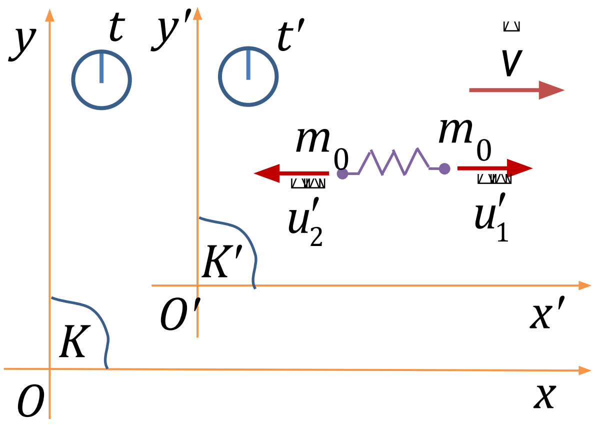
ГЛАВА I. МЕХАНИКА
§13. Релятивистская динамика

О. И. Лубенченко
НИУ МЭИ
Кафедра физики им. В. А. Фабриканта
2020

I. Релятивистский импульс



Рассмотрим замкнутую механическую систему — два груза одинаковой массы m_0, соединённых пружиной. В системе отсчёта K' центр масс данной механической системы покоится. В начальном состоянии пружина сжата, затем она разжимается и грузы движутся со скоростями $\vec{u}_1' = \vec{u}'$, $\vec{u}_2' = -\vec{u}'$.

Должен выполняться ЗСИ.

Определим импульс МТ, как в классической механике:

$$\vec{p} = m_0 \vec{u}$$

По релятивистскому закону сложения скоростей:

$$\begin{cases} P_{1x} = 2m_0 v \\ P_{2x} = m_0 \dfrac{v + u'}{1 + \dfrac{v}{c^2}u'} + m_0 \dfrac{v - u'}{1 - \dfrac{v}{c^2}u'} \end{cases} \Longrightarrow P_{1x} \neq P_{2x}$$

Классическое определение не подходит для релятивистского импульса.

§13. Релятивистская динамика

Подберём такое выражение для импульса, чтобы $p'_{y'} = p_y$.

В классической механике $p_y = m_0 \dfrac{dy}{dt}$ $\quad \begin{cases} dy = dy' \\ dt \neq dt' \end{cases} \longrightarrow p_y \neq p'_{y'}$

Возьмём в качестве элементарного промежутка времени собственное время $d\tau = d\tau'$:

$$p'_{y'} = m_0 \frac{dy'}{d\tau'} = m_0 \frac{dy}{d\tau} = p_y$$

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \longrightarrow p_y = \frac{m_0 dy}{d\tau} = \frac{m_0 dy}{dt\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$p_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad p_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \qquad \boxed{\vec{p} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}} \qquad \boxed{\vec{p} = m\vec{u}}$$

Релятивистская масса: $\boxed{m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}}$

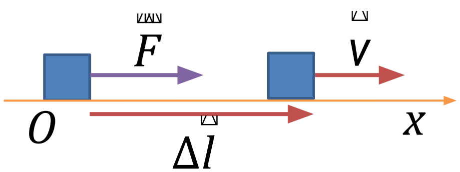
II. Релятивистское уравнение динамики материальной точки

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \vec{F}}$$ — *релятивистское уравнение динамики МТ*

$$\vec{F} \neq \text{inv}$$

III. Энергия в релятивистской механике



$t = 0$	$t \neq 0$
$x = 0$	$x \neq 0$
$u = 0$	$u \neq 0$
$W_к = 0$	$W_к \neq 0$

По т. об изменении кинетической энергии $A = \Delta W_к = W_к$

$$dA = \vec{F}d\vec{l} = Fdx\cos 0 = Fdx = \frac{d(mu)}{dt}dx = ud(mu)$$

$$A = W_к = \int_0^u u\,d(mu) = u \cdot mu - \int_0^u mu\,du = mu^2 + \frac{c^2}{2}\int_0^u \frac{m_0}{c^2\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(-2u)\,du =$$

$$= mu^2 + \frac{m_0 c^2}{\cancel{2}} \left.\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cancel{1/2}}\right|_0^u = mu^2 + m_0 \frac{c^2\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - m_0c^2 =$$

$$= \cancel{\frac{m_0u^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}} + \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \cancel{\frac{m_0u^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}} - m_0c^2 = mc^2 - m_0c^2$$

$$\boxed{W_к = mc^2 - m_0c^2}$$

При $u << c$

$$W_к = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - 1\right) \approx m_0c^2\left(\cancel{1} + \frac{u^2}{2c^2} - \cancel{1}\right) = \frac{m_0u^2}{2}$$

§13. Релятивистская динамика

Полная энергия $\boxed{W = mc^2}$ $W = W_к + m_0c^2$

При $u = 0$ $W = W_0 = m_0c^2$

$\boxed{W_0 = m_0c^2}$ — ***энергия покоя***

Энергия покоя может переходить в другие виды энергии.

Примеры

1) Реакция аннигиляции

$$e^{+} + e^{-} \rightarrow 2\gamma$$

m_0 m_0 $m_0 = 0$

2) Дефект масс

Атомные ядра состоят из *нуклонов* — протонов и нейтронов.

m_p — масса покоя протона в свободном состоянии
m_n — масса покоя нейтрона в свободном состоянии
$m_я$ — масса покоя ядра

Z — число протонов в ядре
A — массовое число
$(A - Z)$ — число нейтронов в ядре

Всегда $m_я < Zm_p + (A - Z)m_n$

Дефект масс: $\Delta m_я = Zm_p + (A - Z)m_n - m_я > 0$

§13. Релятивистская динамика

Рассмотрим *реакцию синтеза атомного ядра* — реакцию получения ядра из отдельных нуклонов.

Изменение энергии системы нуклонов $\Delta W = \Delta W_{\text{к}} + \Delta\left(m_0 c^2\right) = \Delta W_{\text{к}} + c^2 \Delta m_0$

В замкнутой системе $\Delta W = 0$ $\longrightarrow$ $\Delta W_{\text{к}} = -c^2 \Delta m_0$ $\longrightarrow$ $\Delta m_0 = -\dfrac{\Delta W_{\text{к}}}{c^2}$

IV. Вектор энергии-импульса

4-вектор энергии-импульса

$$\boxed{\vec{P} = \begin{pmatrix} i\dfrac{W}{c} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}}$$

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \\ \vec{p} &= \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \end{aligned}\right\} \longrightarrow \frac{p}{W} = \frac{u}{c^2} \longrightarrow \frac{u}{c} = \frac{cp}{W}$$

§13. Релятивистская динамика

$$W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{c^2 p^2}{W^2}}} \Rightarrow \boxed{W^2 - c^2 p^2 = m_0^2 c^4 = \mathrm{inv}}$$

Модуль вектора энергии-импульса является релятивистским инвариантом.