

БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф.  
Устинова

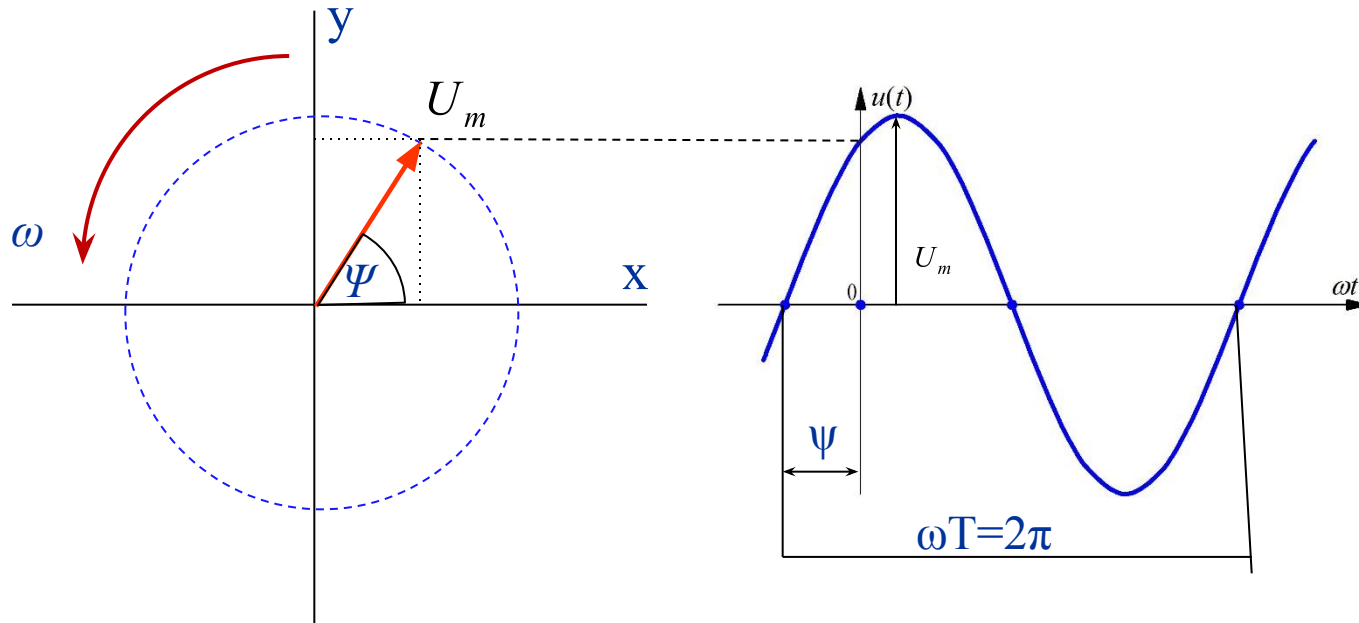
Кафедра электротехники, О8

Лекция 4

Расчет электрических цепей  
переменного тока

# Представление синусоидальной функции в векторной форме

Декартова система координат



$U_m$  - амплитуда напряжения и тока

$\psi_u$  - начальная фаза напряжения и тока

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  - циклическая частота, или угловая скорость

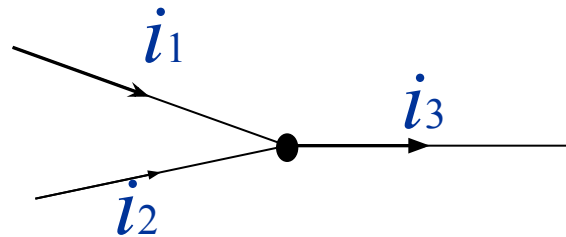
Проекции вращающегося вектора на оси x и y

$$u_x = U_m \sin(\omega t + \psi_U)$$

$$u_y = U_m \cos(\omega t + \psi_U)$$

### Мгновенные значения токов:

$$i_1(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{i1}) \quad i_2(t) = I_{2m} \sin(\omega t + \psi_{i2})$$



$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$i_3(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \psi_{i1}) + I_{2m} \sin(\omega t + \psi_{i2}) = I_{3m} \sin(\omega t + \psi_{i3})$$

Определение амплитуды  $I_{3m}$  и  $\psi_3$  начальной фазы этого тока путем соответствующих тригонометрических преобразований получается довольно громоздким и мало наглядным.

## Построение векторов для действующих значений $I_1$ и $I_2$

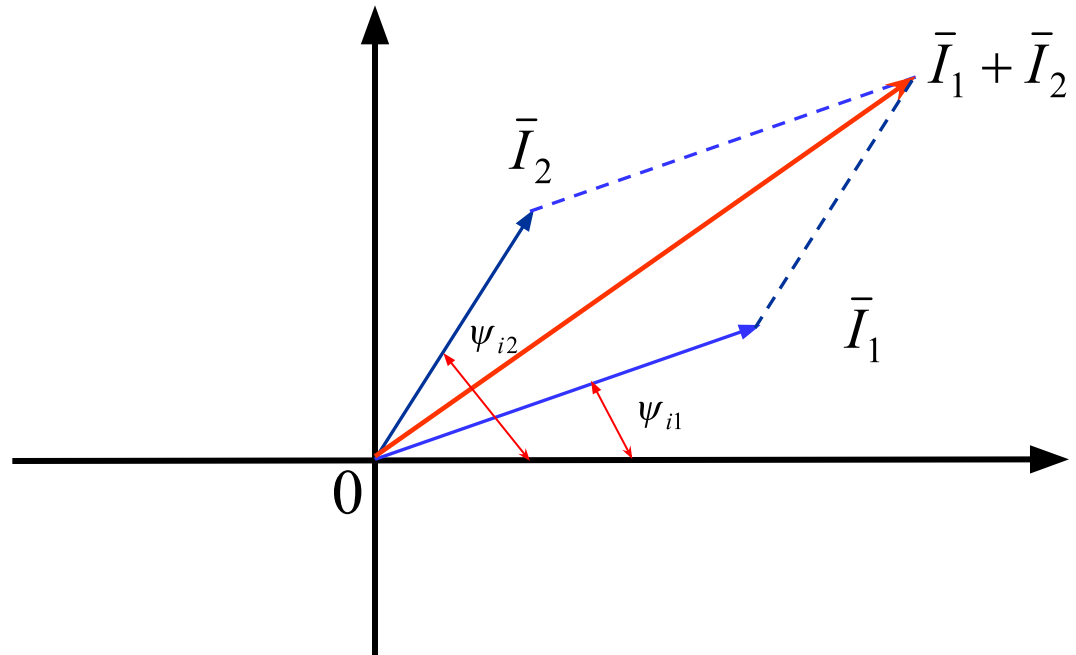
Действующие  
значения токов:

$$I_1 = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}}$$

$$I_2 = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}}$$

$$i_3(t) = i_1(t) + i_2(t)$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

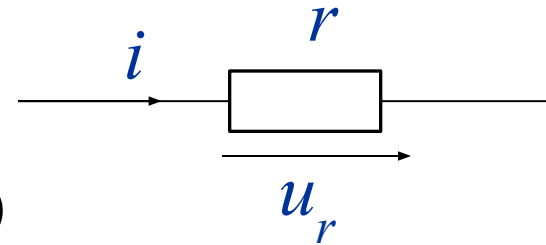


Совокупность векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся ЭДС, напряжения и токи, называют **векторными диаграммами**.

Их применение делает расчет цепи более наглядным и простым.

## Примеры:

Активный элемент



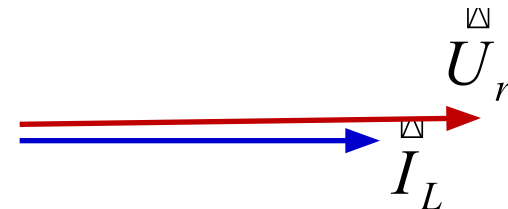
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \iff \overset{\sphericalangle}{I}_r (\overset{\sphericalangle}{I}_{r_m})$$

$$u_r(t) = i \cdot r = I_m \cdot r \cdot \sin(\omega t + \psi_i) \iff \overset{\sphericalangle}{U}_r (\overset{\sphericalangle}{U}_{r_m})$$

$$= U_{r_m} \sin(\omega t + \psi_i)$$

Фазовый сдвиг

$$\varphi = \psi_{i_r} - \psi_{u_r} = 0^\circ$$



Напряжение на активном элементе совпадает по фазе с током  $\phi = 0^\circ$

Закон Ома

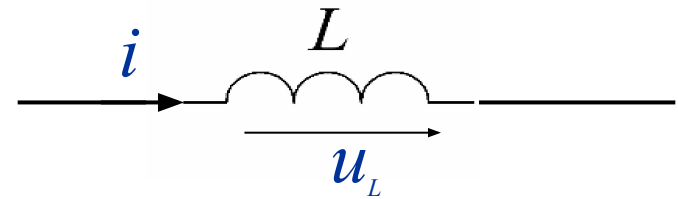
$$U = Ir$$

Закон Джоуля - Ленца

$$P = I^2 r \text{ Вт}$$

## Примеры:

### Индуктивный элемент



$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \quad \longleftrightarrow \quad \overset{\sim}{I}_L (\overset{\sim}{I}_{Lm})$$

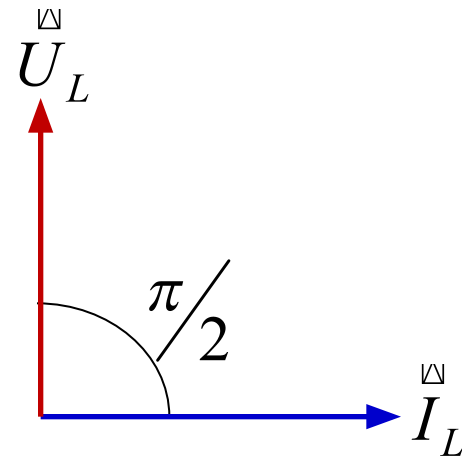
$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = I_m \omega L \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) \quad \longleftrightarrow \quad \overset{\sim}{U}_L (\overset{\sim}{U}_{Lm})$$

$$= I_m x_L \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ)$$

$$= U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ)$$

### Фазовый сдвиг

$$\psi_{i_L} - \psi_{u_L} = 90^\circ$$



Напряжение на индуктивном элементе опережает ток по фазе на  $90^\circ$

Закон Ома

$$U = I x_L$$

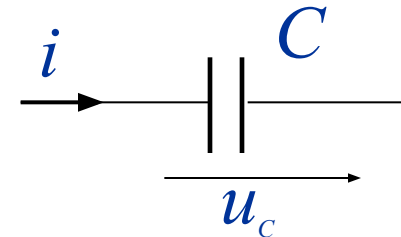
Закон Джоуля - Ленца

$$Q = I^2 x_L \text{ ВАр}$$

## Примеры:

Ёмкостной элемент

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \iff \overset{\sim}{I}_C (\overset{\sim}{I}_{Cm})$$



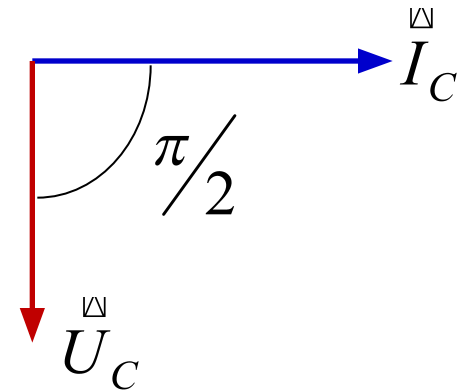
$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \frac{1}{\omega C} \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ) \iff \overset{\sim}{U}_C (\overset{\sim}{U}_{Cm})$$

$$= I_m x_C \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ)$$

$$= U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ)$$

Фазовый сдвиг

$$\psi_{i_L} - \psi_{u_L} = 90^\circ$$



Напряжение на ёмкостном элементе отстает от тока по фазе на  $90^\circ$

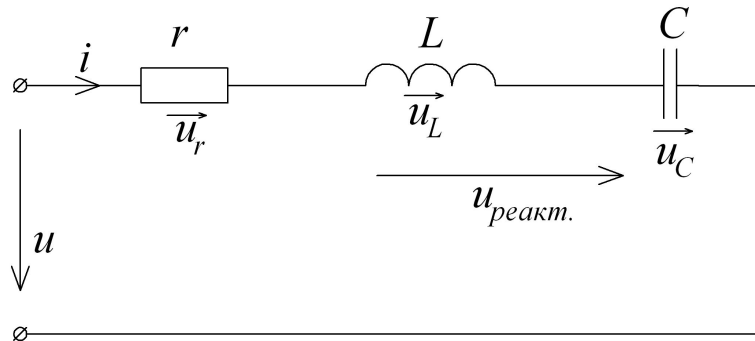
Закон Ома

$$U_C = I x_C$$

Закон Джоуля - Ленца

$$Q = I^2 x_C \text{ ВАр}$$

## Последовательное соединение $rLC$ в цепи синусоидального переменного тока



$$i = \sqrt{2}I \sin \omega t$$

$$u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi)$$

Второй закон Кирхгофа для мгновенных напряжений

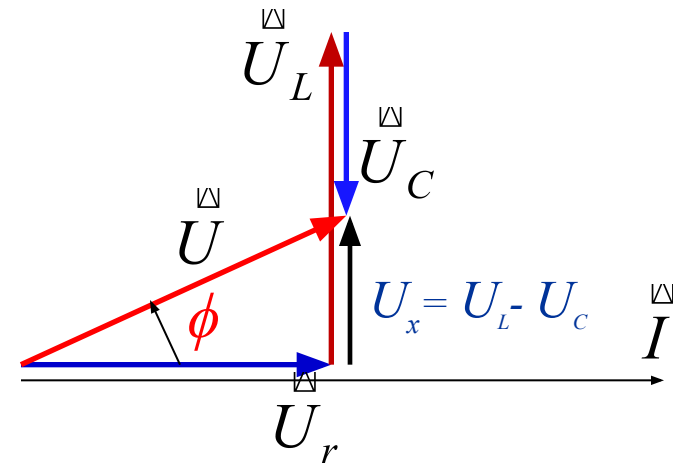
$$u = u_r + u_L + u_C$$

Составим второй закон Кирхгофа для векторов напряжений

$$\vec{U} = \vec{U}_r + \vec{U}_L + \vec{U}_C$$

Фазовый сдвиг  $\phi$  между током  $I$  и напряжением  $U$

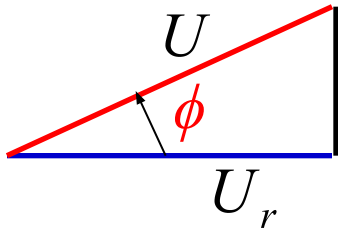
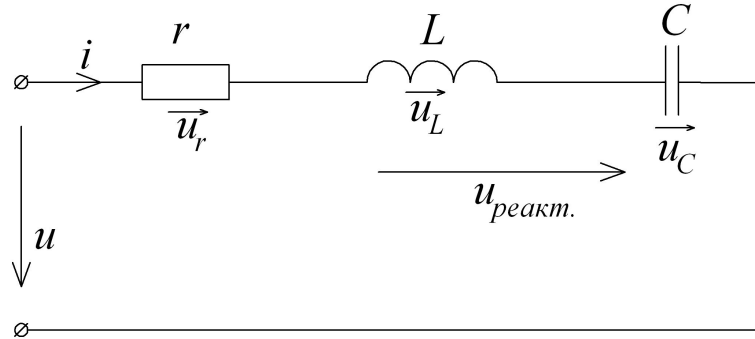
$$\varphi = \arctg \frac{U_x}{U_r} = \arctg \frac{U_L - U_C}{U_r}$$



Векторная диаграмма для последовательного соединения  $rLC$



## Треугольники напряжений, сопротивлений и мощностей

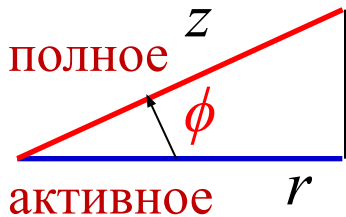


$$U_x = U_L - U_C$$

Треугольник напряжений

$$U^2 = U_r^2 + U_x^2 = U_r^2 + (U_L - U_C)^2$$

Если все стороны **треугольника напряжений** поделим на  $I$



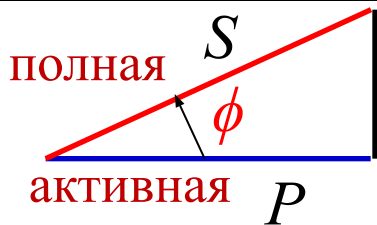
$$x = x_L - x_C$$

реактивное

Треугольник сопротивлений

$$z^2 = r^2 + x^2 = (x_L - x_C)^2$$

Если все стороны **треугольника напряжений** умножим на  $I$



реактивная

$$Q = Q_L - Q_C$$

Треугольник мощностей

$$S^2 = P^2 + Q^2 = (Q_L - Q_C)^2$$

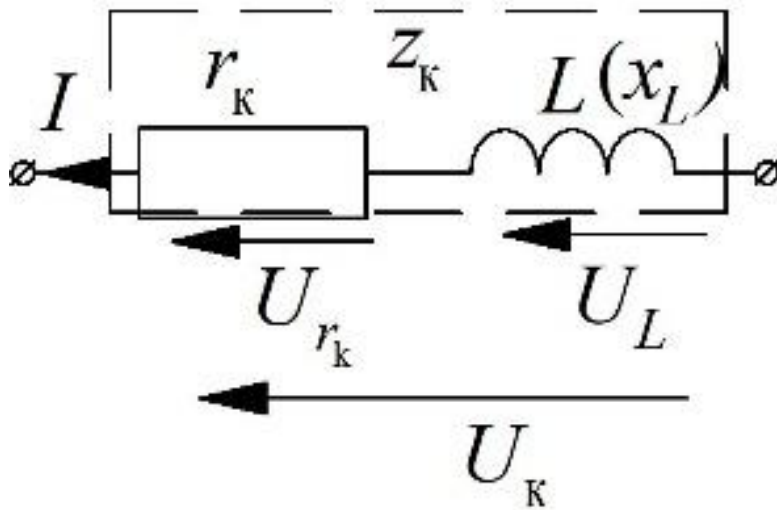
$$P = S \cos \varphi = UI \cos \varphi$$

## Схемы замещения реальных элементов

### 1. Реальная катушка индуктивности

Реальная катушка индуктивности замещается последовательно соединенными идеальными элементами:

- $r_k$  активное сопротивление катушки, учитывающие потери;
- $x_L(L)$  реактивное сопротивление индуктивности (индуктивность)

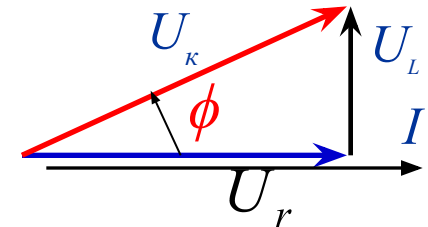


$z_k$  - полное сопротивление катушки

$$z_k^2 = r_k^2 + x_L^2 = r_k^2 + (\omega L)^2$$

2-й закон Кирхгофа  
(в векторной форме)

$$\vec{U}_k = \vec{U}_{r_k} + \vec{U}_L$$



Определение параметров схемы замещения реальной катушки

$$z_k = \frac{U_k}{I}$$

$$r_k = \frac{P}{I^2}$$

$$x_L = \sqrt{z_k^2 - r_k^2}$$

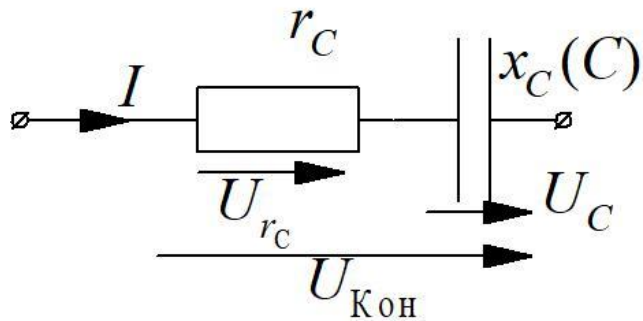
$$L = \frac{x_L}{\omega}$$

# Схемы замещения реальных элементов

## 2. Реальный конденсатор

Реальный конденсатор замещается последовательно соединенными идеальными элементами:

- $r_C$  активное сопротивление конденсатора, учитывающие потери;
- $x_C(C)$  реактивное сопротивление ёмкости (ёмкость)



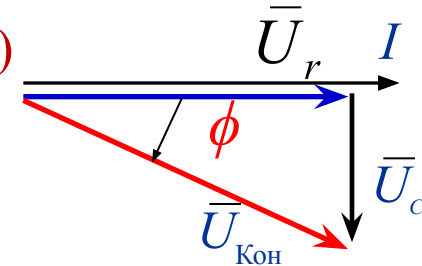
$$U_C \approx U_{\text{КОН}} \quad \phi \rightarrow -90^\circ$$

$z_k$  - полное сопротивление конденсатора

$$z_k^2 = r_k^2 + x_C^2 = r_k^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2$$

2-й закон Кирхгофа  
(в векторной форме)

$$\vec{U}_{\text{КОН}} = \vec{U}_{r_C} + \vec{U}_C$$



Определение параметров схемы замещения реальной катушки

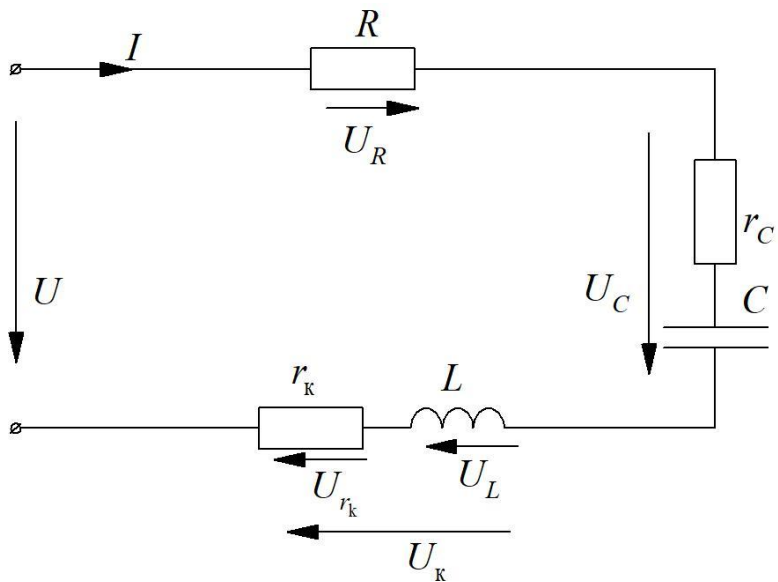
$$z_C = \frac{U_{\text{КОН}}}{I}$$

$$r_C = \frac{P}{I^2}$$

$$x_C = \sqrt{z_{\text{КОН}}^2 - r_C^2}$$

$$C = x_C \cdot \omega$$

Пример расчёта последовательного соединения реальной катушки, резистора и конденсатора



1. 
$$z = \frac{U}{I}$$

3. 
$$x_C = \frac{U_C}{I}$$

2. 
$$R + r_k = \frac{P}{I^2}$$

4. 
$$x = \pm \sqrt{z^2 - (R + r_k)^2}$$

Измерения						Вычисления							
$I$	$U$	$P$	$U_r$	$U_C$	$U_k$	$z$	$R+r_k$	$x_L$	$x_C$	$x$	$\phi$	$z_k$	
1	58	55	36	52	40	58	55	33,6	52	18,4	-18°	40	

5. 
$$\phi = \arctg \frac{x}{R + r_k}$$

6. 
$$x = x_L - x_C$$
  

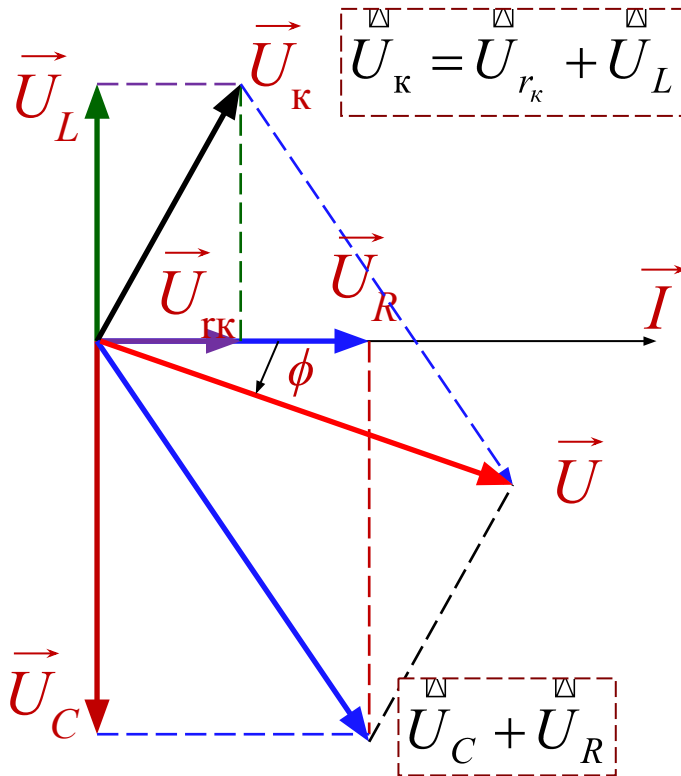
$$x_L = \pm x + x_C$$

7. 
$$z_k = \frac{U_k}{I}$$

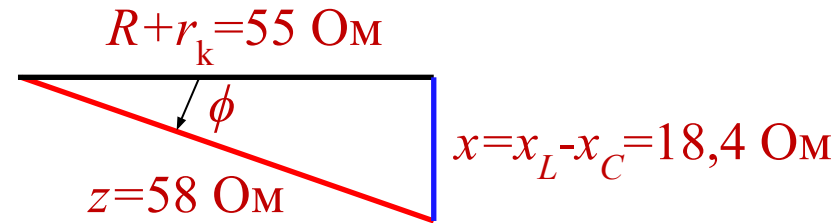
## Построение векторной диаграммы

Измерения						Вычисления							
$I$	$U$	$P$	$U_R$	$U_C$	$U_K$	$z$	$R+r_k$	$x_L$	$x_C$	$x$	$\phi$	$z_k$	
1	58	55	36	52	40	58	55	33,6	52	18,4	-18°	40	

$$U = U_R + U_C + U_{r_k} + U_L$$



### Треугольник сопротивлений



### Треугольник мощностей

