

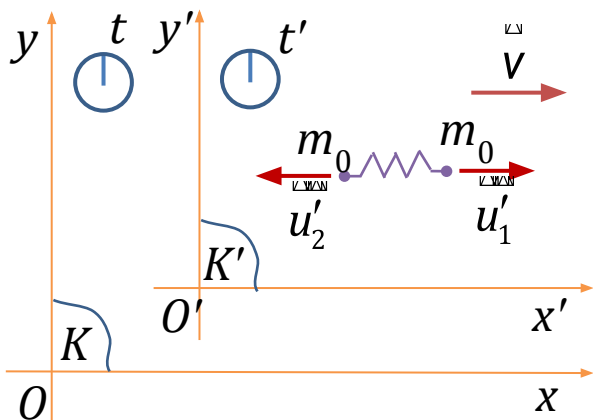
ГЛАВА I. МЕХАНИКА

§13. Релятивистская динамика

О. И. Лубенченко
НИУ МЭИ

Кафедра физики им. В. А. Фабриканта
2020

I. Релятивистский импульс



Рассмотрим замкнутую механическую систему — два груза одинаковой массы m_0 , соединённых пружиной. В системе отсчёта K' центр масс данной механической системы покоится. В начальном состоянии пружина сжата, затем она разжимается и грузы движутся со скоростями $u'_1 = u'$, $u'_2 = -u'$.

Должен выполняться ЗСИ.

Определим импульс МТ, как в классической механике:

$$\vec{p} = m_0 \vec{u}$$

По релятивистскому закону сложения скоростей:

$$\begin{cases} P_{1x} = 2m_0 v \\ P_{2x} = m_0 \frac{v+u'}{1+\frac{v}{c^2}u'} + m_0 \frac{v-u'}{1-\frac{v}{c^2}u'} \end{cases} \longrightarrow P_{1x} \neq P_{2x}$$

Классическое определение не подходит для релятивистского импульса.

Подберём такое выражение для импульса, чтобы $p'_{y'} = p_y$.

В классической механике $p_y = m_0 \frac{dy}{dt}$ $\begin{cases} dy = dy' \\ dt \neq dt' \end{cases} \longrightarrow p_y \neq p'_{y'}$

Возьмём в качестве элементарного промежутка времени собственное время $d\tau = dt'$:

$$p'_{y'} = m_0 \frac{dy'}{d\tau} = m_0 \frac{dy}{d\tau} = p_y$$

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \longrightarrow p_y = \frac{m_0 dy}{d\tau} = \frac{m_0 dy}{dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$p_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$p_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$p = mu$$

Релятивистская масса:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

II. Релятивистское уравнение динамики материальной точки

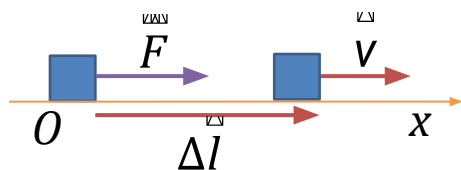
$$\Delta p = F \Delta t$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = F$$

— релятивистское уравнение динамики МТ

$$F \neq \text{inv}$$

III. Энергия в релятивистской механике



$$t = 0 \quad t \neq 0$$

$$x = 0 \quad x \neq 0$$

$$u = 0 \quad u \neq 0$$

$$W_K = 0 \quad W_K \neq 0$$

По т. об изменении кинетической энергии $A = \Delta W_K = W_K$

$$dA = F dl = F dx \cos 0 = F dx = \frac{d(mu)}{dt} dx = u d(mu)$$

$$\begin{aligned}
 A = W_{\text{к}} &= \int_0^u u d(mu) = u \cdot mu - \int_0^u m u du = mu^2 + \frac{c^2}{2} \int_0^u \frac{m_0}{c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} (-2u) du = \\
 &= mu^2 + \frac{m_0 c^2}{2} \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1/2} \Big|_0^u = mu^2 + m_0 \frac{c^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \\
 &= \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2
 \end{aligned}$$

$$W_{\text{к}} = mc^2 - m_0 c^2$$

При $u \ll c$

$$W_{\text{к}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 u^2}{2}$$

Полная энергия

$$W = mc^2$$

$$W = W_k + m_0 c^2$$

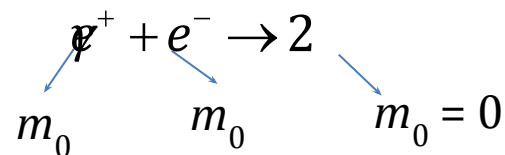
При $u = 0$ $W = W_0 = m_0 c^2$

$W_0 = m_0 c^2$ — энергия покоя

Энергия покоя может переходить в другие виды энергии.

ПРИМЕРЫ

1) Реакция аннигиляции



2) Дефект масс

Атомные ядра состоят из **нуклонов** — протонов и нейтронов.

m_p — масса покоя протона в свободном состоянии Z — число протонов в ядре

m_n — масса покоя нейтрона в свободном состоянии A — массовое число

$m_{\text{я}}$ — масса покоя ядра $(A - Z)$ — число нейтронов в ядре

Всегда $m_{\text{я}} < Zm_p + (A - Z)m_n$

Дефект масс: $\Delta m_{\text{я}} = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}} > 0$

Рассмотрим *реакцию синтеза атомного ядра* — реакцию получения ядра из отдельных нуклонов.

Изменение энергии системы нуклонов $\Delta W = \Delta W_{\text{к}} + \Delta(m_0 c^2) = \Delta W_{\text{к}} + c^2 \Delta m_0$

В замкнутой системе $\Delta W = 0 \implies \Delta W_{\text{к}} = -c^2 \Delta m_0 \implies \Delta m_0 = -\frac{\Delta W_{\text{к}}}{c^2}$

IV. Вектор энергии-импульса

4-вектор энергии-импульса

$$\boxtimes P = \begin{pmatrix} i \frac{W}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \boxtimes p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \end{array} \right\} \implies \frac{p}{W} = \frac{u}{c^2} \implies \frac{u}{c} = \frac{cp}{W}$$

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{c^2 p^2}{W^2}}} \implies W^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4 = \text{inv}$$

Модуль вектора энергии-импульса является релятивистским инвариантом.