1.3. Производная сложной функции от нескольких переменных. Производная от функции, заданной неявно. Частные производные высших порядков. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности. Производная по направлению, градиент.

Производная сложной функции

- 1) <u>Случай одной независимой переменной</u>.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента*** x.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента*** x.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}.$$

2) <u>случай двух независимых переменных</u> .

- 1) <u>Случай одной независимой переменной</u>.

Пусть z = $f(u, v)$, где $u = u\,(x)$ и $v = v\,(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента*** x.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Пример.

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть z = $f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента*** x.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Производная неявной функции

- 1) <u>Случай одной независимой переменной</u>.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Пример 1.

1) <u>Случай одной независимой переменной</u>.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

2) Случай двух независимых переменных

- 1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Пример

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Частные производные высших порядков

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть z = $f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть z = $f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Пример

1) <u>Случай одной независимой переменной</u>.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Производная по направлению. Градиент.

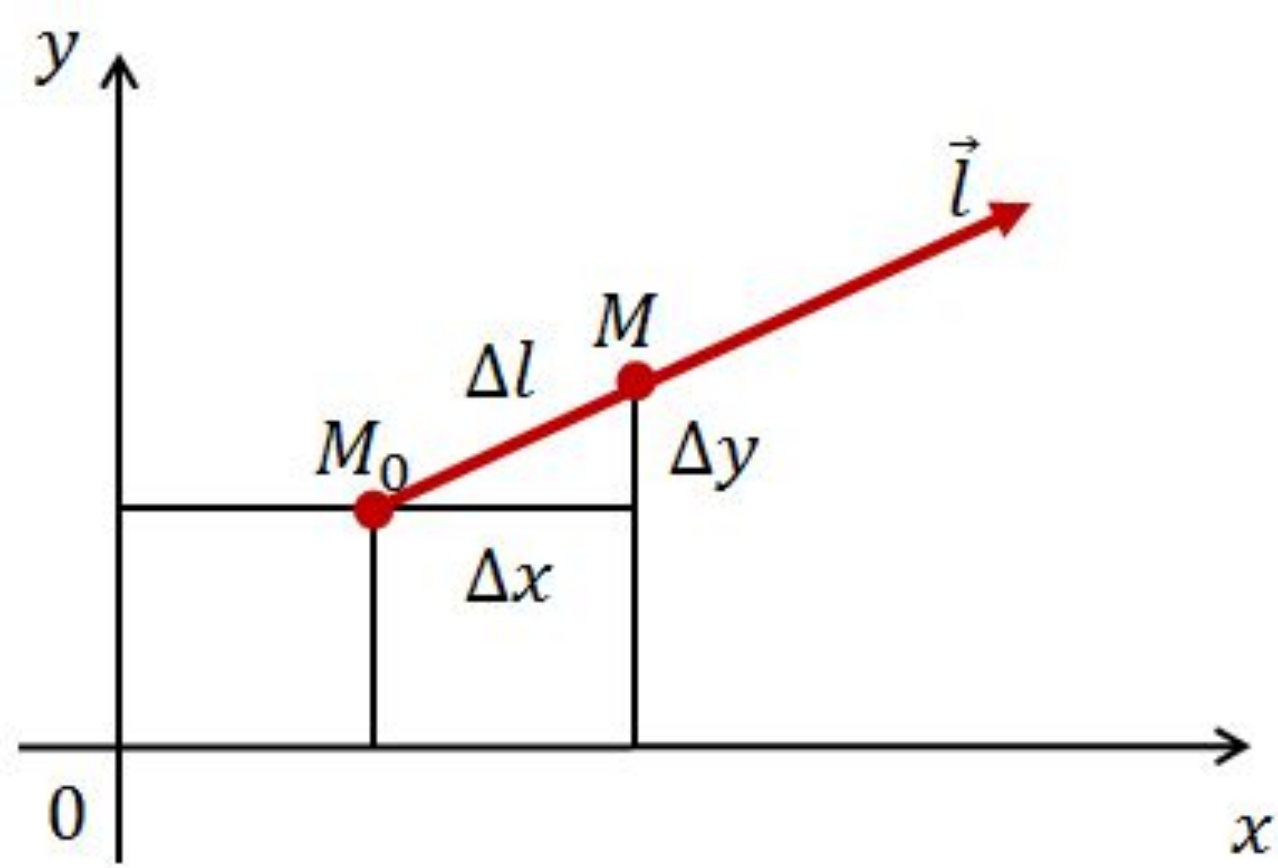
1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента*** x.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Производная по направлению. Градиент.



Производная по направлению. Градиент.

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

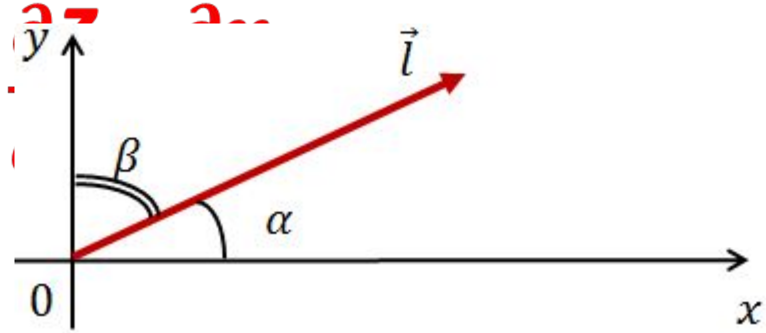
Теорема

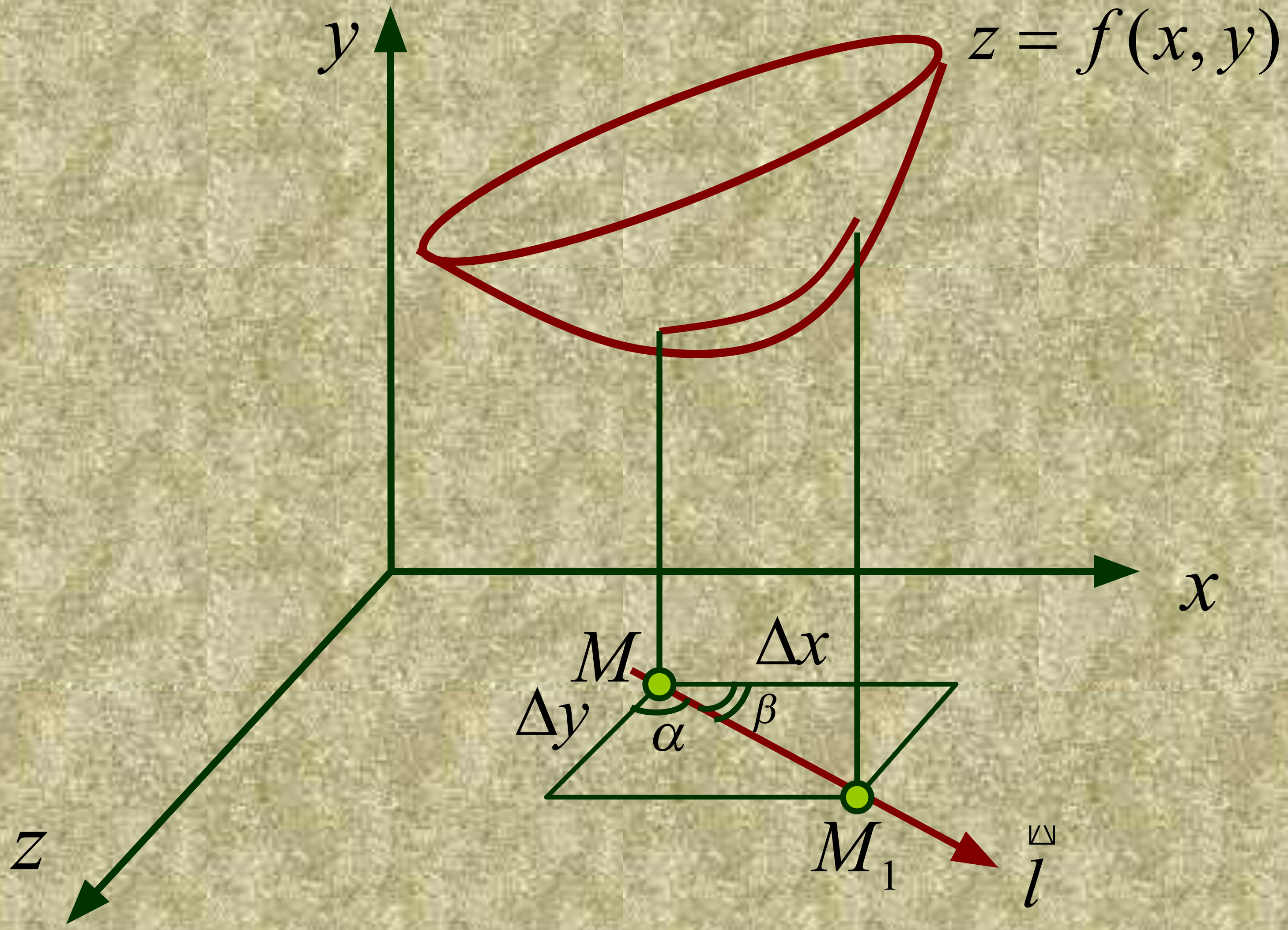
1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} +$$





$z = f(x, y)$
y
x
z
M
Δx
Δy
α
β
M_1
$\vec{l}$

Производную y' функции одной переменной смело можно назвать производной по направлению – ведь она характеризует скорость изменения функции $y = f(x)$ в направлении оси OX.

И эта суть с учётом большего разнообразия направлений распространяется на производные функций нескольких переменных, в частности, на производные функции $z = f(x;y)$. Геометрически функция двух переменныхИ эта суть с учётом большего разнообразия направлений распространяется на производные функций нескольких переменных, в частности, на производные функции . Геометрически функция двух переменных чаще всего представляет собой поверхность, и значения «зет» у нас чётко ассоциируются с высотой. Таким образом, с позиций геометрии скорость изменения данной функции – есть скорость изменения высоты. При этом совершенно понятно, что «негоризонтальная» поверхность изменчива – в каких-то направлениях она крута, в каких-то полога, а где-то таки «равнина». И производная по направлению как раз призвана охарактеризовать «ландшафт местности» (скорость изменения функции) в различных точках по различным направлениям. В этой связи возникает первый вопрос:

$\frac{\partial z}{\partial l}$ – это ЧИСЛО, характеризующее скорость изменения функции, причём:

– если $\frac{\partial z}{\partial l} > 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке M_0 по данному направлению возрастает (поверхность «идёт в гору»);

– если $\frac{\partial z}{\partial l} < 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке M_0 по данному направлению убывает («склон» поверхности);

– если $\frac{\partial z}{\partial l} = 0$, то функция $z = f(x; y)$ в точке M_0 по данному направлению постоянна (поверхность параллельна плоскости XOY).

Механический и геометрический смысл производной по направлению

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Градиент функции

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Свойства градиента

1) <u>Случай одной независимой переменной</u>.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Если совсем просто, то куда «смотрит» градиент – там и самый крутой «подъём в гору»

Пример

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

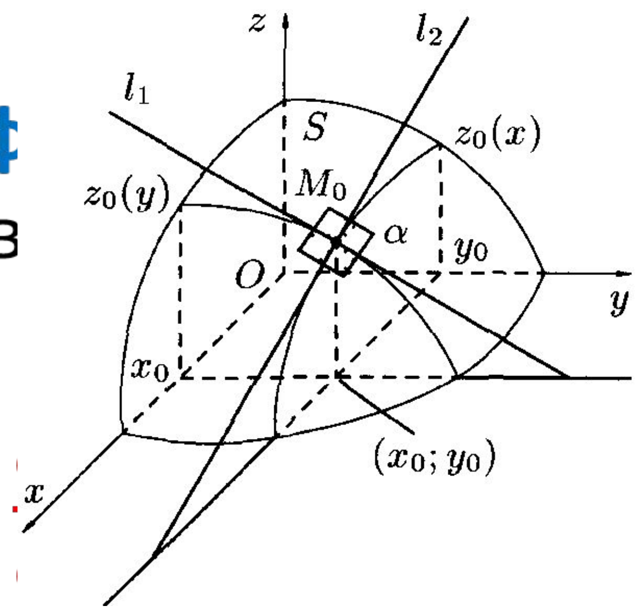
$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

1) <u>Случай одной независимой переменной</u>.

Пусть z = $f(u, v)$, где $u = u\,(x)$ и $v = v\,(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от ф
независимой переменной x в
формуле:



$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot$$

Опр. 2. Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания.

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть z = $f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной *x* вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть z = $f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной *x* вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Замечание.

1) Случай одной независимой переменной.

Пусть z = $f(u, v)$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - функции независимой переменной x. Тогда функция z является функцией x и называется ***сложной функцией аргумента x***.

Полная производная от функции z по независимой переменной x вычисляется по формуле:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$