§2. Определители

Каждой квадратной матрице A можно поставить в соответствие некоторое число, которое называется *определителем* и обозначается

$$\det A \quad |A| \quad \Delta$$

Определителем первого порядка называется число, которое определяется по правилу

$$\Delta = \left| a_{11} \right| = a_{11}$$

Определителем второго порядка называется число, которое определяется по правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-2) \cdot 3 = 4 + 6 = 10.$$

Определителем третьего порядка называется число, которое определяется по правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

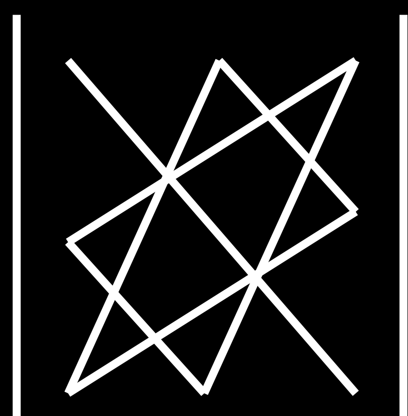
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

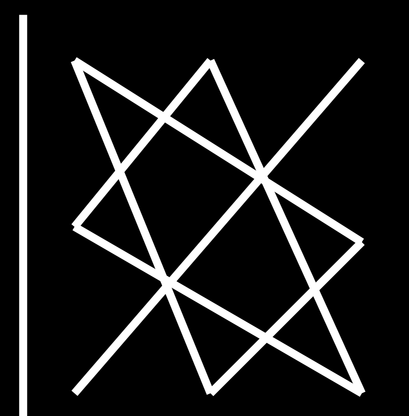
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Правило треугольников

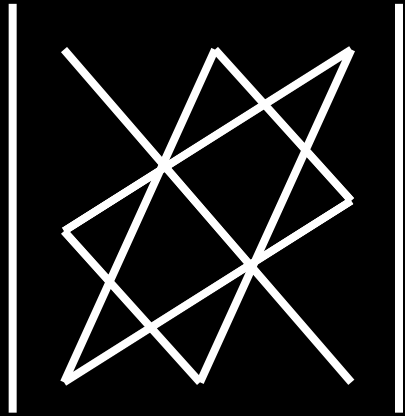
(+)

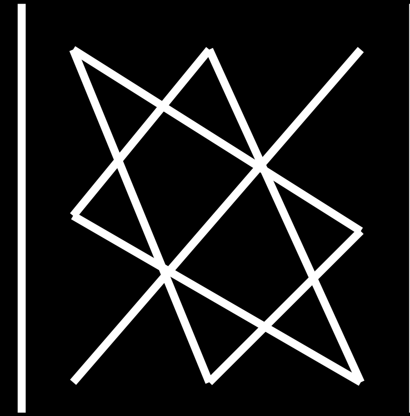




(-)

(+)





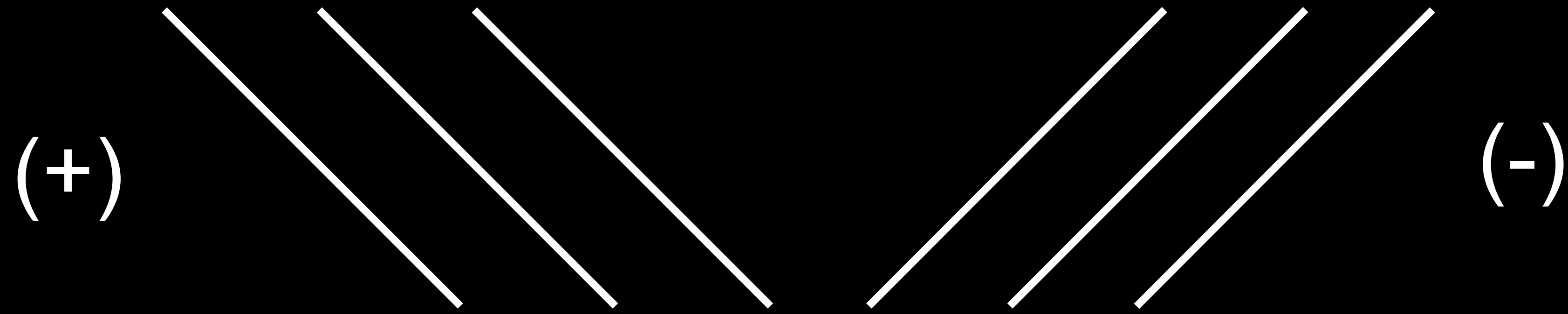
(-)

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot4\cdot2 + (-1)\cdot(-2)\cdot(-1) + 3\cdot1\cdot0 -$$

$$-0\cdot4\cdot(-1) - (-1)\cdot3\cdot2 - (-2)\cdot1\cdot2 =$$

$$= 16 - 2 + 0 - 0 + 6 + 4 = 24.$$



Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{matrix} =$$

$$= 2\cdot 4\cdot 2 + (-1)\cdot(-2)\cdot(-1) + 0\cdot 3\cdot 1 - 0\cdot 4\cdot(-1) - (-1)\cdot 3\cdot 2 -$$

$$- 2\cdot(-2)\cdot 1 = 16 - 2 + 0 - 0 + 6 + 4 = 24.$$

Свойства определителей

1. Если определитель транспонировать, то его значение не изменится.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Проверить самостоятельно.

2. Если в определителе поменять местами любые две строки или столбца, то он изменит знак.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Проверить самостоятельно.

3. Если любую строку (столбец) определителя умножить на число, то получим определитель равный исходному, умноженному на это число.

Другими словами, общий множитель элементов любой строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Проверить самостоятельно.

4. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Проверить самостоятельно.

5. Если соответствующие элементы каких-либо двух строк (столбцов) равны между собой, то определитель равен нулю.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Проверить самостоятельно.

Замечание 1.

Если элементы какой-либо строки (столбца) пропорциональны соответствующим элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

Доказательство.

Свойство 3 Свойство 5

6. Если элементы какой-либо строки (столбца) являются суммой двух слагаемых, то определитель можно разложить на сумму двух соответствующих определителей.

7. Если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить элементы другой строки (столбца) этого же определителя, умноженные на любое число, то значение определителя не изменится.

Доказательство. Св. 6 Зам. 1

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Первую строку домножим на (-2) и сложим со второй.

Первую строку сложим с третьей.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Проверить самостоятельно.

Минором элемента определителя называется определитель, получаемый из исходного вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Обозначается:

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \qquad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Алгебраическим дополнением элемента определителя называется число, которое обозначается и равное

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}. \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1.$$

Теорема 1 (Лапласа).
Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.
Доказательство.

Преобразуем правую часть

Пример.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \boxed{-1} & 3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Выберем ту строку (столбец), которая содержит наибольшее количество нулей.

$$\Delta = -1 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{43}.$$

$$\Delta = -1 \cdot (-13) + 1 \cdot (-13) = 0.$$

Теорема 2 (аннулирования).
Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.