

# Стереометрия

Метод координат в  
задачах ЕГЭ

# Вспомним основные формулы

Если известны координаты точек А и В:  $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ , то

1. Координаты вектора АВ:  $\overline{AB}\{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$

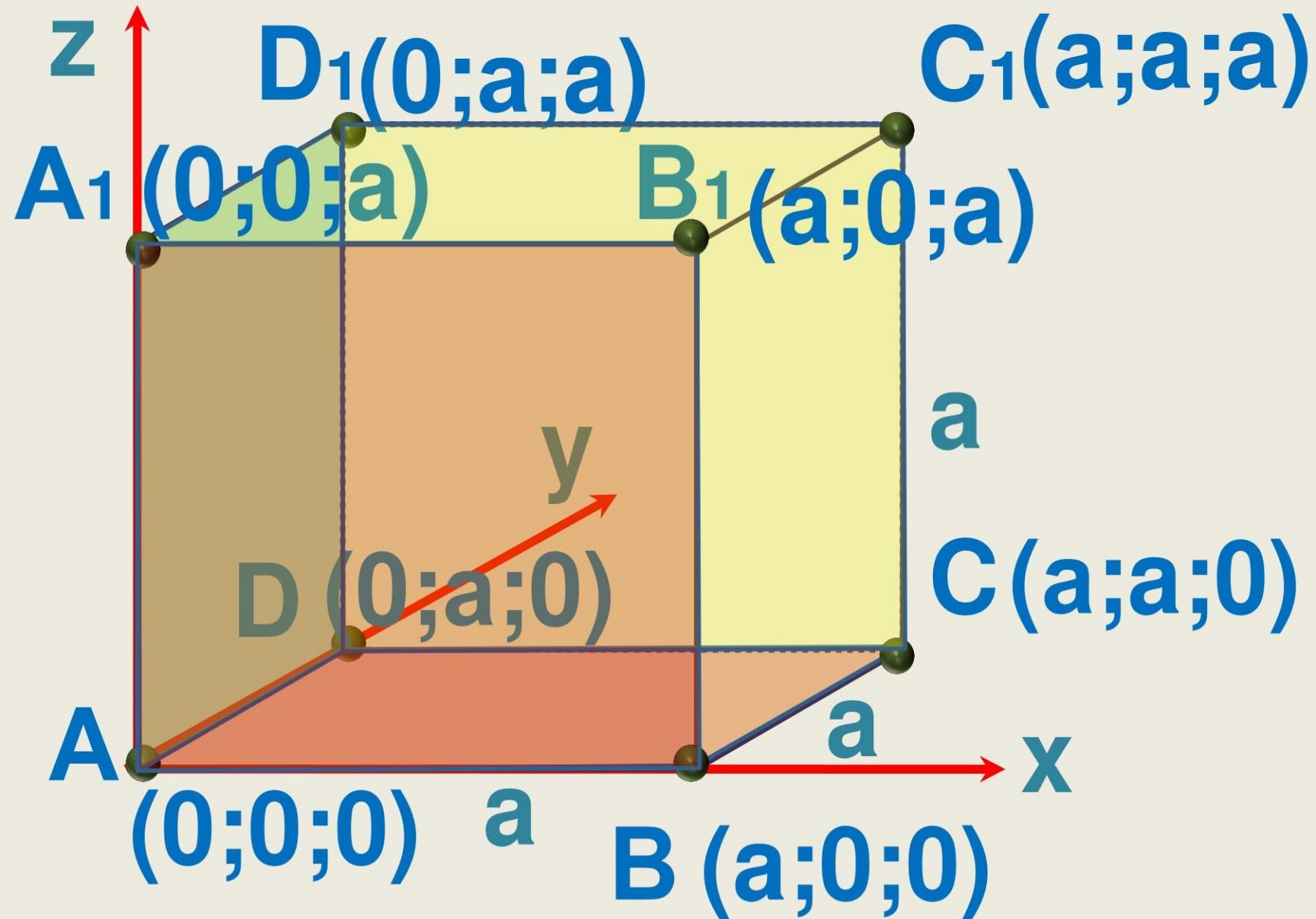
2. Длина вектора АВ:  $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

3. Координаты середины отрезка АВ:  $M(x_M; y_M; z_M)$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}; y_M = \frac{y_A + y_B}{2}; z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$



# КУБ В СИСТЕМЕ КООРДИНАТ



# 1. Формулы и методы решения.

1.1. Угол между прямыми. Вектор  $\vec{a}\{x_a; y_a; z_a\}$  лежит на прямой а, Вектор  $\vec{b}\{x_b; y_b; z_b\}$  лежит на прямой в.

Косинус угла между прямыми а и в:

$$\cos \varphi = \frac{|x_a \cdot x_b + y_a \cdot y_b + z_a \cdot z_b|}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

1.2. Угол между прямой и плоскостью. Прямая а образует с плоскостью  $\alpha$  угол  $\varphi (\varphi \leq 90^\circ)$ . Плоскость  $\alpha$  задана уравнением:  $ax+by+cz+d=0$  и  $\vec{n}\{a;b;c\}$  – вектор нормали, Синус угла определяется по формуле:

$$\sin \varphi = \frac{|x_a \cdot a + y_a \cdot b + z_a \cdot c|}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



**1.3. Угол между двумя плоскостями.** Плоскость  $\alpha$  задана уравнением:  $a_1x + b_1y + c_1z + d = 0$  и ее вектор нормали  $n_\alpha \{a_1; b_1; c_1\}$  плоскость  $\beta$  задана уравнением  $a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$  и ее вектор нормали  $n_\beta \{a_2; b_2; c_2\}$ . Косинус угла  $\varphi$  между плоскостями:

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

**1.4. Расстояние от точки до плоскости.** Расстояние  $h$  от точки  $M(x_M; y_M; z_M)$  до плоскости  $\alpha$ , заданной уравнением  $ax + by + cz + d = 0$  определяется по формуле:

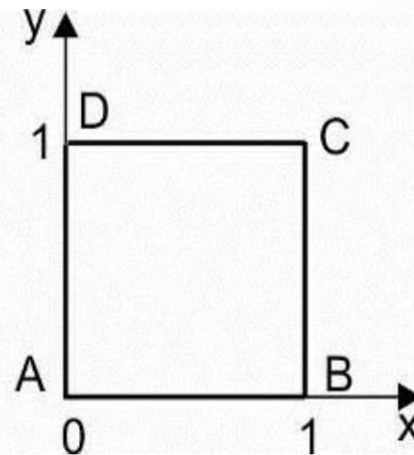
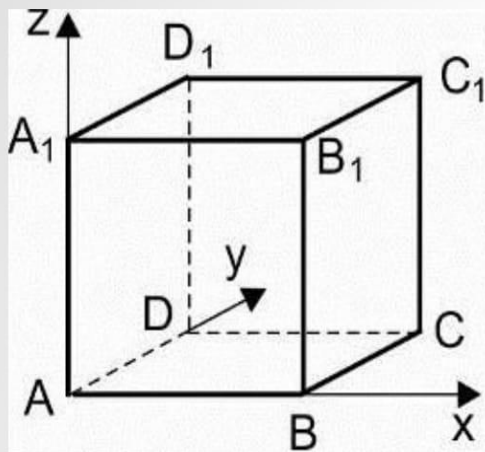
$$h = \frac{|a \cdot x_M + b \cdot y_M + c \cdot z_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**1.5. Если отрезок АВ, концами которой служат точки  $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$  разделен точкой  $C(x; y; z)$  в отношении  $\lambda$ , то координаты точки С определяются по формулам:**

$$x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}; y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}; z = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}$$

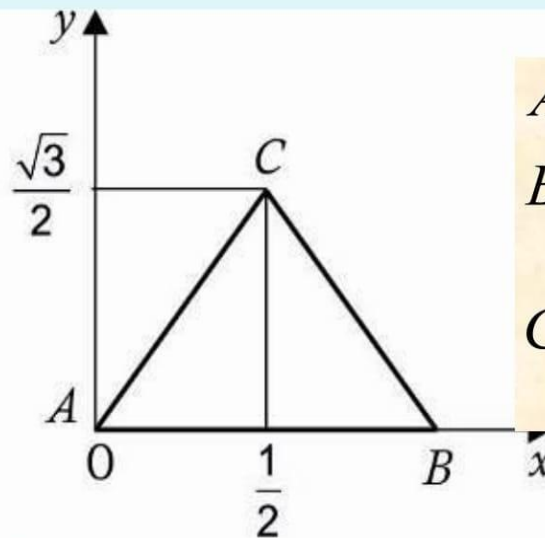
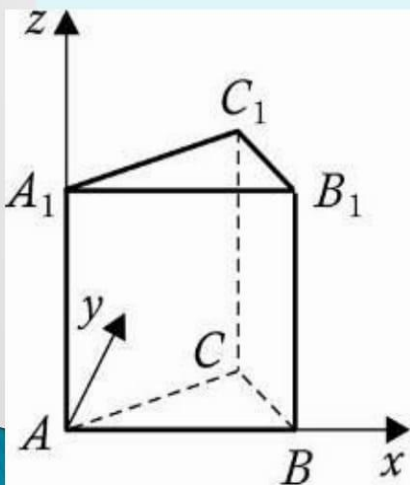
## 2. Координаты вершин многогранников

### 2.1. Координаты вершин единичного куба.



$$\begin{aligned} &A(0;0;0)A_1(0;0;1) \\ &B(1;0;0), B_1(1;0;1) \\ &D(0;1;0)D_1(0;1;1) \\ &C(1;1;0)C_1(1;1;1) \end{aligned}$$

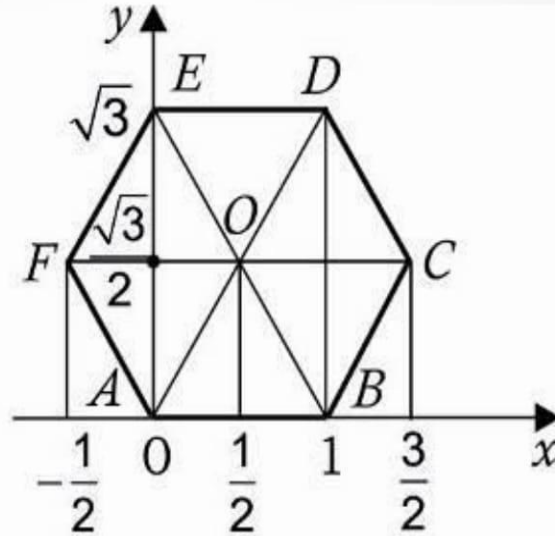
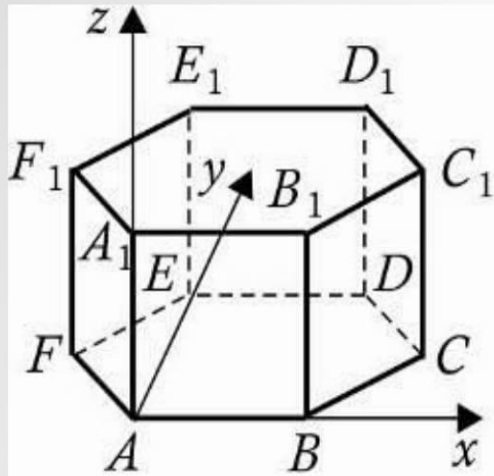
### 2.2. Координаты вершин правильной треугольной призмы, все ребра которой равны 1.



$$\begin{aligned} &A(0;0;0)A_1(0;0;1) \\ &B(1;0;0), B_1(1;0;1) \\ &C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)C_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right) \end{aligned}$$



2.3. Координаты вершин правильной шестиугольной призмы, все ребра которой равны 1.

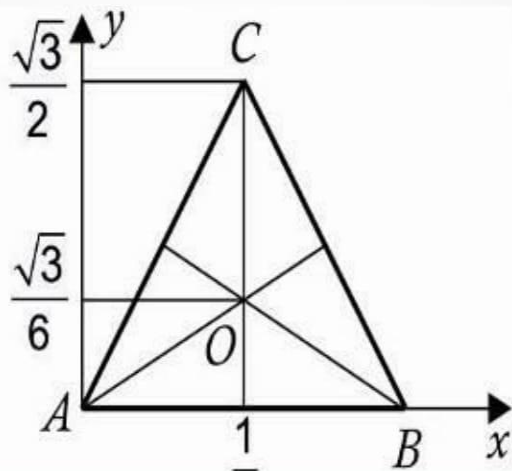
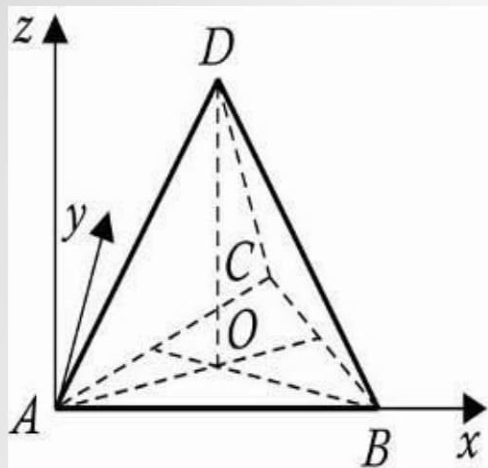


$$A(0;0;0)A_1(0;0;1)B(1;0;0), B_1(1;0;1)C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)C_1\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$$

$$D(1; \sqrt{3}; 0)D_1(1; \sqrt{3}; 1)E(0; \sqrt{3}; 0)E_1(0; \sqrt{3}; 1)F\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)F_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$$



2.4. Координаты вершин правильной треугольной пирамиды (тетраэдра), все ребра которой равны 1

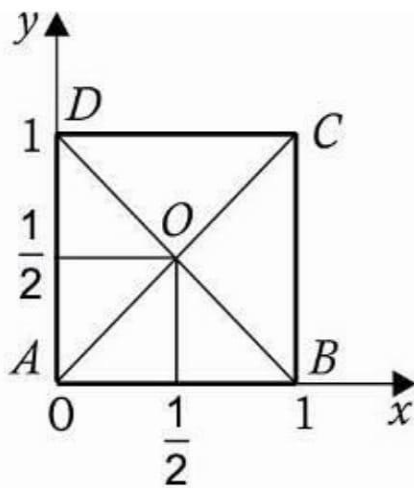
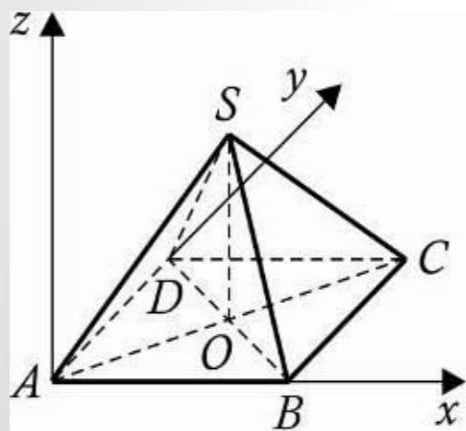


$$A(0;0;0), B(1;0;0),$$

$$C\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

$$D\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)$$

2.5. Координаты вершин правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1



$$A(0;0;0), B(1;0;0),$$

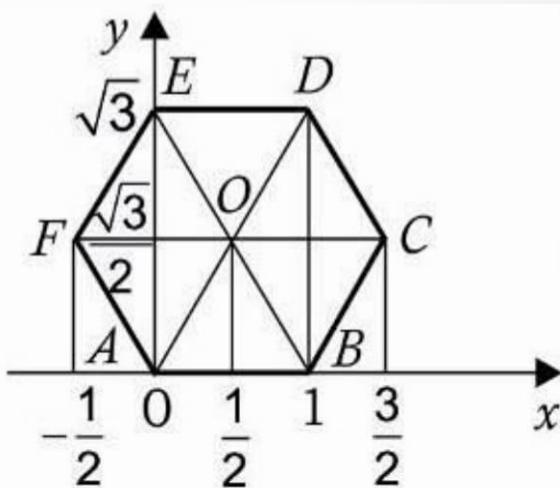
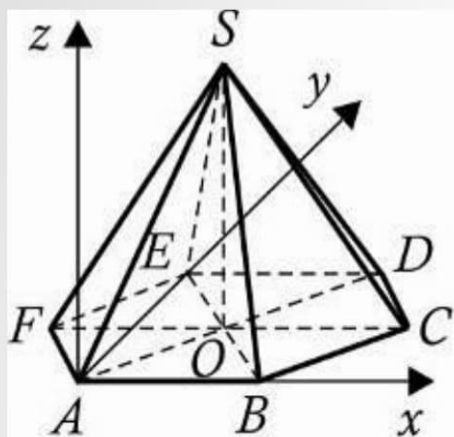
$$C(1;1;0), D(0;1;0)$$

$$S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$





2.6. Координаты вершин правильной шестиугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2

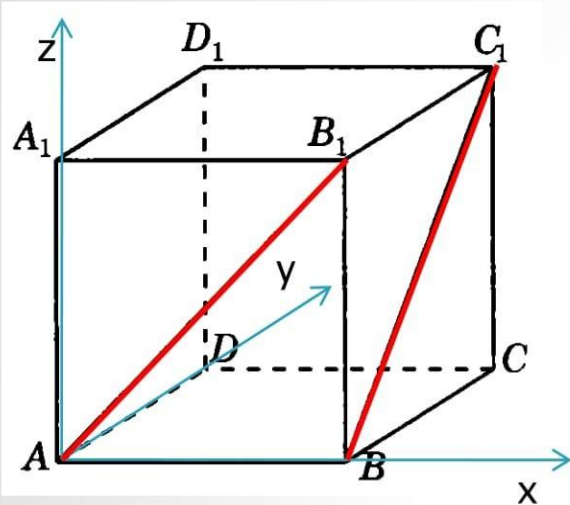


$$A(0;0;0), B(1;0;0), C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), D(1; \sqrt{3}; 0),$$
$$E(0; \sqrt{3}; 0), F\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$



### 3. Примеры решения задач

3.1. В единичном кубе найти угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$



Введем систему координат и найдем координаты точек  $A, B, B_1, C_1$

ВСПОМНИМ?

Находим координаты направляющих векторов прямых  $AB_1$  и  $BC_1$  по формуле 1.

ВСПОМНИМ?

$$\overrightarrow{AB_1} \{1;0;1\}, \overrightarrow{BC_1} \{0;1;0\}$$

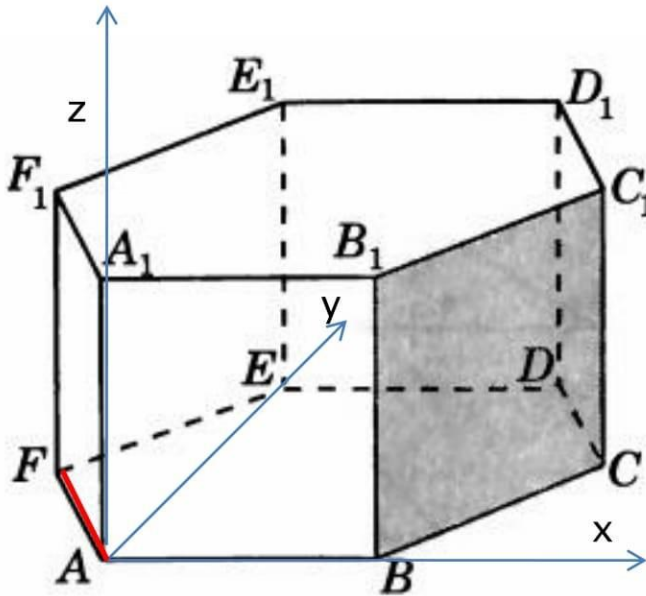
Косинус угла  $\varphi$  между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$  определяется по формуле 1.1:

ВСПОМНИМ?

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}, \varphi = 60^\circ$$

Ответ :  $60^\circ$

3.2. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найти угол между прямой  $AF$  и плоскостью  $BCC_1$



Введем систему координат и находим координаты нужных точек.

ВСПОМНИМ?

Найдем координаты вектора  $\overrightarrow{AF} \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0 \right\}$

Плоскость  $BCC_1$  совпадает с плоскостью грани  $BB_1C_1C$ ; зададим ее с помощью точек  $B(1;0;0), B_1(1;0;1), C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

Пусть  $ax+by+cz+d=0$  – уравнение плоскости  $BCC_1$

$$B(1;0;0) \in (BCC_1) \Rightarrow a + d = 0 \quad d = -a$$

$$B_1(1;0;1) \in (BCC_1) \Rightarrow a + c + d = 0 \quad c = 0$$

$$C\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right) \in (BCC_1) \Rightarrow a \cdot \frac{3}{2} + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + d = 0 \Rightarrow b = -\frac{a}{\sqrt{3}}$$

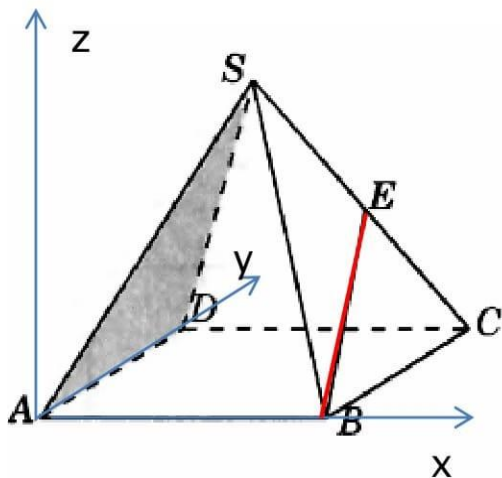
Уравнение плоскости  $BCC_1$  примет вид  $ax - \frac{a}{\sqrt{3}}y - a = 0$  или  $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$

Вектор нормали :  $\vec{n} \left\{ \sqrt{3}; -1; 0 \right\}$

Синус искомого угла: 
$$\sin \varphi = \frac{\left| \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 \cdot 0 \right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2 + 0} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 0}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ Ответ : } \varphi = 60^\circ$$

ВСПОМНИМ?

3.3. В правильной четырехугольной пирамиде, все ребра которой равны 1, найти синус угла между прямой BE и плоскостью SAD, где E – середина ребра SC



Координаты точки E определим по формуле 3:

$$E\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \text{ и } \overline{BE} \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$$

вспомним?

Пусть уравнение плоскости ADS  $ax+by+cz+d=0$

Из того, что  $A(0;0;0), D(0;1;0), S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in (ADS)$

вспомним?

следует, что  $d=0, b+d=0$  и  $a \cdot \frac{1}{2} + b \cdot \frac{1}{2} + c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + d = 0$

Отсюда получим, что  $a = -\sqrt{2}c, b = 0, d = 0$  и уравнение плоскости ADS примет вид:

$$-\sqrt{2}cx + cz = 0, \text{ или } \sqrt{2}x - z = 0. \text{ Вектор нормали } \vec{n} \{ \sqrt{2}; 0; -1 \}$$

Синус угла между прямой BE плоскостью ADS определим по формуле 1.2

вспомним?

$$\sin \varphi = \frac{\left| \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 0 \cdot \frac{3}{4} + (-1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

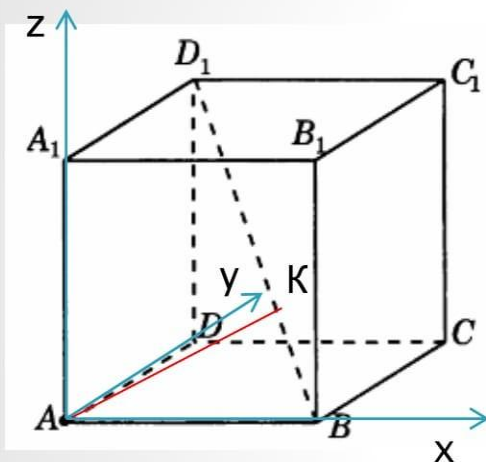
Ответ :  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

### 3.4. В единичном кубе $A...D_1$ найти расстояние от точки $A$ до прямой $BD_1$

Находим координаты точек  $A(0;0;0)B(1;0;0)D_1(0;1;1)$ , вектора  $\overline{BD_1}\{-1;1;1\}$

Искомое расстояние есть длина перпендикуляра  $AK$ .  
Если отрезок  $BD$  разделен точкой  $K(x;y;z)$  в отношении  $\lambda$ , то координаты точки  $K$  определяются по формуле 1.5:

Вспомним?



$$x = \frac{1+0}{1+\lambda}; y = \frac{0+\lambda}{1+\lambda}; z = \frac{0+\lambda}{1+\lambda} \quad K\left(\frac{1+0}{1+\lambda}; \frac{0+\lambda}{1+\lambda}; \frac{0+\lambda}{1+\lambda}\right) \quad \overline{AK}\left\{\frac{1+0}{1+\lambda}; \frac{0+\lambda}{1+\lambda}; \frac{0+\lambda}{1+\lambda}\right\}$$

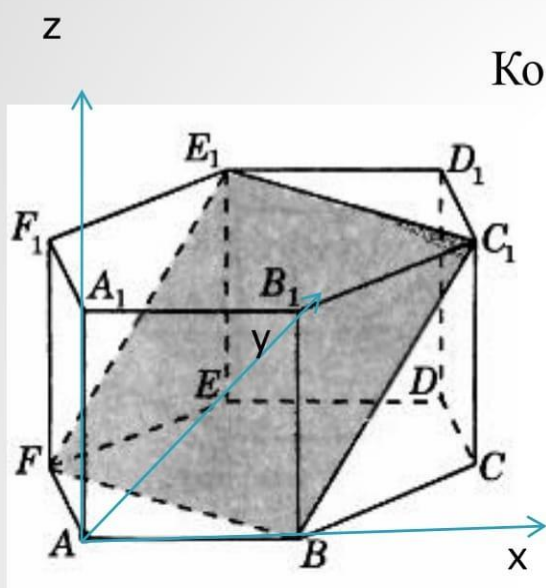
$$\text{т.к. } \overline{AK} \perp \overline{BD_1} \Rightarrow \overline{AK} \cdot \overline{BD_1} = 0$$

$$-\frac{1}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} + \frac{\lambda}{1+\lambda} = 0 \quad \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow K\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \overline{AK}\left\{\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$$

$$|\overline{AK}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{Ответ: } \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Вспомним?

3.5. В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найти расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BFE_1$



Координаты точек  $A(0;0;0)$ ,  $B(1;0;0)$  и  $E_1(0; \sqrt{3}; 1)$ ,  $F\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

Подставив координаты точек  $B, F$  и  $E_1$  в общее уравнение плоскости получим систему уравнений:

$$B \in (BFE_1) \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + d = 0$$

$$F\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right) \in (BFE_1) \Rightarrow a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + d = 0$$

$$E_1(0; \sqrt{3}; 1) \in (BFE_1) \Rightarrow b \cdot \sqrt{3} + c \cdot 1 + d = 0$$

Откуда  $d = -a, c = -2a, b = a\sqrt{3}$

Уравнение плоскости примет вид:  $ax + \sqrt{3}ay - 2az - a = 0$ , или  $x + \sqrt{3}y - 2z - 1 = 0$

Вектор нормали:  $\vec{n} \{1; \sqrt{3}; -2\}$

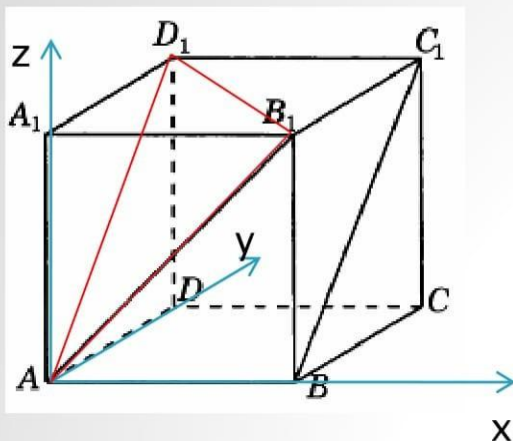
Вычислим расстояние  $h$  от точки  $A$  до плоскости  $BFE_1$  по формуле 1.4:

$$h = \frac{1 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot 0 + (-2) \cdot 0 - 1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{2}}{4}$



3.6. В единичном кубе  $A...D_1$ , найти расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$



При параллельном переносе на вектор  $\overline{BA}$  прямая  $BC_1$  отображается на прямую  $AD_1$ . Таким образом, плоскость  $AB_1D_1$  содержит прямую  $AB_1$  и параллельна прямой  $BC_1$ . Расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BC_1$  находим как расстояние от точки  $B$  до плоскости  $AB_1D_1$

Пусть  $ax+by+cz+d=0$  – уравнение плоскости  $AB_1D_1$ .

Так как  $A(0;0;0) \in (AB_1D_1) \Rightarrow d = 0$

$$B_1(1;0;1) \in (AB_1D_1) \Rightarrow a = -c$$

$$D_1(0;1;1) \in (A_1B_1D_1) \Rightarrow b = -c$$

Уравнение плоскости запишется как  $-cx-cy+cz=0$ , или  $x+y+z=0$ .

Вектор нормали  $\vec{n}\{1;1;-1\}$

Расстояние  $h$  от точки  $B(1;0;0)$  до плоскости  $AB_1D_1$  находим по формуле 1.4

$$h = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

