристику (АЧХ)**, а аргумент – **фазо-частотную характеристику (ФЧХ)**.

В общем случае $W(j\omega)$ может быть представлен в виде числа $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$,

алгебраическая форма записи комплексного числа

где $P(\omega)$ – называется вещественной частотной характеристикой САУ (ВЧХ);

$Q(\omega)$ – называется мнимой частотной

Между собой ВЧХ, МЧХ и АЧХ, ФЧХ связаны

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}.$$

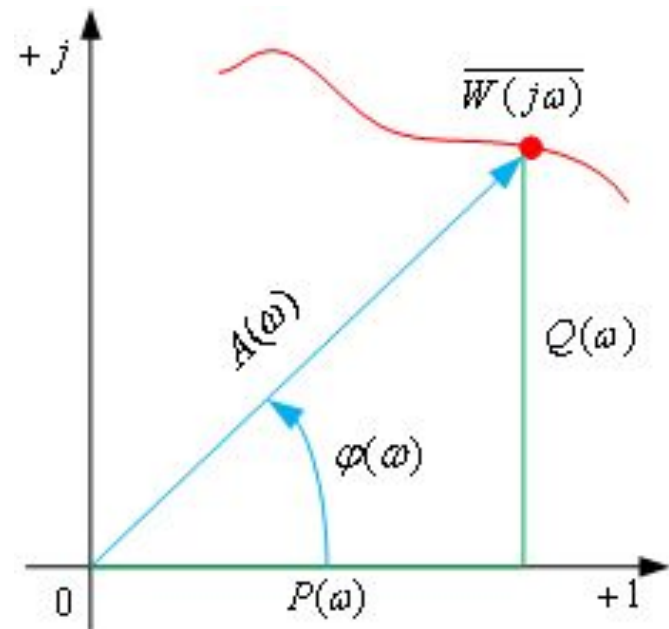
$$P(\omega) = A(\omega) \cdot \cos \varphi(\omega),$$

$$Q(\omega) = A(\omega) \cdot \sin \varphi(\omega).$$

Комплексное число можно представить на плоскости. Изменяя $0 < \omega < \infty$, получим **график**. График называется годографом –

$$\text{год} W(j \cdot \omega) = \text{год} W(j \cdot \omega)$$

АЧХ, ФЧХ – **полярная** система координат и ВЧХ, МЧХ – **декартова** система координат.

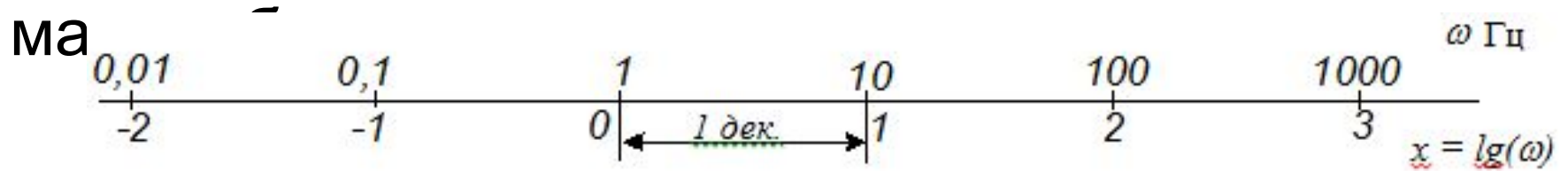


Логарифмические частотные характеристики

В практических расчетах наряду с использованием АФЧХ широко используются так называемые **логарифмические амплитудные фазовые частотные** характеристики ЛАФЧХ или просто логарифмические частотные характеристики. При этом различают **логарифмические амплитудные частотные характеристики** (ЛАЧХ) и **логарифмические фазовые частотные характеристики** (ЛФЧХ).

ЛАЧХ называют зависимость $L(\omega) = \lg A(\omega)$ от $\lg(\omega)$, ЛФЧХ называют зависимость $\phi(\omega)$ от $\lg(\omega)$.

При построении ЛЧХ по **оси абсцисс** откладывается частота в логарифмическом



Интервал частот, кратный 10, называется **декадой**.

По оси **ординат** при построении ЛАЧХ откладывается величина $L(\omega)$ в логарифмическом масштабе (**лог**).

Логарифм может быть разбит на более мелкие единицы
 $1 \text{ лог} = 10 \text{ дл}$ (децилог) = 20 дб (децибел), таким образом:

$$Y [\text{дл}] = 10 \lg k,$$

$$Y [\text{дб}] = 20 \lg k.$$

По оси ординат при построении ЛФЧХ откладывается величина ϕ в **градусах**, т.е. полулогарифмический масштаб.

Ось ординат



$L(\omega)$	$y = \lg A(\omega)$		
	лог.	дл.	дб.
100	2	20	40
10	1	10	20
1	0	0	0
0,1	-1	-10	-20
0,01	-2	-20	-40

Достоинства ЛЧХ:

- При использовании ЛЧХ представляется возможным изображать величины, **несоизмеримые в равномерном** масштабе (например, от 0,001 до 1000).
- При использовании ЛЧХ **операция умножения** коэффициентов усилительных звеньев заменяется **операцией сложения** ординат характеристик этих звеньев.
- При использовании логарифмического масштаба нелинейные зависимости превращаются в **прямые линии**.