БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова

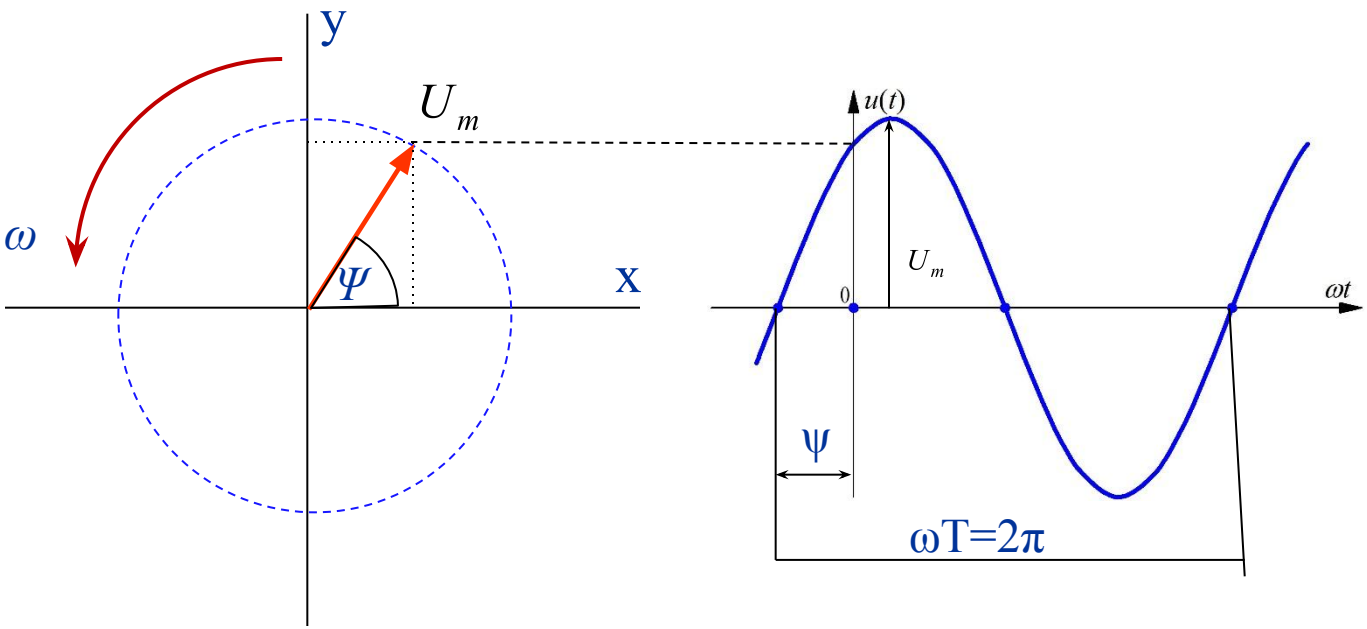
Кафедра электротехники, О8

Лекция 4

Расчет электрических цепей переменного тока

Представление синусоидальной функции в векторной форме

Декартовая система координат



U_m - амплитуда напряжения и тока

ψ_u - начальная фаза напряжения и тока

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$ – циклическая частота, или угловая скорость

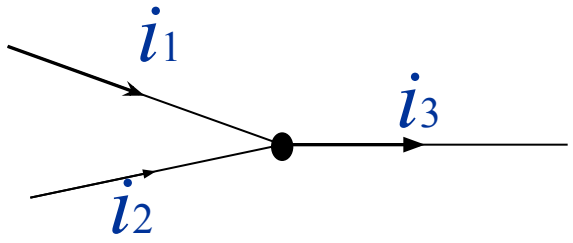
Проекции вращающегося вектора на оси x и y

$$u_x = U_m \sin(\omega t + \psi_U)$$

$$u_y = U_m \cos(\omega t + \psi_U)$$

Мгновенные значения токов:

$$i_1(t) = I_{1m}\sin(\omega t + \psi_{i1}) \qquad i_2(t) = I_{2m}\sin(\omega t + \psi_{i2})$$



$$i_3(t) = i_1(t) + i_3(t)$$

$$i_3(t) = I_{1m}\sin(\omega t + \psi_{i1}) + I_{2m}\sin(\omega t + \psi_{i2}) = I_{3m}\sin(\omega t + \psi_{i3})$$

Определение амплитуды I_{3m} и ψ_3 начальной фазы этого тока путем соответствующих тригонометрических преобразований получается довольно громоздким и мало наглядным.

Построение векторов для действующих значений I_1 и I_2

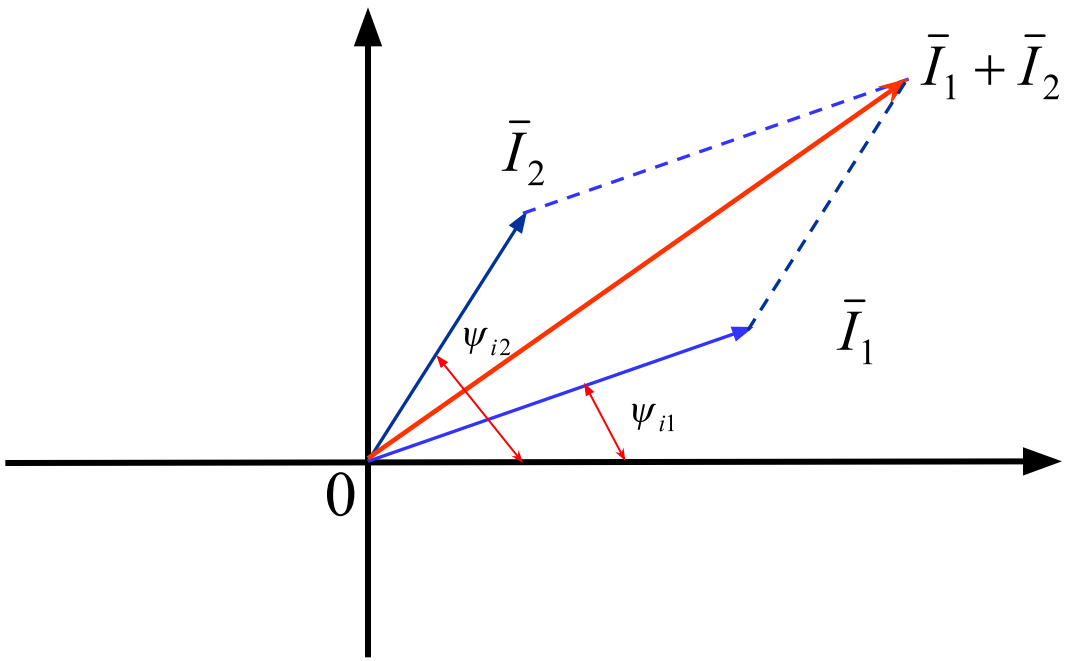
Действующие значения токов:

$$I_1 = \frac{I_{1m}}{\sqrt{2}}$$

$$I_2 = \frac{I_{2m}}{\sqrt{2}}$$

$$i_3(t) = i_1(t) + i_3(t)$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

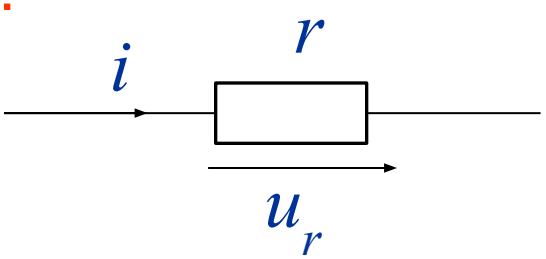


Совокупность векторов, изображающих синусоидально изменяющиеся ЭДС, напряжения и токи, называют **векторными диаграммами.**

Их применение делает расчет цепи более наглядным и простым.

Примеры:

Активный элемент



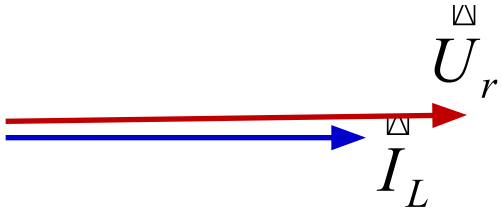
$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \Longleftrightarrow \dot{I}_r(\dot{I}_{r_m})$$

$$u_r(t) = i \cdot r = I_m \cdot r \cdot \sin(\omega t + \psi_i) \Longleftrightarrow \dot{U}_r(\dot{U}_{r_m})$$

$$= U_{r_m} \sin(\omega t + \psi_i)$$

Фазовый сдвиг

$$\varphi = \psi_{i_r} - \psi_{u_r} = 0^\circ$$



Напряжение на активном элементе совпадает по фазе с током ϕ = 0°

Закон Ома

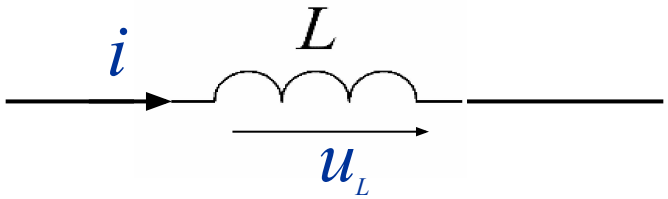
$$U = Ir$$

Закон Джоуля -Ленца

$$P = I^2 r \text{ Вт}$$

Примеры:

Индуктивный элемент

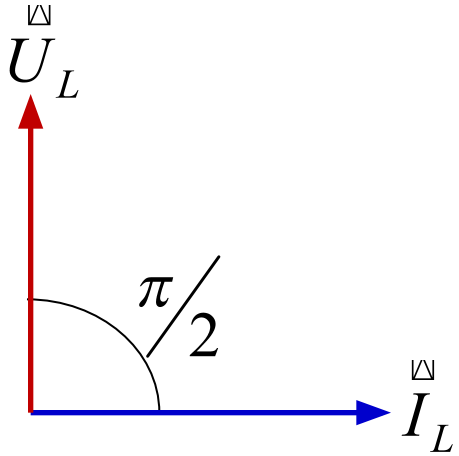


$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \Longleftrightarrow \dot{I}_L(\dot{I}_{Lm})$$

$$u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} = I_m \omega L \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) \Longleftrightarrow \dot{U}_L(\dot{U}_{Lm})$$

$$= I_m x_L \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ)$$

$$= U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ)$$



Фазовый сдвиг

$$\psi_{i_L} - \psi_{u_L} = 90^\circ$$

Напряжение на индуктивном элементе опережает ток по фазе на 90°

Закон Ома

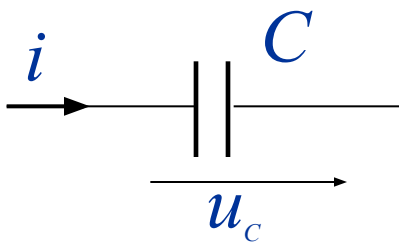
$$U = Ix_L$$

Закон Джоуля -Ленца

$$Q = I^2 x_L \text{ ВАр}$$

Примеры:

Ёмкостной элемент

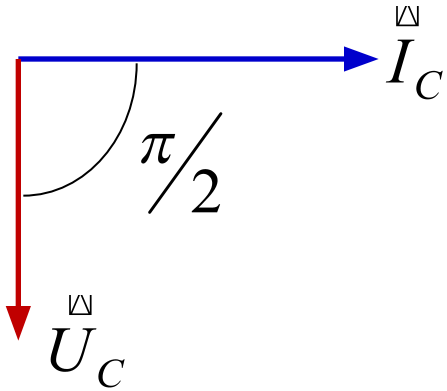


$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i) \Longleftrightarrow \dot{I}_C(\dot{I}_{Cm})$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \frac{1}{\omega C}\sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ) \Longleftrightarrow \dot{U}_C(\dot{U}_{Cm})$$

$$= I_m x_C \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ)$$

$$= U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ)$$



Фазовый сдвиг

$$\psi_{i_L} - \psi_{u_L} = 90^\circ$$

Напряжение на ёмкостном элементе отстаёт от тока по фазе на 90°

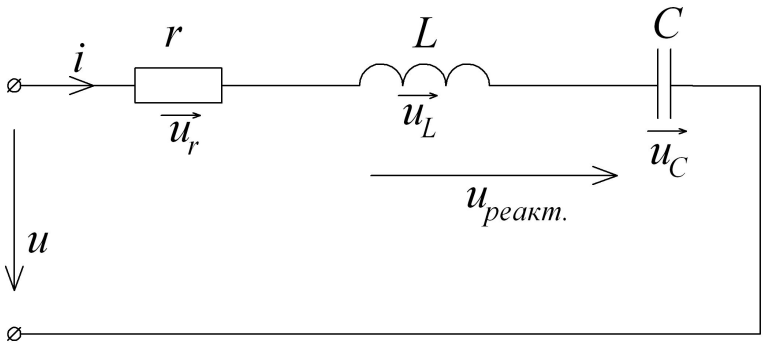
Закон Ома

$$U_C = I x_C$$

Закон Джоуля -Ленца

$$Q = I^2 x_C \text{ ВАр}$$

Последовательное соединение *rLC* в цепи синусоидального переменного тока



$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$$

$$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi)$$

Второй закон Кирхгофа для мгновенных напряжений

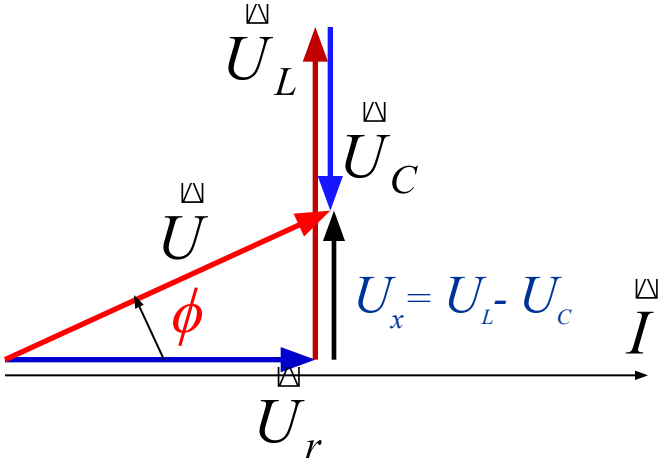
$$u = u_r + u_L + u_C$$

Составим второй закон Кирхгофа для векторов напряжений

$$\dot{U} = \dot{U}_r + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

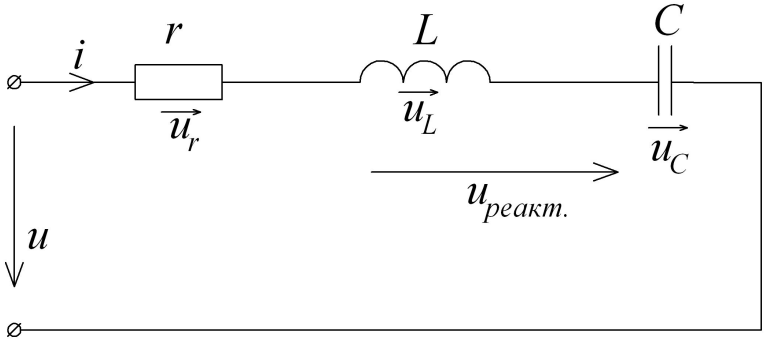
Фазовый сдвиг ϕ между током I и напряжением U

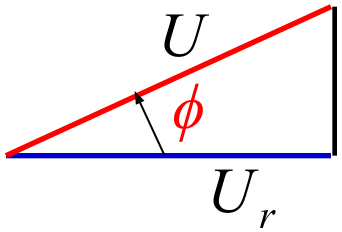
$$\varphi = arctg \frac{U_x}{U_r} = arctg \frac{U_L - U_C}{U_r}$$



Векторная диаграмма для последовательного соединения *rLC*

Треугольники напряжений, сопротивлений и мощностей



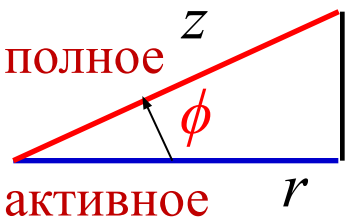


$U_x = U_L - U_C$

Треугольник напряжений

$$U^2 = U_r^2 + U_x^2 = U_r^2 + (U_L - U_C)^2$$

Если все стороны треугольника напряжений поделим на I



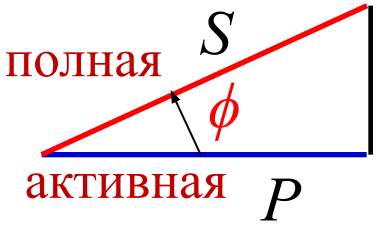
$x = x_L - x_C$

реактивное

Треугольник сопротивлений

$$z^2 = r^2 + x^2 = (x_L - x_C)^2$$

Если все стороны треугольника напряжений умножим на I



реактивная

$Q = Q_L - Q_C$

Треугольник мощностей

$$S^2 = P^2 + Q^2 = (Q_L - Q_C)^2$$

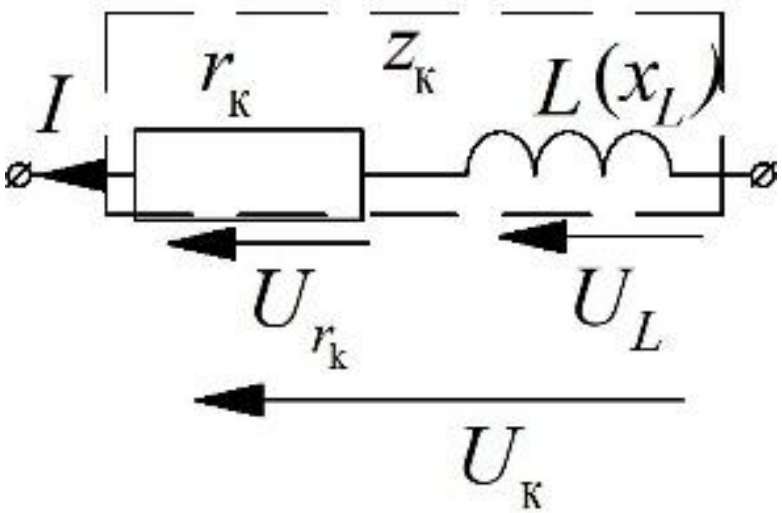
$$P = S\cos\varphi = UI\cos\varphi$$

Схемы замещения реальных элементов

1. Реальная катушка индуктивности

Реальная катушка индуктивности замещается последовательно соединенными идеальными элементами:

- r_k активное сопротивление катушки, учитывающие потери;
- x_L (L) реактивное сопротивление индуктивности (индуктивность)

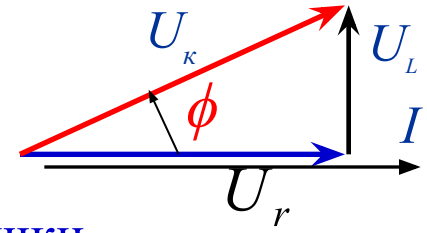


z_k - полное сопротивление катушки

$$z_к^2 = r_к^2 + x_L^2 = r_к^2 + (\omega L)^2$$

2-й закон Кирхгофа
(в векторной форме)

$$\boxed{\dot{U}_к = \dot{U}_{r_к} + \dot{U}_L}$$



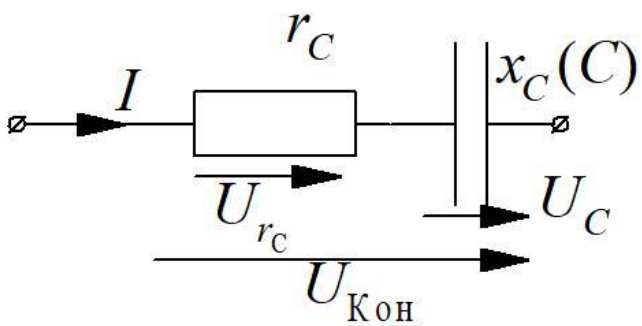
Определение параметров схемы замещения реальной катушки

$$\boxed{z_к = \frac{U_к}{I}} \qquad \boxed{r_к = \frac{P}{I^2}} \qquad \boxed{x_L = \sqrt{z_к^2 - r_к^2}} \qquad \boxed{L = \frac{x_L}{\omega}}$$

2. Реальный конденсатор

Реальный конденсатор замещается последовательно соединенными идеальными элементами:

- r_C активное сопротивление конденсатора, учитывающие потери;
- $x_C(C)$ реактивное сопротивление ёмкости (ёмкость)

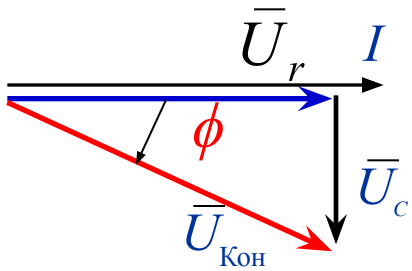


z_k - полное сопротивление конденсатора

$$z_к^2 = r_к^2 + x_C^2 = r_к^2 + (\frac{1}{\omega C})^2$$

2-й закон Кирхгофа
(в векторной форме)

$$\dot{U}_{Кон} = \dot{U}_{r_C} + \dot{U}_C$$



$$U_C \approx U_{Кон}$$

$\phi \rightarrow -90°$

Определение параметров схемы замещения реальной катушки

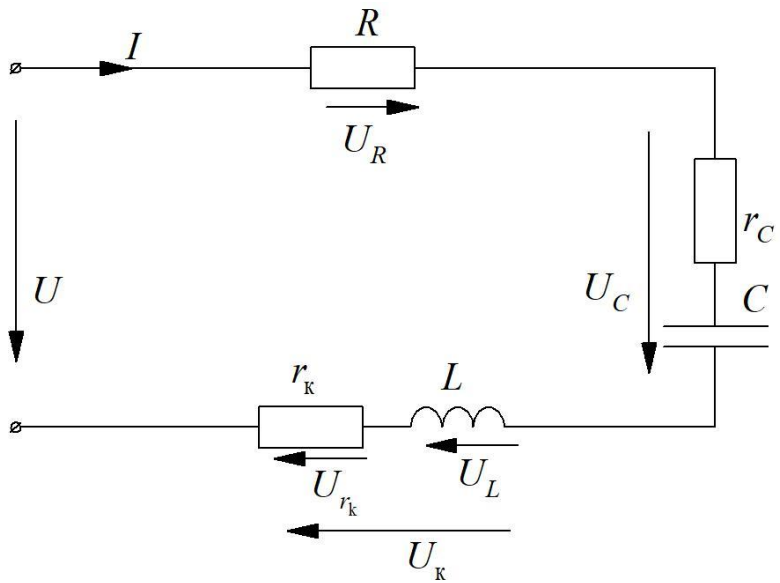
$$z_C = \frac{U_{Кон}}{I}$$

$$r_C = \frac{P}{I^2}$$

$$x_C = \sqrt{z_{кон}^2 - r_C^2}$$

$$C = x_C \cdot \omega$$

Пример расчёта последовательного соединения реальной катушки, резистора и конденсатора



1. $$z = \frac{U}{I}$$

2. $$R + r_к = \frac{P}{I^2}$$

3. $$x_C = \frac{U_C}{I}$$

4. $$x = \pm\sqrt{z^2 - (R + r_к)^2}$$

Измерения						Вычисления							
I	U	P	U_r	U_C	$U_к$	z	$R+r_к$	x_L	x_C	x	ϕ	$z_к$	
1	58	55	36	52	40	58	55	33,6	52	18,4	-18°	40	

5. $$\varphi = arctg\frac{x}{R + r_к}$$

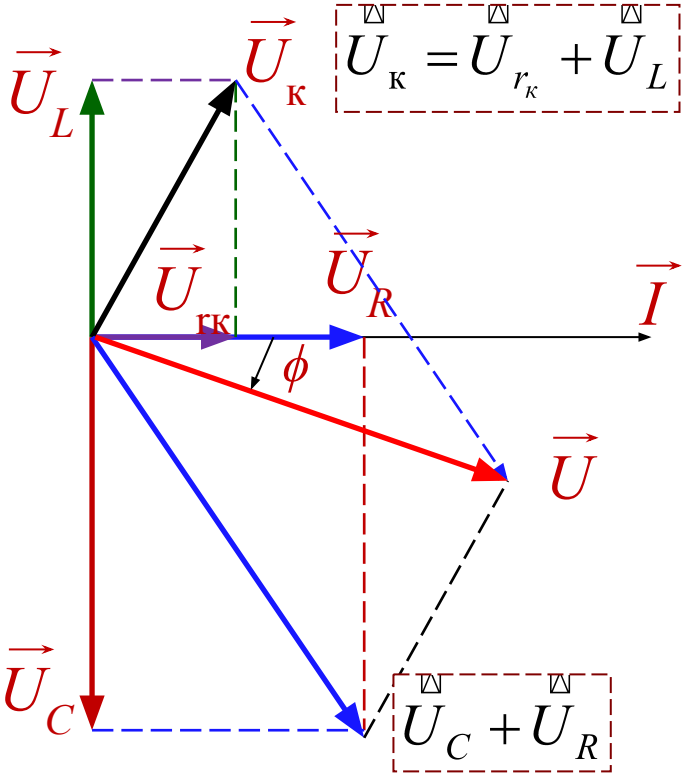
6. $$x = x_L - x_C$$
$$x_L = \pm x + x_C$$

7. $$z_к = \frac{U_к}{I}$$

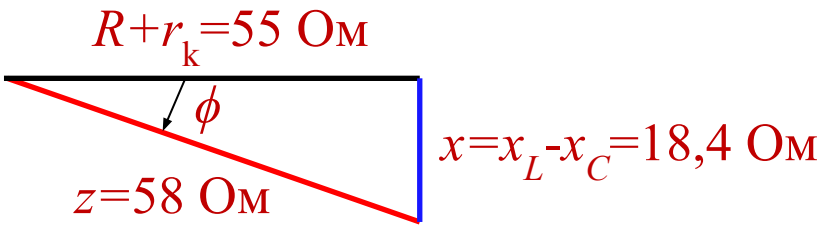
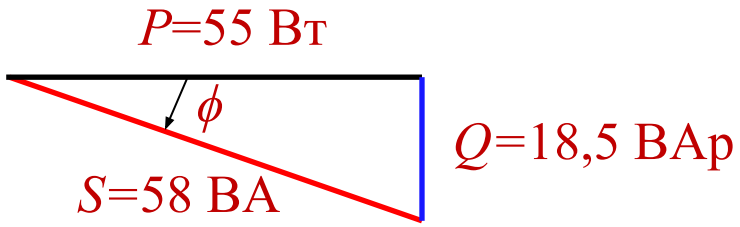
Построение векторной диаграммы

Измерения						Вычисления							
I	U	P	U_R	U_C	$U_к$	z	$R+r_к$	x_L	x_C	x	ϕ	$z_к$	
1	58	55	36	52	40	58	55	33,6	52	18,4	-18°	40	

$$\vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_C + \vec{U}_{r_к} + \vec{U}_L$$



Треугольник сопротивлений



Треугольник мощностей