Математика. 1 курс, 2 семестр

Лекция 5. Двойные и тройные интегралы

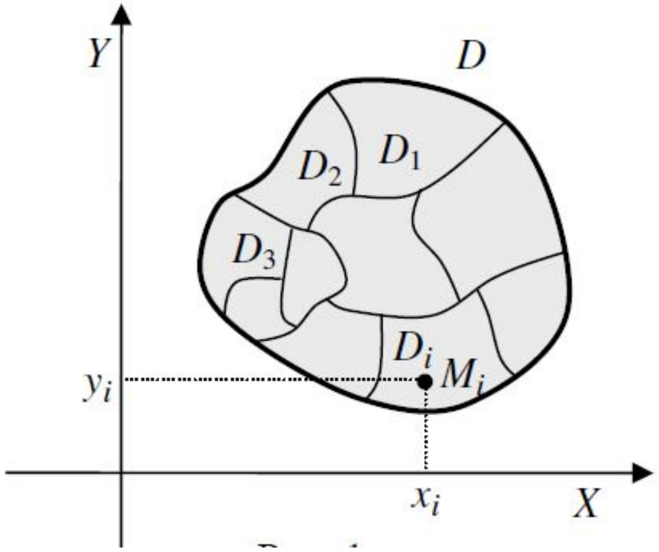
- *Понятие двойного интеграла*
- *Вычисление двойных интегралов*
- *Замена переменных в двойном интеграле*
- *Приложения двойных интегралов*
- *Определения и свойства тройных интегралов*
- *Вычисление тройных интегралов*
- *Приложения тройных интегралов*

1. 1. Определение и интерпретация двойного интеграла.

Пусть D – некоторая замкнутая([1]) ограниченная([2]) плоская область, т.е. множество $D \subset \mathbf{R}^2$, содержащее свою границу и находящееся внутри некоторого квадрата или круга конечного размера, и пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена во всех точках области D. ***Диаметром*** множества D назовем наибольшее расстояние между его точками:

$$d(D) \underset{def}{=} \max\{|AB| : A, B \in D\}.$$

Представим область D в виде объединения конечного числа частей, не пересекающихся между собой или пересекающихся разве что лишь по общей границе (если она есть): $D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_n = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, и обозначим площадь i-ой части через $\Delta S_i = S(D_i)$. Пусть λ – ***мелкость*** полученного разбиения: $\lambda = \max_{1 \le i \le n} d(D_i)$. Выберем в каждой части D_i по точке $M_i(x_i, y_i)$ (см. Рис. 1) и составим интегральную сумму. $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$. Если существует конечный предел этих интегральных сумм при $\lambda \to 0$, не зависящий от способа разбиения области D и выбора точек M_i, то этот предел называется ***двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D***, и обозначается:



$$\iint_D f(x, y) dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i$$

Рис. 1

1. 2. Свойства двойных интегралов.

(а) **Линейность**. $\iint\limits_D \left(\alpha \cdot f(x,y) + \beta \cdot g(x,y)\right) dxdy = \alpha \cdot \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \cdot \iint\limits_D g(x,y)dxdy$;

(Имеется в виду, что если существуют оба интеграла в правой части, то существует интеграл и в левой части).

(б) **Аддитивность**. Если область D есть объединение областей D_1 и D_2, пересекающихся только по своей общей границе (см. Рис. 2), то

$$\iint\limits_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy;$$

(Аналогично, если существуют оба интеграла в правой части, то существует интеграл и в левой части).

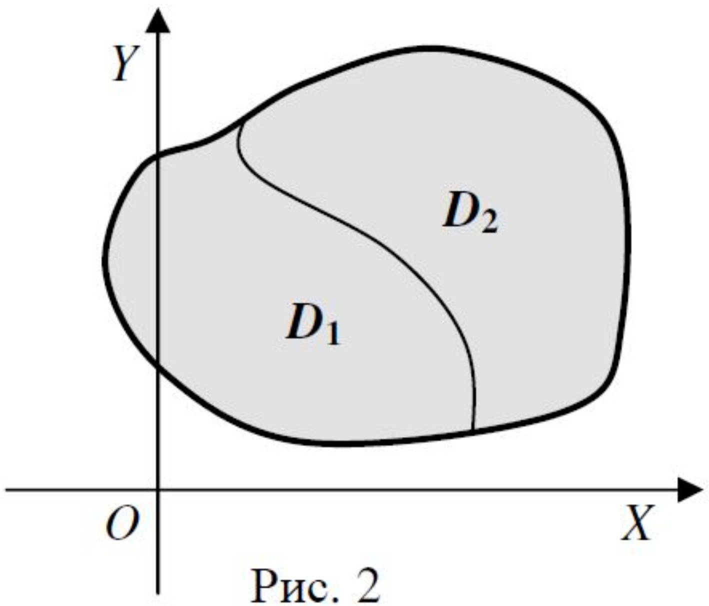


Рис. 2

(в) **Интеграл от константы:** Двойной интеграл от константы по области D равен произведению этой константы на площадь области D:

$\iint\limits_D C dxdy = C \cdot S(D)$, если $C = const$;

($S(D)$ – площадь области D).

(г) **Переход к неравенству:**

Если для всех точек $M(x, y) \in D$ верно неравенство

$$f(x, y) \le g(x, y) \text{, то}$$

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy \le \iint\limits_D g(x, y)dxdy;$$

(д) **Теорема об оценке:**

Если числа m_1 и m_2 таковы, что для всех точек $M(x, y) \in D$ верны неравенства

$$m_1 \le f(x, y) \le m_2 \text{, то}$$

$$m_1 \cdot S(D) \le \iint\limits_D f(x, y)dxdy \le m_2 \cdot S(D);$$

Определение. ***Средним значением функции $f(x, y)$ на множестве D*** называется число

$$\hat{f}\Big|_D \underset{def}{=} \frac{1}{S(D)} \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

(ж) **Теорема о среднем.** Если множество D замкнуто([1]), ограниченно([2]) и связно([3]), а функция $f(x, y)$ непрерывна([4]) на множестве D, то найдется точка $M_0(x_0; y_0) \in D$ такая, что $\hat{f}\Big|_D = f(M_0)$, т.е. такая, что $\iint\limits_D f(x, y)dxdy = f(M_0) \cdot S(D)$.

2. Вычисление двойного интеграла

2.1. Повторный интеграл.

Повторным интегралом называется выражение вида

$$\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx,$$

Повторный интеграл вычисляется **справа налево**, т.е. сначала находится интеграл $\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = F(x)$, в котором x является ***параметром***, т.е. постоянной, а затем вычисляется интеграл $\int_a^b F(x)dx$.

Аналогично вычисляется и повторный интеграл вида

$$\int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx = \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Пример 1. Вычислить повторный интеграл $\int_0^2 dy \int_1^{y+2} (y^2 + 2x)dx$.

Решение. Сначала находим внутренний, т.е. правый интеграл (в котором $y = const$):

$$\int_1^{y+2} (y^2 + 2x)dx = \left(y^2 x + x^2 \right)\Big|_{x=1}^{x=y+2} = y^2(y+2) + (y+2)^2 - y^2 - 1 = y^3 + 3y^2 + 4y + 3 = F(y).$$

Следовательно, $\int_0^2 dy \int_1^{y+2} (y^2 + 2x)dx = \int_0^2 F(y)dy = \int_0^2 \left(y^3 + 3y^2 + 4y + 3 \right) dy =$

$$= \left(\tfrac{1}{4} y^4 + y^3 + 2y^2 + 3y \right)\Big|_{y=0}^{y=2} = 4 + 8 + 8 + 6 - 0 = 26.$$

2.2. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.

(а) Пусть область D задается неравенствами (см. Рис. 3):

$$a \leq x \leq b, \quad y_{\text{нижн}}(x) \leq y \leq y_{\text{верхн}}(x), \qquad (1)$$

где функции $y_{\text{нижн}}(x)$ и $y_{\text{верхн}}(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, и функция $f(x,y)$ непрерывна в области D. Тогда двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D вычисляется в виде повторного интеграла:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_{\text{нижн}}(x)}^{y_{\text{верхн}}(x)} f(x,y)dy \qquad (2)$$

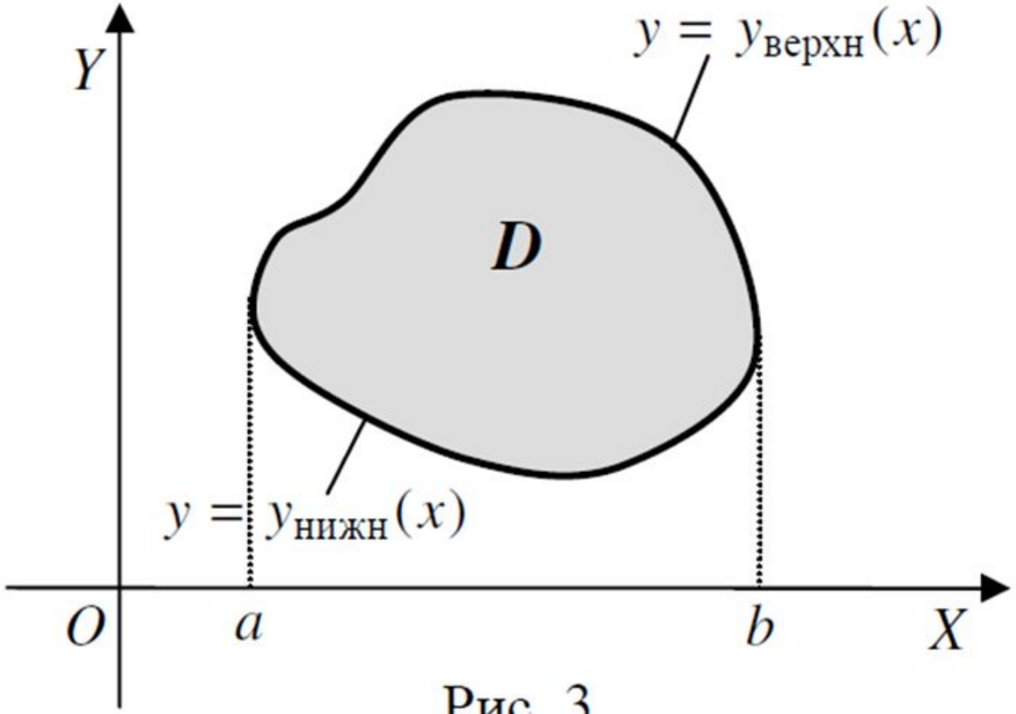


Рис. 3

(б) Пусть область D задается неравенствами:

$$c \le y \le d,\ \ x_{\text{лев}}(y) \le x \le x_{\text{прав}}(y) \qquad (3)$$

(см. Рис. 4). Тогда двойной интеграл по области D от функции $f(x, y)$ вычисляется в виде повторного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_{\text{лев}}(y)}^{x_{\text{прав}}(y)} f(x, y)dx\,. \qquad (4)$$

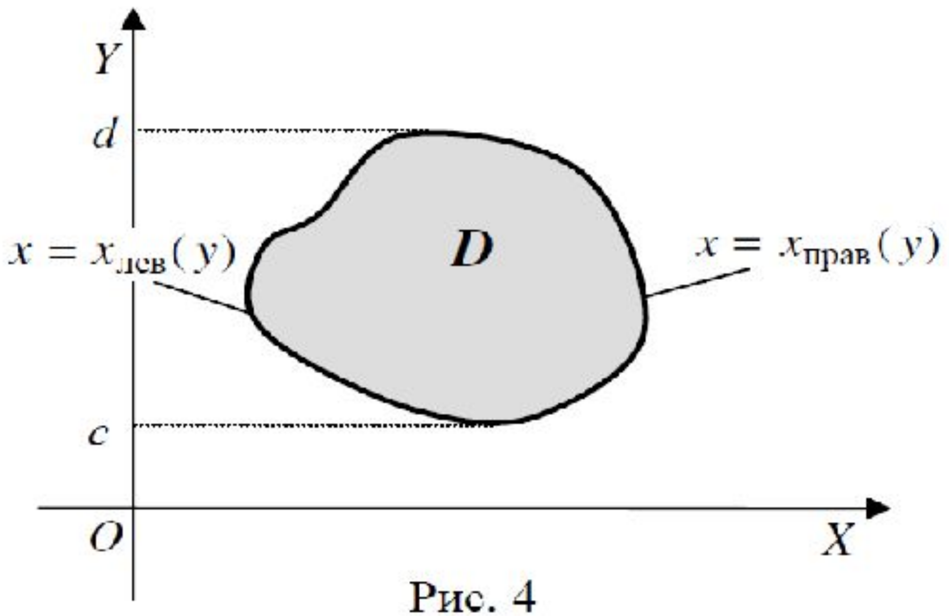


Рис. 4

Замечание 1. Если область D нельзя задать в виде неравенств (1) или (3), то её разбивают на две или несколько частей $D_1, D_2, \ldots$, каждую из которых можно задать такими неравенствами. И тогда двойной интеграл по области D есть сумма интегралов по областям $D_1, D_2, \ldots$.

Замечание 2. Если при вычислении двойного интеграла в виде повторного по формуле (2) переходят к вычислению в виде повторного по формуле (4) (или наоборот), то говорят, что в двойном интеграле ***изменяется порядок интегрирования***.

Замена переменных в двойном интеграле

В общем случае ***якобианом*** системы двух дифференцируемых функций двух переменных $f(x,y)$ и $g(x,y)$ называется определитель

$$J(x,y)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Пусть при замене переменных в двойном интеграле старые координаты x, y выражаются через новые координаты u, v посредством функций $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, которые имеют непрерывные частные производные в области E, и при отображении посредством этих функций область E переходит в область D, а якобиан $J(u,v)$ системы этих функций

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

не обращается в ноль в области E, за исключением, быть может, нескольких точек. Тогда справедлива формула:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{E} f(x(u,v),v(x,y))\cdot\left|J(u,v)\right|\cdot dudv$$

2.3. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.

Пусть в полярных координатах область D задается неравенствами: $\alpha \le \varphi \le \beta,\ R_{внутр}(\varphi) \le r \le R_{внешн}(\varphi)$.

(см. Рис. 5), где функции $R_{внутр}(\varphi)$ и $R_{внешн}(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$. Тогда двойной интеграл по области D от функции $f(x,y)$ вычисляется в виде повторного интеграла:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{R_{внутр}(\varphi)}^{R_{внешн}(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr$$

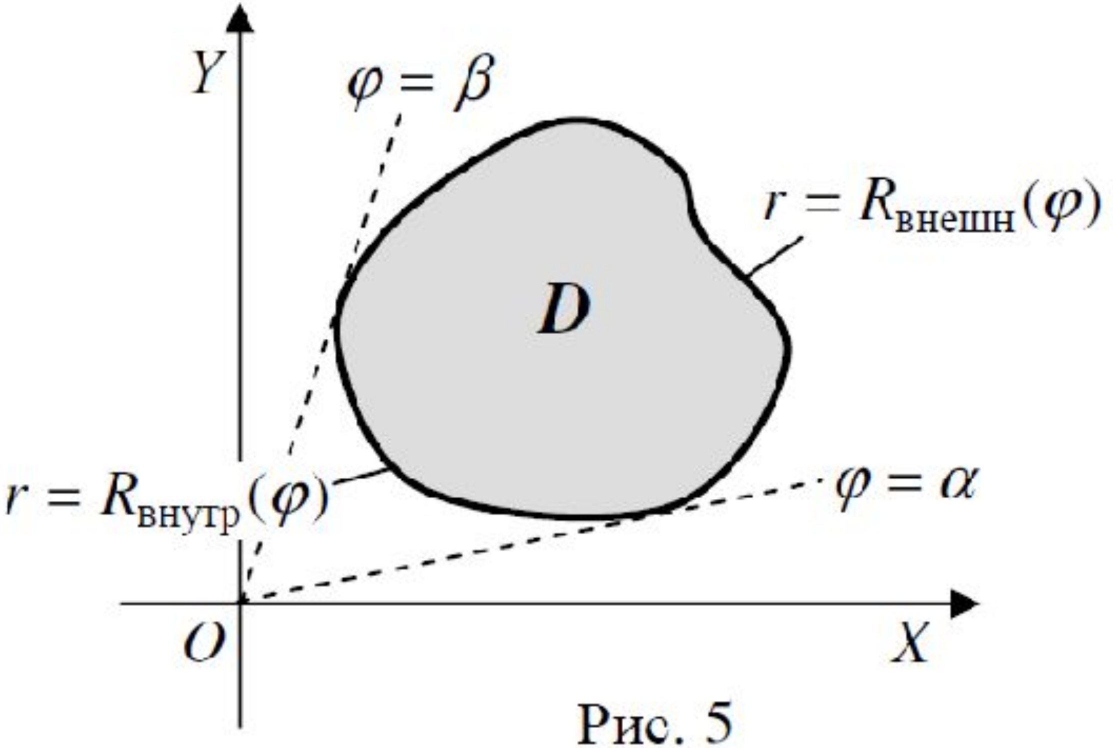


Рис. 5

Обращаем внимание на дополнительный множитель r во втором (правом) интеграле. Это **якобиан**, который всегда появляется в двойном интеграле при переходе к другим координатам. В полярных координатах якобиан равен r.

Пример 2. В повторном интеграле:

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\frac{1}{3}x^2} f(x,y)dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$$

изменить порядок интегрирования и перейти в нем к полярным координатам.

Решение. Данный повторный интеграл (точнее, сумма двух повторных) представляет собой двойной интеграл от функции $f(x,y)$ по области D, являющейся объединением двух областей: области D_1, заданной неравенствами: $0 \le x \le \sqrt{3}, -\sqrt{2x-x^2} \le y \le \frac{1}{3}x^2$, и области D_2, заданной неравенствами: $\sqrt{3} \le x \le 2, -\sqrt{2x-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$

Нарисуем границы области D (см. Рис. 6).

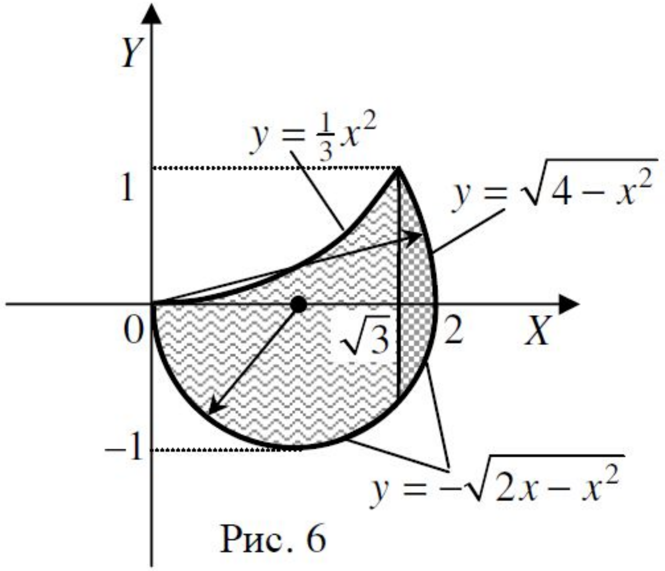


Рис. 6

(1) $y=\frac{1}{3}x^2 \Leftrightarrow 3y=x^2$ (парабола),

(2) $y=\sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ y^2 = 4-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$

– верхняя часть окружности радиуса $R=2$

с центром в точке в начале координат;

(3) $y=-\sqrt{2x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 0 \\ y^2 = 2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 0 \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$

– нижняя половина окружности радиуса $R=1$ с центром в точке $A(1;0)$.

Теперь каждую границу этой области зададим уравнением, в котором переменная x будет выражена через y:

(а) $3y = x^2,\ x \ge 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3y}$;

(б) $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-y^2}$;

(в) $x^2 + y^2 = 4,\ x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{4-y^2}$.

Левая граница области D составная: она состоит из четверти окружности и дуги параболы, правая граница также составная: состоит из двух дуг окружностей. Поэтому область D представим в виде объединения областей D_3 и D_4 (см.Рис. 7:

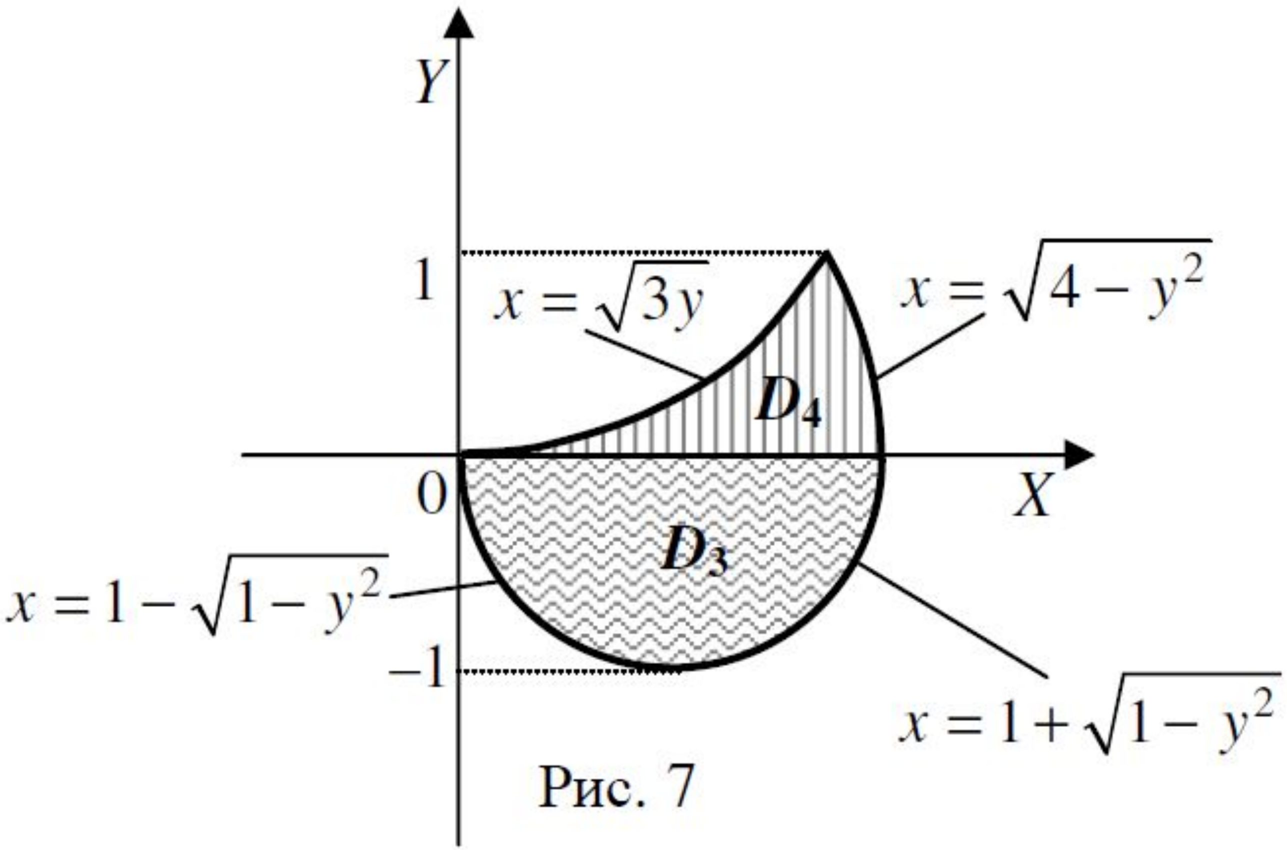


Рис. 7

$$D_3 : \begin{cases} -1 \le y \le 0, \\ 1-\sqrt{1-y^2} \le x \le 1+\sqrt{1+y^2}; \end{cases} \qquad D_4 : \begin{cases} 0 \le y \le 1, \\ \sqrt{3y} \le x \le \sqrt{4-y^2}. \end{cases}$$

Изменим в двойном интеграле порядок интегрирования:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_4} f(x,y)dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1+y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{3y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx\,.$$

Теперь перейдем к полярным координатам. Выразим уравнения всех границ в полярных координатах:

(а) $x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow r = 2;$

(б) $(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow r = 2\cos\varphi\,;$

(в) $3y = x^2 \Leftrightarrow 3r\sin\varphi = r^2\cos^2\varphi \Leftrightarrow r = \dfrac{3\sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$

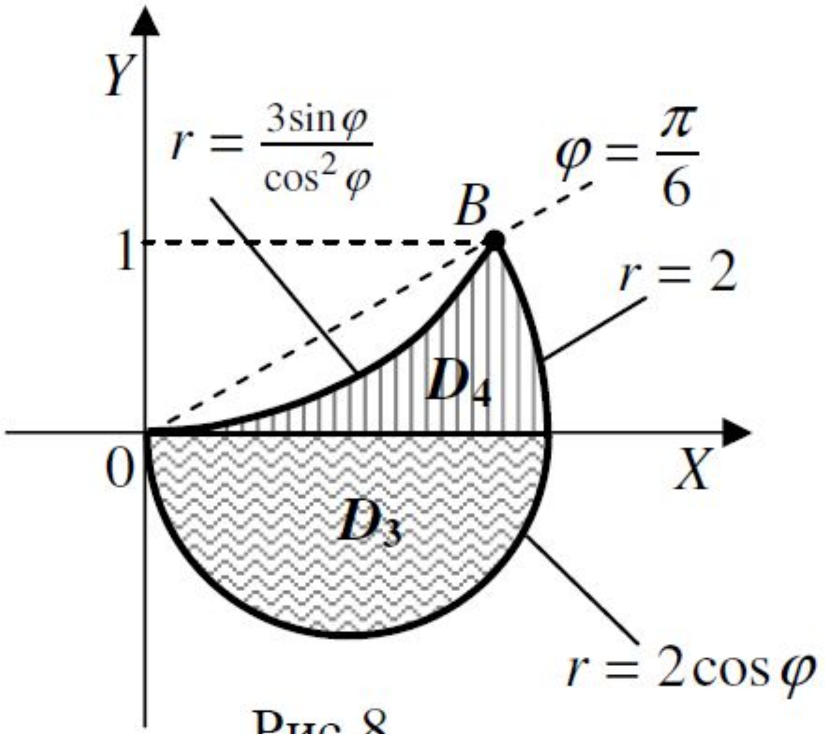


Рис.8

Крайняя верхняя точка B области D имеет координаты $B(1;\sqrt{3})$, поэтому луч OB образует с осью OX угол $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$. Область опять удобно представить в виде объединения тех же областей D_3 и D_4, которые в полярных координатах задаются неравенствами (см. Рис. 9):

$$D_3:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le 0,\\ 0\le r\le 2\cos\varphi;\end{cases}\qquad D_4:\begin{cases}0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{6},\\ \dfrac{3\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\le r\le 2.\end{cases}$$

Следовательно, наш двойной интеграл в полярных координатах выглядит так:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{D_4} f(x,y)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi\int\limits_{0}^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{6}} d\varphi\int\limits_{\frac{3\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr.$$

Пример 3. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D x\,y\,dx\,dy \quad \text{по области}$$

$$D: x^2 + y^2 \le 2x,\ y \le 0$$

(а) в декартовых координатах;
(б) в полярных координатах.

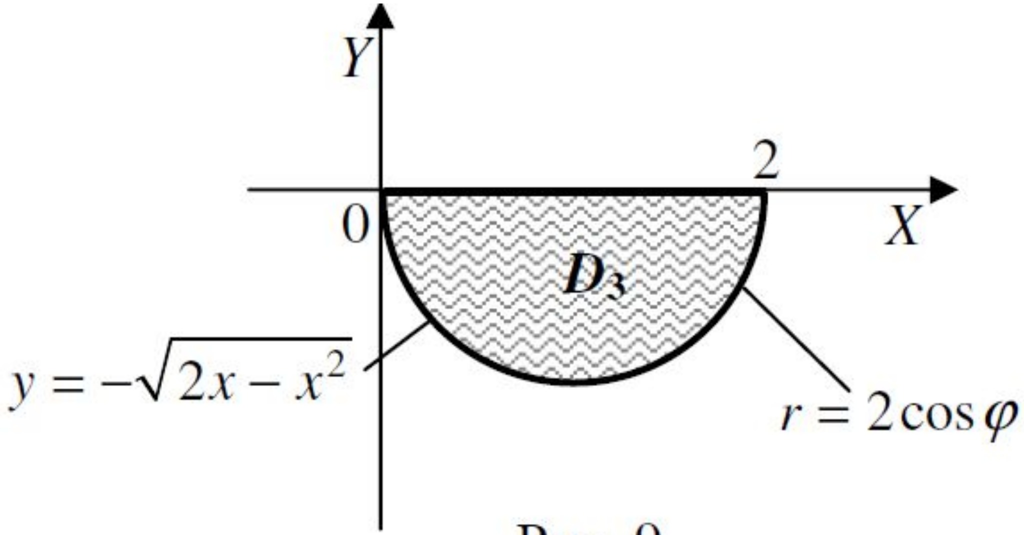


Рис. 9

Решение. Неравенство

$x^2 + y^2 \le 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 1$ задает круг радиуса $R = 1$ с центром в точке $A(1;0)$, поэтому данная область совпадает с областью D_3 из примера 2 (см Рис. 9), и в декартовых координатах вычисление двойного интеграла будет такое:

$$\iint\limits_D x\,y\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} x\,y\,dy = \int\limits_0^2 dx \cdot x \cdot \left(\tfrac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{0} =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(-x^2 + \tfrac{1}{2}x^3\right)dx = -\tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{1}{8}x^4 = -\frac{8}{3} + 2 = -\frac{2}{3}.$$

(б) Вспомним, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, поэтому двойной интеграл в полярных координатах будет выглядеть так:

$$\iint\limits_D xy\,dxdy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r\cos\varphi \cdot r\sin\varphi \cdot r \cdot dr = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} r^3 dr =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi \cdot \left(\tfrac{1}{4} r^4\right)\Bigg|_{r=0}^{r=2\cos\varphi} = 4 \cdot \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^5\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi = \{t = \cos\varphi\} =$$

$$= -4\int\limits_{0}^{1} t^5 dt = -4 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Замечание 3. Значение интеграла получилось отрицательное, т.к. подынтегральная функция $f(x, y) = xy$ отрицательна в области интегрирования.

3. Приложения двойных интегралов.

3.2. Геометрические и физические приложения двойного интеграла

(а) **Площадь плоской фигуры.**

$$S(D) = \iint\limits_D 1 \cdot dxdy = \iint\limits_D dxdy.$$

(б) **Масса плоской материальной пластинки.**

Если плоская материальная пластинка D расположена в плоскости XOY и имеет переменную плотность $\mu(x, y)$, то масса пластинки D вычисляется по формуле

$$m(D) = \iint\limits_D \mu(x, y)dxdy .$$

(в) **Координаты центра масс плоской материальной пластинки.** Координаты центра масс $C(x_0; y_0)$ плоской материальной пластинки D , имеющей переменную плотность $\mu(x, y)$, находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{M_x}{m(D)}, \;\; y_0 = \frac{M_y}{m(D)}, \text{ где}$$

$$M_x = \iint\limits_D x \cdot \mu(x, y)\,dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D y \cdot \mu(x, y)\,dxdy, \;\; m(D) = \iint\limits_D \mu(x, y)dxdy;$$

(г) Координаты <u>центрóида</u> плоской геометрической фигуры. ***Центрóидом*** (нематериальной!) геометрической фигуры D называется центр масс этой фигуры в предположении, что её плотность во всех точках одинакова и равна, например, единице. Тогда масса плоской фигуры равна её площади, и координаты центроида $C(x_0; y_0)$ плоской фигуры D находятся по формулам:

$$x_0 = \frac{M_x}{S(D)}, \; y_0 = \frac{M_y}{S(D)}, \text{ где } M_x = \iint\limits_D x \cdot dxdy, \; M_y = \iint\limits_D y \cdot dxdy, \; S(D) = \iint\limits_D dxdy;$$

(д) **Вторая формула <u>Гульдина</u>:** Объем тела, полученного вращением вокруг некоторой оси плоской фигуры, расположенной в плоскости оси по одну сторону от неё, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описываемую при вращении центрóидом([7]) этой фигуры, т.е.

$$V = S(D) \cdot 2\pi R_0,$$

где $S(D)$ – площадь фигуры D, R_0 – расстояние от центроида этой фигуры до оси вращения.

(е) **Площадь поверхности в пространстве.** Если поверхность σ задана уравнением $z = f(x, y)$, где $M(x; y) \in D$ (см. Рис. 11), то площадь поверхности σ вычисляется по формуле:

$$S(\sigma) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}\, dxdy\,.$$

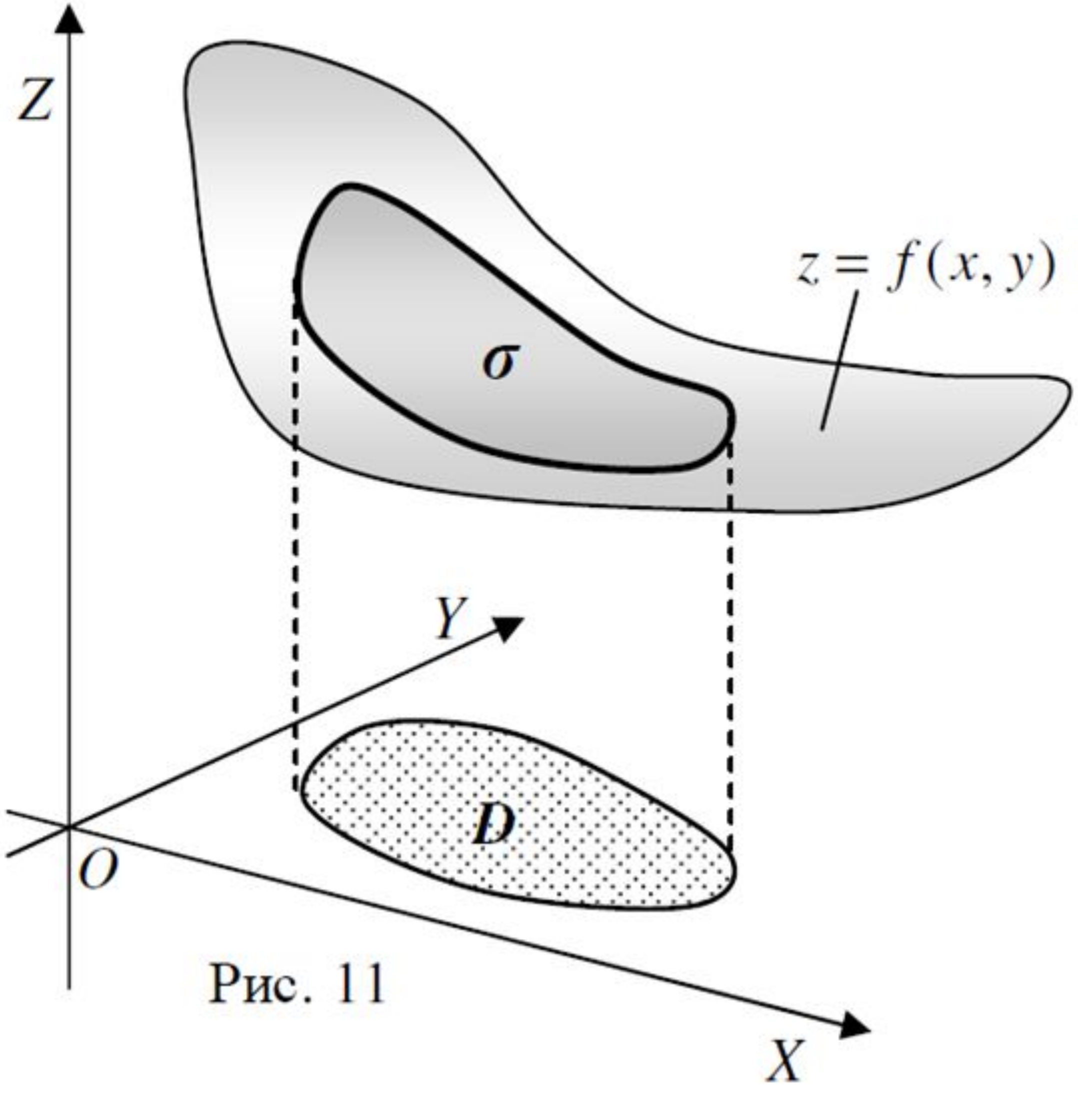


Рис. 11

(ж) Объем тела в пространстве.

Если тело T проецируется на плоскость XOY в фигуру D и задано неравенствами

$z_{\text{нижн}}(x, y) \le z \le z_{\text{верхн}}(x, y),\ \ M(x; y) \in D$,

(см. Рис. 12), то объём тела T вычисляется по формуле:

$$V(T) = \iint\limits_D \left(z_{\text{верхн}}(x, y) - z_{\text{нижн}}(x, y) \right) dxdy .$$

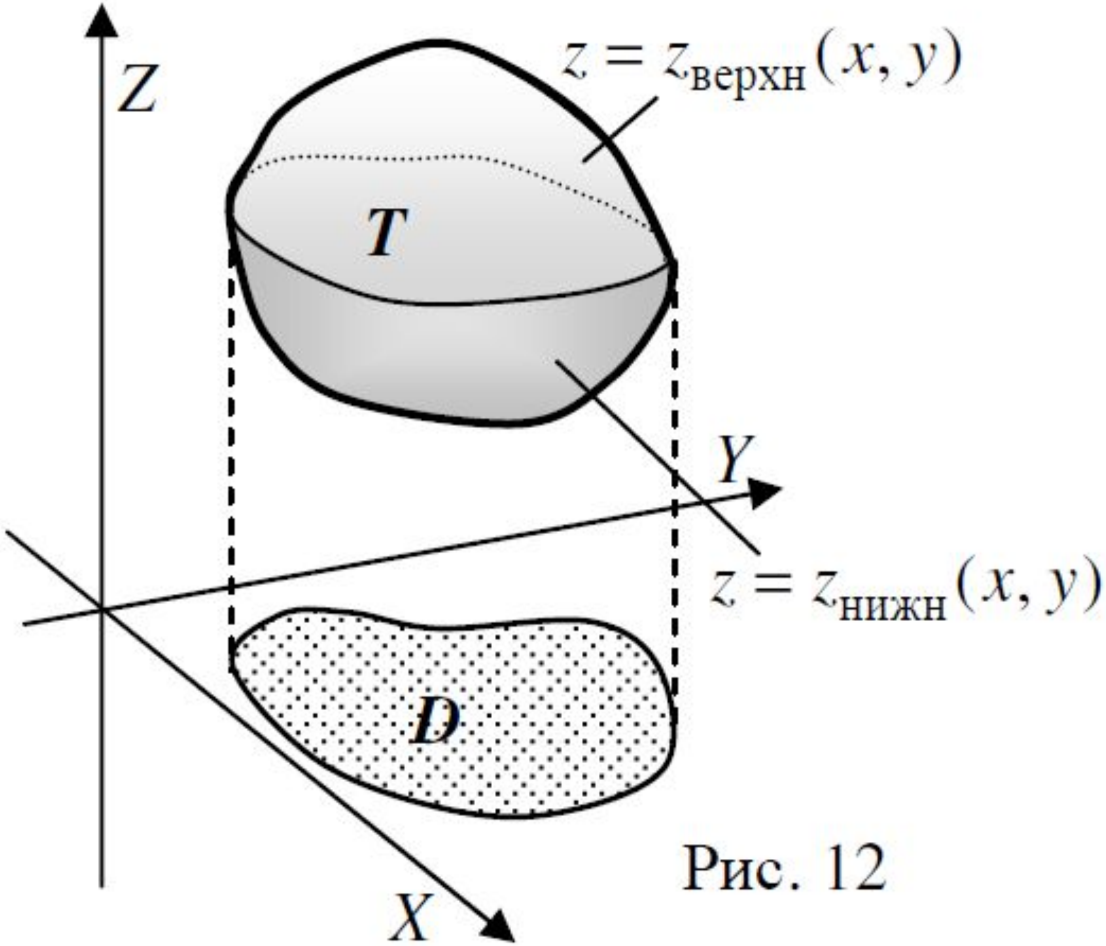


Рис. 12

3.2. Примеры на приложения двойных интегралов

Пример 4. Найти площадь фигуры, ограниченной одной петлей кривой $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$ ($x,\ y \ge 0$, $a = const > 0$).

Решение. Перейдем к полярным координатам ,
т.е применим формулы:
$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ x^2+y^2 = r^2$. Получим
$r^4 = 2a^2r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi \Leftrightarrow r^2 = a^2\sin 2\varphi \Rightarrow$
$r = a\sqrt{\sin 2\varphi}$. Это **лемниската Бернулли**. Найдем площадь фигуры, ограниченной одной её петлей (см. Рис. 13):

$$S = \iint\limits_D 1\cdot dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r\,dr = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\tfrac{1}{2}r^2\right)\Bigg|_{r=0}^{r=a\sqrt{\sin 2\varphi}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin 2\varphi\, d\varphi = -\frac{1}{4}a^2\cos 2\varphi\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}.$$

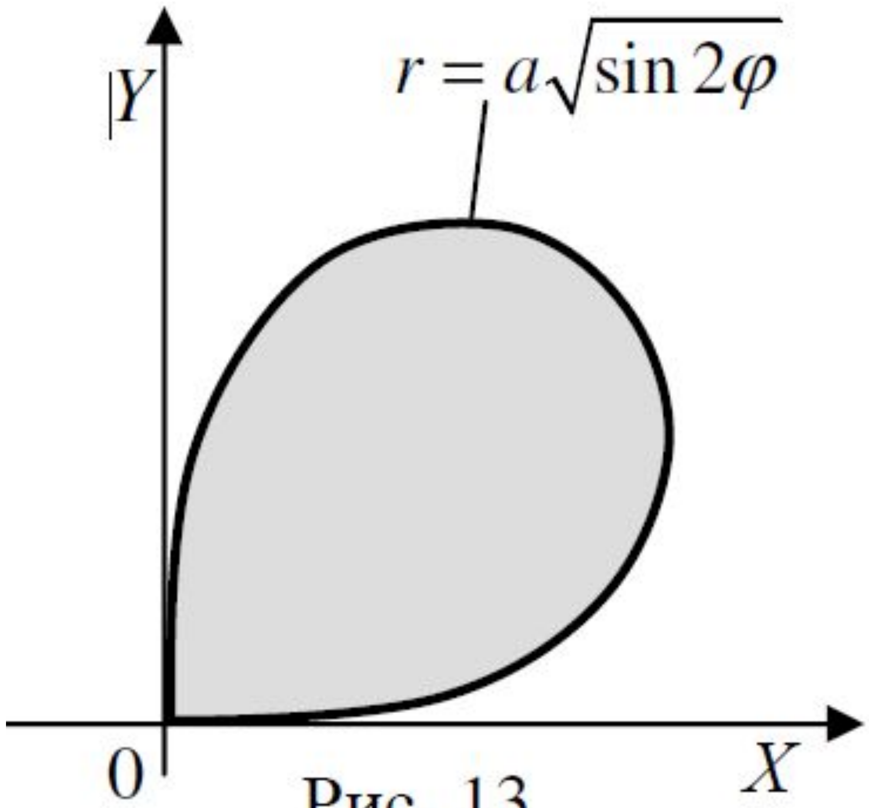


Рис. 13

Пример 5. Найти координаты центра масс плоской пластинки D, заданной неравенствами $0 \le x \le 3, 0 \le y \le 3 - x^2 + 2x$, имеющей плотность $\mu = x$.

Решение. Область D ограничена осями координат и дугой параболы $y = -x^2 + 2x + 3$ (см. Рис. 14). Сначала найдем массу этой пластинки:

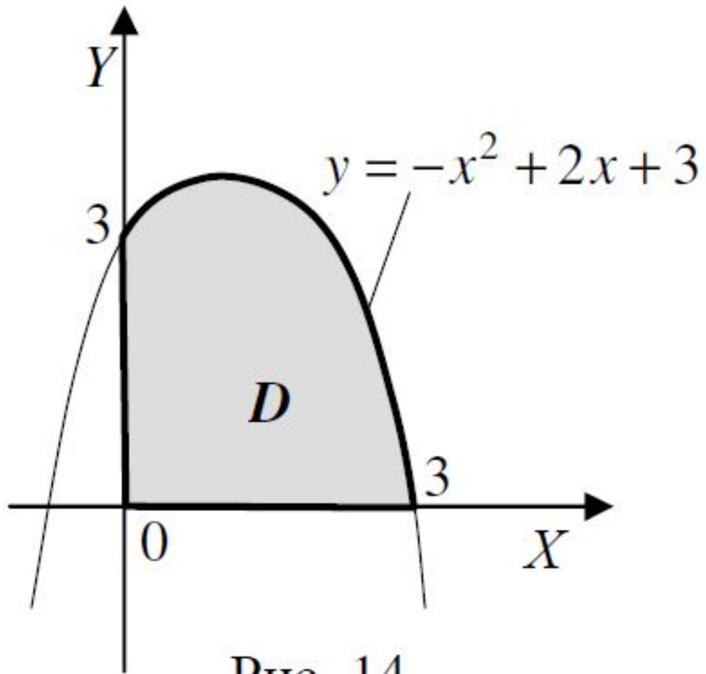


Рис. 14

$$m(D) = \iint_D \mu \cdot dxdy = \iint_D x \cdot dxdy = \int_0^3 dx \int_0^{3+2x-x^2} x \cdot dy =$$

$$= \int_0^3 dx \cdot x \cdot y \Big|_{y=0}^{y=3+2x-x^2} = \int_0^3 \left(3x + 2x^2 - x^3\right) dx =$$

$$= \left(\tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^3 = \frac{27}{2} + 18 - \frac{81}{4} = \frac{45}{4}.$$

Теперь вычислим

$$M_x = \iint_D x \cdot \mu(x, y) dxdy = \iint_D x^2 dxdy = \int_0^3 dx \int_0^{3+2x-x^2} x^2 \cdot dy = \int_0^3 \left(3x^2 + 2x^3 - x^4\right) dx =$$

$$= \left(x^3 + \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^{x=3} = 27 + \frac{81}{2} - \frac{243}{5} = \frac{189}{10} \Rightarrow x_0 = \frac{M_x}{m(D)} = \frac{189}{10} : \frac{45}{4} = \frac{42}{25} = 1,68.$$

$$M_y = \iint\limits_D y \cdot \mu(x, y)dxdy = \iint\limits_D xydxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3+2x-x^2} xy \cdot dy = \int\limits_0^3 x \cdot dx \left(\tfrac{1}{2} y^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=3+2x-x^2} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_0^3 x \cdot \left(3 + 2x - x^2\right)^2 dx = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^3 \left(9x + 12x^2 - 2x^3 - 4x^4 + x^5\right) dx =$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{9}{2}x^2 + 4x^3 - \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{4}{5}x^5 + \tfrac{1}{6}x^6\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3} = \frac{81}{4} + 54 - \frac{81}{4} - \frac{2 \cdot 243}{5} + \frac{243}{4} = \frac{351}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{M_y}{M(D)} = \frac{351}{20} : \frac{45}{4} = \frac{39}{25} = 1,56.$$

Ответ: центр масс имеет координаты $C(1,68; 1,56) = C\left(\frac{42}{25}; \frac{39}{25}\right)$.

Тройной интеграл

1. Задача, приводящая к понятию тройного интеграла

Пусть (V) – замкнутая ограниченная область в $Oxyz$ (тело),

$\gamma = \gamma(x,y,z)$ – плотность распределения массы в области (V)

ЗАДАЧА. Найти массу m тела (V).

1. Разобьем (V) на n частей $(\Delta V_1), (\Delta V_2), \ldots, (\Delta V_n)$.
2. Если (ΔV_i) – мала, то (ΔV_i) можно считать однородной и ее масса $m_i \approx \gamma(P_i) \cdot \Delta V_i$,

   где ΔV_i – объем (ΔV_i), P_i – произвольная точка из (ΔV_i) .

Тогда

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta V_i ,$$

$$m = \lim_{(\Delta V_i)\to P_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta V_i ,$$

2. Определение и свойства тройного интеграла

Пусть (V) – кубируемая (т.е. имеющая объем) область в пространстве $Oxyz$, и в области (V) задана функция $u = f(x,y,z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем область (V) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta V_1), (\Delta V_2), \ \ldots, (\Delta V_n).$$

2. В каждой области (ΔV_i) выберем произвольную точку $P_i(\xi_i;\eta_i\zeta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i) \cdot \Delta V_i$, где ΔV_i – объем области (ΔV_i).

Сумму

$$I_n(\Delta V_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta V_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x,y,z)$ по области (V) (соответствующей данному разбиению области (V) и данному выбору точек P_i).

Пусть d_{i} – диаметр (ΔV_{i}) , $\quad \lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta V_i, P_i)$ *при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения области (V) у которого $\lambda < \delta$, при любом выборе точек P_i выполняется неравенство*

$$| I_n(\Delta V_i, P_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta V_i, P_i)$ при $\lambda \to 0$, то его называют ***тройным интегралом от функции*** *$f(x,y,z)$* ***по области (V)***.

Обозначают:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dV , \qquad \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz$$

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие существования тройного интеграла).

Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в области (V), то она ограничена в этой области.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия существования тройного интеграла).

Если выполняются условия:

1) *область (V) – кубируемая,*
2) *$f(x,y,z)$ ограничена в области (V),*
3) *$f(x,y,z)$ непрерывна в области (V) всюду (за исключением, возможно, некоторого множества точек объема нуль),*

то $f(x,y,z)$ интегрируема в области (V).

СВОЙСТВА ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. $\iiint\limits_{(V)} dxdydz = V$, где V – объем тела (V).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак тройного интеграла, т.е.

$$\iiint\limits_{(V)} c \cdot f(x,y,z)dxdydz = c \cdot \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$$

3. Тройной интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме тройных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iiint\limits_{(V)} [f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)]dV = \iiint\limits_{(V)} f_1(x,y,z)dV + \iiint\limits_{(V)} f_2(x,y,z)dV$$

4. Если область интегрирования (V) разбита на две части (V_1) и (V_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{(V_2)} f(x,y,z)dV$$

(свойство аддитивности тройного интеграла).

5. Если всюду в области (V) $f(x,y,z) > 0$ $(f(x,y,z) \geq 0)$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz > 0 \quad \left(\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \geq 0 \right)$$

6. Если всюду в области (V) $f(x,y,z) \leq \varphi(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_{(V)} \varphi(x,y,z)dxdydz$$

7. Следствие свойств 6, 2 и 1.

Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ в области (V), то

$$m \cdot V \le \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \le M \cdot V,$$

где V – объем области (V).

8. Если функция $f(x,y,z)$ интегрируема в области (V), то $|\, f(x,y,z) \,|$ тоже интегрируема в области (V) и справедливо неравенство

$$\left| \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \right| \le \iiint\limits_{(V)} \left| f(x,y,z) \right| dxdydz,$$

9. Теорема о среднем для тройного интеграла.

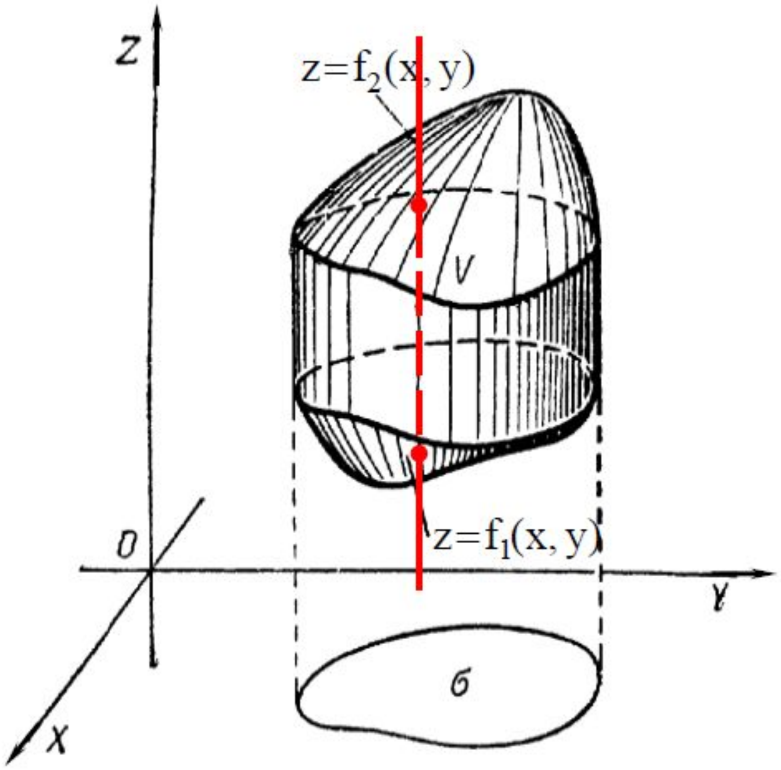
Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой области (V), то найдется такая точка $P_0(x_0,y_0,z_0) \in (V)$, что справедливо равенство

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)\cdot V\,,$$

где V – объем области (V).

3. Вычисление тройного интеграла

Назовем замкнутую и ограниченную область $(V) \subset Oxyz$ ***правильной в направлении оси*** Oz, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области (V) параллельно оси Oz пересекает границу области в двух точках, причем, каждая из пересекаемых границ задается только одним уравнением.



ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция $f(x,y,z)$ интегрируема в области (V). Если область (V) – правильная в направлении оси Oz причем:*

1) (σ) – *проекция области (V) на плоскость xOy, является квадрируемой областью,*
2) *поверхности $z=f_1(x,y)$, $z=f_2(x,y)$, ограничивающие (V) соответственно снизу и сверху , непрерывны на (σ) ,*

то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy,$$

Интеграл $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} \left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$

называют *повторным* и записывают в виде $\displaystyle\iint\limits_{(\sigma)} dxdy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

Интеграл $\displaystyle\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ называют *внутренним* .

4. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть (V) – кубируемая область в пространстве $Oxyz$,

$f(x,y,z)$ – ограничена и непрерывна в области (V) всюду, кроме, может быть, некоторого множества точек, объема нуль.

Тогда существует интеграл $\displaystyle\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$

Введем новые переменные по формулам:

$$x = \varphi(u,v,w),\ \ y = \psi(u,v,w),\ z = \chi(u,v,w),\ \ (u,v,w)\in(G) \qquad (1)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ интерпретация (1): отображение области (G) пространства $Cuvw$ на некоторую область пространства $Oxyz$.

Пусть функции $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\chi(u,v,w)$ такие, что (1) является отображением области (G) на область (V) (т.е. если точка (u,v,w) пробегает область (G) , то соответствующая ей точка (x,y,z) пробегает область (V)) .

Пусть отображение (1) удовлетворяет следующим условиям:

а) отображение (1) взаимно однозначно в замкнутой кубируемой области (G) (т.е. различным точкам области (G) соответствуют различные точки области (V));

б) функции $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\chi(u,v,w)$ имеют в области (G) непрерывные частные производные первого порядка;

в) $I(u,v,w)=\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \\ \chi'_u & \chi'_v & \chi'_w \end{vmatrix}\neq 0$ во всех точках (G).

Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \qquad (2)$$
$$= \iiint\limits_{(G)} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))\cdot\left|I(u,v,w)\right| dudvdw$$

Формулу (2) называют ***формулой замены переменных в тройном интеграле***, определитель $I(u,v,w)$ называют ***якобианом отображения*** (1).

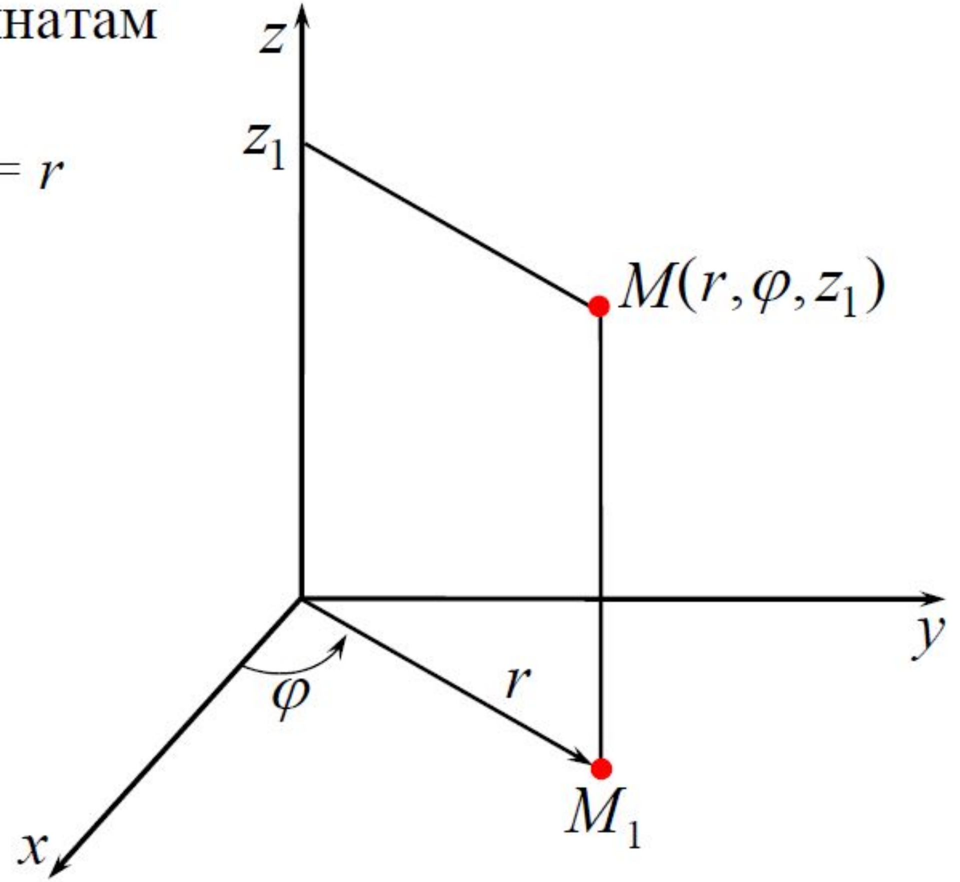
Два наиболее часто встречающихся случая замены переменных в тройном интеграле:

1) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z_1$,

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ $(-\pi < \varphi \le \pi)$, $-\infty < z_1 < +\infty$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ смысл: переход в пространстве к цилиндрическим координатам

В этом случае $I(r,\varphi,z_1) = r$



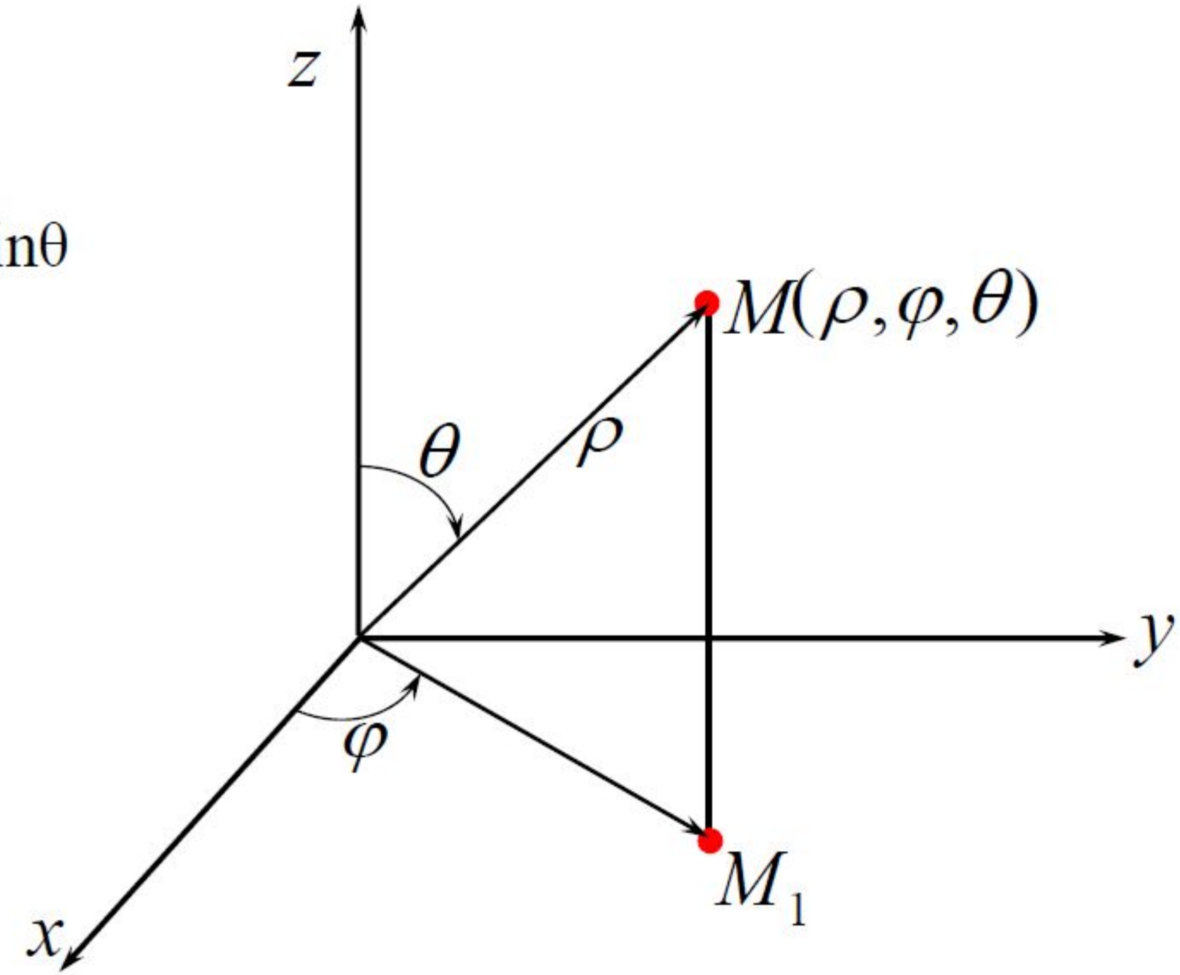
2) $x = \rho\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta$, $y = \rho\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta$, $z = \rho\cdot\cos\theta$

где $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ ($-\pi < \varphi \le \pi$) , $0 \le \theta \le \pi$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ смысл: переход в пространстве к сферическим координатам

В этом случае

$$I(\rho,\varphi, \theta) = \rho^2 \cdot \sin\theta$$



5. Геометрические и физические приложения тройных интегралов

1) Объем V кубируемого тела $(V) \in Oxyz$:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz$$

Пусть (V) – материальное тело (кубируемая область $(V) \in Oxyz$) с плотностью $\gamma(x,y,z)$.

Тогда

2) $\iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)dxdydz = m$ – масса тела (V) .

3) Статические моменты тела (V) относительно плоскостей xOy, yOz и xOz равны соответственно:

$$S_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

$$S_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

4) $x_0 = \dfrac{S_{yz}}{m}, \quad y_0 = \dfrac{S_{xz}}{m}, \quad z_0 = \dfrac{S_{xy}}{m}$ – координаты центра масс тела (V) .

5) Моменты инерции тела (V) относительно осей Ox, Oy и Oz равны соответственно:

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

6) $I_o = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$ – момент инерции тела (V) относительно начала координат .