

Алгоритмы и анализ сложности

Анализ трудоемкости алгоритмов

Трудоёмкость алгоритма

Элементарный шаг – это действие, время выполнения которого не зависит от числа входных переменных и их значений.

Трудоёмкость – это функция зависимости количества элементарных действий от входного параметра n при $n \rightarrow \infty$ (асимптотическая трудоёмкость).

На практике важно не точное значение, а **порядок роста** $T(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Используется обозначение $T(n) = O(f(n))$, если существуют такие константы $c > 0, n_0 > 0$, что $\forall n > n_0 \quad T(n) \leq cf(n)$.

Типичные случаи для трудоемкости

$T(n) = O(\log n)$ - логарифмическая,

$\log_a n = \log_a 2 \cdot \log_2 n$ (отличаются в **const** раз)

$T(n) = O(n)$ - линейная

$T(n) = O(n \log n)$ - линейно-логарифмическая

$T(n) = O(n^k), k > 1$ – полиномиальная

$T(n) = O(2^{cn}), c = \text{const}$ – экспоненциальная,

для случая $a^{cn}, a > 1, k > 0: a^{cn} = 2^{\log a \cdot cn}$, т.е.

разница в $2^{(c \log a - 1)n} \neq \text{const}$ раз.

$T(n) = O(n!)$

Функции трудоемкости

n	$\lceil \log_2 n \rceil$	$n \lceil \log_2 n \rceil$	n^2	n^3	2^n
4	2	8	16	64	16
10	4	40	100	1000	1024
20	5	100	400	8000	$\approx 10^6$
40	6	240	1600	64000	$\approx 10^{12}$
100	7	700	10000	10^6	$\approx 10^{30}$
1000	10	10000	10^6	10^9	$\approx 10^{300}$
10^6	20	$20 \cdot 10^6$	10^{12}	10^{18}	$\approx 10^{300000}$
10^9	30	$30 \cdot 10^9$	10^{18}	10^{27}	$\approx 10^{300000000}$

На выполнение 10^{18} действий при скорости 10^9 действий в 1 секунду потребуется более 30 лет.

Соотношения для оценки и сравнения трудоемкостей

∀ $a > 0, b > 0$ выполняется:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^a n}{n^b} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^b}{2^n} = 0$$

Формула Стирлинга для больших значений n :

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = O(n^n)$$

$$\log(n!) \approx n \log n - n \log e + \frac{1}{2}(\log n + \log 2\pi) = O(n \log n)$$

Типы трудоемкостей

• Трудоемкость **в наихудшем** $T_{worst}(n)$

• Трудоемкость **в наилучшем** $T_{best}(n)$

• Трудоемкость **в среднем**:

для генеральной совокупности всех случаев выполнения алгоритма на разных входах i с вероятностями p_i и трудоемкостями $T_i(n)$

вычисляется $T_{mid}(n) = \sum_i p_i T_i(n)$

Эффективный алгоритм:

- имеет наилучшее соотношение трудоемкости и емкостной сложности **или**
- имеет трудоемкость на уровне известной нижней границы

Алгоритмы, основанные на сравнениях

Пусть имеется **множество решений** V .

Первое **сравнение** приводит к разделению всего множества решений на **два подмножества** и выбору одного из них. После 2 сравнений мы потенциально можем проверить $2^2 = 4$ различных подмножеств, после t сравнений - 2^t .

Наша цель – выйти на одно из $|V|$ конечных решений. Гарантированно сделать это за t сравнений для любого входа можно только при $2^t \geq |V|$, т.е. при $t \geq \log(|V|)$ – это **минимальная гарантированная трудоемкость в наихудшем** для алгоритмов основанных на сравнениях.

Поиск в массиве

Мощность множества решений $|V| = n$.

В **неупорядоченном массиве** $T_{worst}(n) = O(n)$.

Для **дихотомического поиска**:

в общем случае $2^{k-1} < n \leq 2^k$, и при первом разделении массив делится на части длины $\lfloor n/2 \rfloor$ и $\lceil n/2 \rceil$, причем $2^{k-2} \leq \lfloor n/2 \rfloor \leq \lceil n/2 \rceil \leq 2^{k-1}$.

Поэтому требуется не более $k = \lceil \log n \rceil$ разделений массива и $T_{worst}(n) = \lceil \log n \rceil + 1 = O(\log n)$, т.е. совпадает с минимальной гарантированной трудоемкостью в наихудшем. Следовательно, алгоритм дихотомического поиска является **эффективным**.

1-я теорема о временной сложности

Пусть трудоемкость можно представить соотношением

$$T(n) = \left\{ \begin{array}{l} b, n = 1 \\ aT(n-1) + bn^p, n > 1, p \geq 0 \end{array} \right\}$$

Тогда:

1. $T(n) = O(n^{p+1})$ при $a = 1$
2. $T(n) = O(2^{cn})$, $c = const$, при $a > 1$.

Доказательство основано на последовательном разложении рекуррентного соотношения.

1-я теорема о временной сложности

Доказательство:

$$\begin{aligned} T(n) &= aT(n-1) + bn^p = a^2T(n-2) + ab(n-1)^p + bn^p = \\ &= a^3T(n-3) + a^2b(n-2)^p + ab(n-1)^p + bn^p = \\ &= b(a^{n-1}1^p + a^{n-2}2^p + \dots + a(n-1)^p + 1 \cdot n^p) \end{aligned}$$

1. При $a = 1$ и больших n : $T(n) \approx b \frac{n^{p+1}}{p+1} = O(n^{p+1})$

2. Если $a > 1$, то $T(n)$ минимальна при $p = 0$:

$$T_{\min}(n) = \frac{b(a^n - 1)}{a - 1} = \frac{b(2^{\log a \cdot n} - 1)}{a - 1} = O(2^{cn})$$

В случае $T(n) = aT(n-c) + bn^p$ **порядок** сохраняется

Примеры использования 1-й теоремы

Все простые алгоритмы сортировки массива длины n :

$$T(n) = cn + T(n - 1) = O(n^2)$$

Рекурсивный алгоритм для чисел Фибоначчи:

$$T(n) = T(n - 1) + T(n - 2) + b = O(2^n)$$

Задача «Ханойские башни»:

$$T(n) = 2T(n - 1) + b = O(2^n)$$

2-я теорема о временной сложности

Пусть трудоемкость можно представить соотношением

$$T(n) = \left\{ \begin{array}{l} b, n = 1 \\ aT\left(\frac{n}{c}\right) + bn^p, n > 1, c > 1, p \geq 0 \end{array} \right\}$$

Тогда:

1. $T(n) = O(n^p)$ при $a < c^p$
2. $T(n) = O(n^p \log n)$ при $a = c^p$
3. $T(n) = O(n^{\log_c a})$ при $a > c^p$

Доказательство основано на последовательном разложении рекуррентного соотношения.

2-я теорема о временной сложности

Доказательство: положим $n = c^k$ ($n, k \rightarrow \infty$), тогда

$$\begin{aligned}T(n) &= aT\left(\frac{n}{c}\right) + bn^p = a^2T\left(\frac{n}{c^2}\right) + ab\left(\frac{n}{c}\right)^p + bn^p = \\&= a^3T\left(\frac{n}{c^3}\right) + a^2b\left(\frac{n}{c^2}\right)^p + ab\left(\frac{n}{c}\right)^p + bn^p = \\&= b\left(a^k\left(\frac{n}{c^k}\right)^p + a^{k-1}\left(\frac{n}{c^{k-1}}\right)^p + \dots + a^1\left(\frac{n}{c^1}\right)^p + a^0\left(\frac{n}{c^0}\right)^p\right) = \\&= bn^p\left(\left(\frac{a}{c^p}\right)^k + \left(\frac{a}{c^p}\right)^{k-1} + \dots + \left(\frac{a}{c^p}\right)^1 + \left(\frac{a}{c^p}\right)^0\right)\end{aligned}$$

где $k = \log_c n = \log_c 2 \cdot \log n$.

2-я теорема о временной сложности

- 1. Если $a < c^p$, то
$$T(n) = bn^p \frac{1 - \left(\frac{a}{c^p}\right)^{k+1}}{1 - \frac{a}{c^p}} = O(n^p)$$
 2. Если $a = c^p$, то $T(n) = bn^p (\log_c n + 1) = O(n^p \log n)$
 3. Если $a > c^p$, то
$$T(n) = bn^p \frac{\left(\frac{a}{c^p}\right)^{k+1} - 1}{\frac{a}{c^p} - 1} = \frac{bn^p}{\frac{a}{c^p} - 1} \left(\frac{a^{k+1}}{n^p c^p} - 1 \right)$$

где $\log_c a > p$, $a^k = a^{\log_c n} = n^{\log_c a}$ и $T(n) = O(n^{\log_c a})$.

Порядок $T(n)$ сохраняется и при $c^{k-1} < n \leq c^k$.

Примеры использования 2-й теоремы

Дихотомический поиск в массиве длины n :

$$T(n) = b + T(n/2) = O(\log n)$$

Рекурсивная сортировка слиянием:

$$T(n) = 2T(n/2) + bn = O(n \log n)$$