ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Филатова Юлия Александровна
преподаватель
ГБПОУ ВО «Лискинский аграрно-технологический техникум»

Цели урока:

- сформулировать определение логарифмического уравнения;
- сформировать навыки решения логарифмических уравнений;
- развивать грамотную математическую речь при ответе у доски и с места;
- воспитывать соблюдение норм поведения в коллективе.

Этап актуализации знаний

- Дайте определение логарифма числа?
- Перечислите основные свойства логарифмов?
- Дайте определение логарифмической функции?
- Перечислите основные свойства логарифмической функции?

Этап объяснения нового материала

- **Определение:**

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \qquad (1)$$

где a — положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Этап объяснения нового материала

Методы решения логарифмических уравнений:

- **Метод потенцирования**
- **Метод введения новой переменной**
- **Метод логарифмирования**

Этап объяснения нового материала

Метод потенцирования

Решить уравнение $\log_3(x^2-3x-5)=\log_3(7-2x)$.

Решение.

1) Потенцируя (т. е. освобождаясь от знаков логарифмов получаем:

$$x^2-3x-5=7-2x;$$
$$x^2-x-12=0;$$
$$x_1=4,\quad x_2=-3.$$

2) Проверим найденные корни по условиям, определяющим ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2-3x-5>0, \\ 7-2x>0. \end{cases}$$

Значение $x=4$ не удовлетворяет этой системе неравенств (достаточно заметить, что $x=4$ не удовлетворяет второму неравенству системы), т. е. $x=4$ — посторонний корень для заданного уравнения. Значение $x=-3$ удовлетворяет обоим неравенствам системы, а потому $x=-3$ — корень заданного уравнения.

Ответ: -3.

Этап объяснения нового материала

Метод введения новой переменной

Решить уравнение $\lg^2 x + \lg x + 1 = \dfrac{7}{\lg \frac{x}{10}}$.

Решение.

Так как $\lg \frac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1$, то заданное уравнение можно переписать так: $\lg^2 x + \lg x + 1 = \dfrac{7}{\lg x - 1}$.

Есть смысл ввести новую переменную: $y = \lg x$; тогда уравнение примет следующий вид: $y^2 + y + 1 = \dfrac{7}{y-1}$.

Далее находим:

$$(y-1)(y^2+y+1) = 7;$$
$$y^3 - 1 = 7;$$
$$y^3 = 8;$$
$$y = 2.$$

Это значение удовлетворяет условию $y \neq 1$ (посмотрите: у записанного выше рационального относительно y уравнения переменная содержится в знаменателе, а потому следует проверить, не обращается ли знаменатель в нуль при найденном значении переменной y).

Итак, $y = 2$. Но $y = \lg x$, значит, нам осталось решить простейшее логарифмическое уравнение $\lg x = 2$, откуда находим: $x = 100$.

Ответ: 100.

Этап объяснения нового материала

Метод логарифмирования

Решить уравнение $x^{1-\log_5 x} = 0{,}04.$

Решение.

Возьмем от обеих частей уравнения логарифмы по основанию 5; это равносильное преобразование уравнения, поскольку обе его части принимают только положительные значения. Получим: $\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0{,}04.$

Учтем, что $\log_5 x^r = r\log_5 x$ и что

$$\log_5 0{,}04 = \log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = \log_5 5^{-2} = -2.$$

Это позволит переписать заданное уравнение так:

$$(1 - \log_5 x) \cdot \log_5 x = -2.$$

Замечаем, что «проявилась» новая переменная $y = \log_5 x$, относительно которой уравнение принимает весьма простой вид: $(1 - y)y = -2$. Далее получаем:

$$y^2 - y - 2 = 0;$$
$$y_1 = 2,\quad y_2 = -1.$$

Но $y = \log_5 x$, значит, нам осталось решить два уравнения:

$$\log_5 x = 2;\quad \log_5 x = -1.$$

Из первого уравнения находим: $x = 5^2$, т. е. $x = 25$; из второго уравнения находим: $x = 5^{-1}$, т. е. $x = \frac{1}{5}$.

Ответ: 25; $\frac{1}{5}$.

Этап закрепления изученного материала

- Решить уравнение:

$$\log_{0,6}(x+3)+\log_{0,6}(x-3)=\log_{0,6}(2x-1)$$

- Решение:

$$\text{ОДЗ}\ \begin{cases} x+3>0, \\ x-3>0, \\ 2x-1>0; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x>3$$

$x^2-9-2x+1=0;$

$x^2-2x-8=0;$

$x_1=-2\notin \text{ОДЗ}$

$x_2=4.$

Ответ: 4.

Этап закрепления изученного материала

- Решить уравнение:

$$\lg^2 x - \lg x + 1 = \frac{9}{\lg 10x}$$

- Решение:

$$\lg^2 x - \lg x + 1 = \frac{9}{\lg 10x};$$

ОДЗ: $x > 0$;

$\lg^2 x - \lg x + 1 + \lg^3 x - \lg^2 x + \lg x - 9 = 0$;

$\lg^3 x = 8$;

$\lg x = 2$;

$x = 100$;

Этап закрепления изученного материала

- Решить уравнение:

$$x^{\log_3 x}=81$$

- Решение:

ОДЗ: $x > 0$;
прологарифмируем по основанию 3:
$\log_3^2 x=4$;
$\log_3 x=\pm 2$;
$x=9$;
$x=1/9$;

Обучающая самостоятельная работа

- Решить уравнение:

$$\log_{3,4}(x^2-5x+8)-\log_{3,4}x=0;$$

- Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2-5x+8>0 \\ x>0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \forall x \\ x>0 \end{cases};$$

$$x^2-6x+8=0;$$

$$x=4,\ x=2;$$

Домашнее задание

- Решить уравнения:

$$\log_{0,2}(12x + 8) = \log_{0,2}(11x + 7)$$

$$x^{\log_2 x} = 16$$

Итоги урока

- Что нового вы узнали сегодня на уроке?
- Какие уравнения называются логарифмическими?
- Какие методы решения логарифмических уравнений вы изучили?