Нормальные формы булевых функций.

Конъюнктивным одночленом от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний.

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \qquad\qquad x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_2}$$

Дизъюнктивным одночленом от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний.

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \qquad\qquad x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_2}$$

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется произвольная конъюнкция дизъюнктивных одночленов.

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_1}) \wedge (x_1 \vee x_3)$$

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется произвольная дизъюнкция конъюнктивных одночленов.

$$(x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee \overline{x_2}$$

Всякую формулу равносильными преобразованиями можно привести к ДНФ и КНФ.

Алгоритм:

1) Избавиться от операций импликации, эквивалентности, штрих Шеффера, стрелка Пирса, сложение по модулю два;
2) Довести знаки отрицания до независимых переменных, используя законы де Моргана;
3) Применяя закон дистрибутивности, преобразовать формулу к дизъюнкции конъюнктивных одночленов (конъюнкции дизъюнктивных одночленов);

Замечание: Для того чтобы проверить правильно ли привели формулу к КНФ и ДНФ, можно построить таблицы истинности первоначальной и получившихся формул. Последние столбцы таблиц этих формул должны принимать одинаковые значения истинности.

Одночлен от некоторых переменных называется **совершенным**, **если каждая из этих переменных входит в него ровно один раз, со знаком отрицания или без него.**

Нормальная форма от некоторых переменных называется **совершенной**, **если каждый входящий в нее одночлен является совершенным одночленом от тех же самых переменных. (СДНФ и СКНФ)**

$(x_1 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$ – СКНФ от двух переменных x_1 и x_2

Теорема 1: Если формула не тождественно истинная, то для нее существует и при том единственная СКНФ.

Теорема 2: Если формула не тождественно ложная, то для нее существует и при том единственная СДНФ.

Алгоритм нахождения СДНФ:

1) **Строим таблицу истинности;**
2) **Выбираем те строки таблицы, на которых формула принимает значение истина;**
3) **Для каждой выбранной строки строим конъюнктивный одночлен из переменных, от которых зависит формула следующим образом: если переменная в строке принимает значение истина, то она непосредственно входит в элементарную конъюнкцию, если ложь, то она входит с отрицанием;**
4) **Из конъюнктивных одночленов составляем СДНФ.**

Алгоритм нахождения СКНФ:

1) Строим таблицу истинности;
2) Выбираем те строки таблицы, на которых формула принимает значение ложь;
3) Для каждой выбранной строки строим дизъюнктивный одночлен из переменных, от которых зависит формула следующим образом: если переменная в строке принимает значение ложь, то она сама входит в элементарную дизъюнкцию, если истина, то она входит с отрицанием;
4) Из дизъюнктивных одночленов составляем СКНФ.