

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Филатова Юлия Александровна

преподаватель

ГБПОУ ВО «Лискинский аграрно-технологический техникум»

Цели урока:

- сформулировать определение логарифмического уравнения;
- сформировать навыки решения логарифмических уравнений;
- развивать грамотную математическую речь при ответе у доски и с места;
- воспитывать соблюдение норм поведения в коллективе.

Этап актуализации знаний

- Дайте определение логарифма числа?
- Перечислите основные свойства логарифмов?
- Дайте определение логарифмической функции?
- Перечислите основные свойства логарифмической функции?

Этап объяснения нового материала

- Определение:

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad (1)$$

где a — положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

Этап объяснения нового материала

Методы решения логарифмических уравнений:

- Метод потенцирования
- Метод введения новой переменной
- Метод логарифмирования

Этап объяснения нового материала

Метод потенцирования

Решить уравнение $\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x)$.

Решение.

1) Потенцируя (т. е. освобождаясь от знаков логарифмов) получаем:

$$\begin{aligned}x^2 - 3x - 5 &= 7 - 2x; \\x^2 - x - 12 &= 0; \\x_1 = 4, \quad x_2 &= -3.\end{aligned}$$

2) Проверим найденные корни по условиям, определяющим ОДЗ:

$$\begin{cases}x^2 - 3x - 5 > 0, \\7 - 2x > 0.\end{cases}$$

Значение $x = 4$ не удовлетворяет этой системе неравенств (достаточно заметить, что $x = 4$ не удовлетворяет второму неравенству системы), т. е. $x = 4$ — посторонний корень для заданного уравнения. Значение $x = -3$ удовлетворяет обоим неравенствам системы, а потому $x = -3$ — корень заданного уравнения.

Ответ: -3 .

Этап объяснения нового материала

Метод введения новой переменной

Решить уравнение $\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg \frac{x}{10}}$.

Решение.

Так как $\lg \frac{x}{10} = \lg x - \lg 10 = \lg x - 1$, то заданное

уравнение можно переписать так: $\lg^2 x + \lg x + 1 = \frac{7}{\lg x - 1}$.

Есть смысл ввести новую переменную: $y = \lg x$; тогда уравнение примет следующий вид: $y^2 + y + 1 = \frac{7}{y-1}$.

Далее находим:

$$\begin{aligned}(y-1)(y^2+y+1) &= 7; \\ y^3-1 &= 7; \\ y^3 &= 8; \\ y &= 2.\end{aligned}$$

Это значение удовлетворяет условию $y \neq 1$ (посмотрите: y записанного выше рационального относительно y уравнения переменная содержится в знаменателе, а потому следует проверить, не обращается ли знаменатель в нуль при найденном значении переменной y).

Итак, $y = 2$. Но $y = \lg x$, значит, нам осталось решить простейшее логарифмическое уравнение $\lg x = 2$, откуда находим: $x = 100$.

Ответ: 100.

Этап объяснения нового материала

Метод логарифмирования

Решить уравнение $x^{1-\log_5 x} = 0,04$.

Решение.

Возьмем от обеих частей уравнения логарифмы по основанию 5; это равносильное преобразование уравнения, поскольку обе его части принимают только положительные значения. Получим: $\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0,04$.

Учтем, что $\log_5 x^r = r \log_5 x$ и что

$$\log_5 0,04 = \log_5 \left(\frac{1}{25}\right) = \log_5 5^{-2} = -2.$$

Это позволит переписать заданное уравнение так:

$$(1 - \log_5 x) \cdot \log_5 x = -2.$$

Замечаем, что «проявилась» новая переменная $y = \log_5 x$, относительно которой уравнение принимает весьма простой вид: $(1 - y)y = -2$. Далее получаем:

$$\begin{aligned} y^2 - y - 2 &= 0; \\ y_1 &= 2, \quad y_2 = -1. \end{aligned}$$

Но $y = \log_5 x$, значит, нам осталось решить два уравнения:

$$\log_5 x = 2; \quad \log_5 x = -1.$$

Из первого уравнения находим: $x = 5^2$, т. е. $x = 25$; из второго уравнения находим: $x = 5^{-1}$, т. е. $x = \frac{1}{5}$.

Ответ: $25; \frac{1}{5}$.

Этап закрепления изученного материала

- Решить уравнение:

$$\log_{0,6}(x + 3) + \log_{0,6}(x - 3) = \log_{0,6}(2x - 1)$$

- Решение:

$$\text{ОДЗ} \begin{cases} x + 3 > 0, \\ x - 3 > 0, \\ 2x - 1 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow x > 3$$

$$x^2 - 9 - 2x + 1 = 0;$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0;$$

$$x_1 = -2 \notin \text{ОДЗ}$$

$$x_2 = 4.$$

Ответ: 4.

Этап закрепления изученного материала

- Решить уравнение:

$$\lg^2 x - \lg x + 1 = \frac{9}{\lg 10x}$$

- Решение:

$$\lg^2 x - \lg x + 1 = \frac{9}{\lg 10x};$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0;$$

$$\lg^2 x - \lg x + 1 + \lg^3 x - \lg^2 x + \lg x - 9 = 0;$$

$$\lg^3 x = 8;$$

$$\lg x = 2;$$

$$x = 100;$$

Этап закрепления изученного материала

- Решить уравнение:

$$x^{\log_3 x} = 81$$

- Решение:

ОДЗ: $x > 0$;

прологарифмируем по основанию 3:

$$\log_3^2 x = 4;$$

$$\log_3 x = \pm 2;$$

$$x = 9;$$

$$x = 1/9;$$

Обучающая самостоятельная работа

- Решить уравнение:

$$\log_{3,4}(x^2-5x+8)-\log_{3,4}x=0;$$

- Решение:

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2-5x+8 > 0; \\ x > 0 \end{cases}; \begin{cases} \forall x \\ x > 0 \end{cases};$$

$$x^2-6x+8=0;$$

$$x=4, x=2;$$

Домашнее задание

- Решить уравнения:

$$\log_{0,2} (12x + 8) = \log_{0,2} (11x + 7)$$

$$x^{\log_2 x} = 16$$

Итоги урока

- Что нового вы узнали сегодня на уроке?
- Какие уравнения называются логарифмическими?
- Какие методы решения логарифмических уравнений вы изучили?