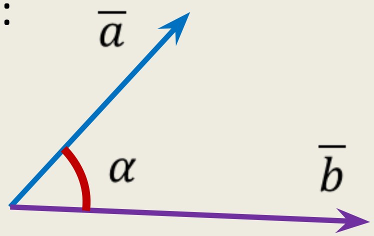
Лекция 7

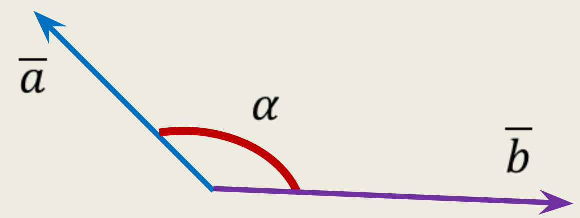
ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Угол между векторами. Ось

УГЛОМ α между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется

НАИМЕНЬШИЙ из двух углов между векторами, приведенными к общему началу:

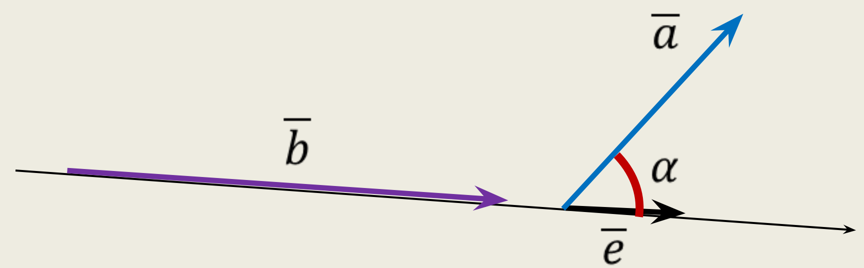




Из определения следует, что $0 \leq \alpha \leq \pi$ (ПОЧЕМУ? ОБЪЯСНИТЕ!)

ОСЬ - это прямая с выбранным положительным направлением.

Направление оси может быть определено с помощью какого-нибудь ненулевого вектора $\overline{b}$ (или орта $\overline{e}$).



УГЛОМ между осью и вектором $\overline{a}$ называется угол $\alpha = (\widehat{\overline{a}, \overline{e}})$.

Проекция вектора на ось

ПРОЕКЦИЕЙ вектора $\overline{a}$ на ось (на направление вектора $\overline{e}$) называется ЧИСЛО

$$\text{пр}_{\,\overline{e}}\,\overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos\alpha$$

Возможны три случая:

1. Если $\overline{a} = \overline{0}$ или если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то проекция равна нулю:

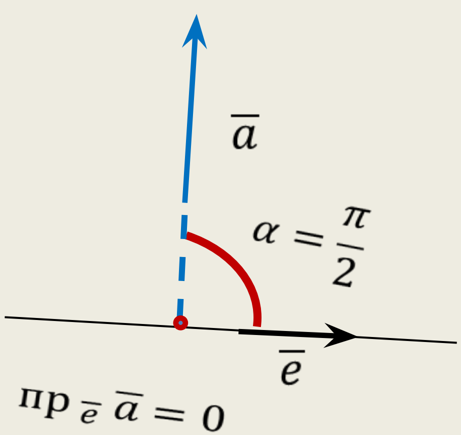
$$\text{пр}_{\,\overline{e}}\,\overline{a} = 0$$

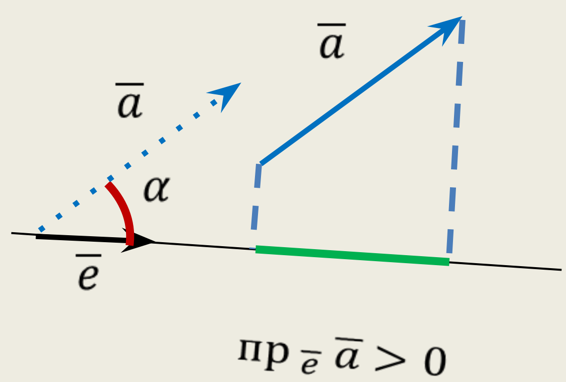
2. Если $\overline{a} \neq \overline{0}$ и $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то проекция положительна :

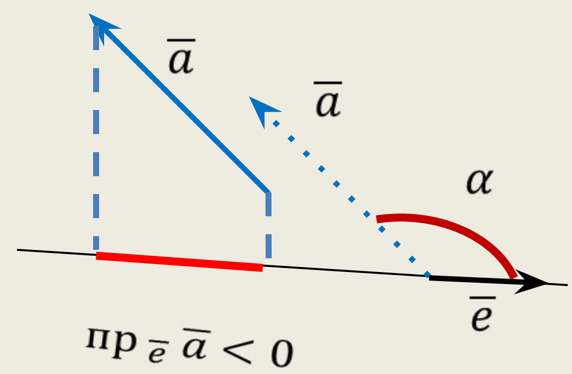
$$\text{пр}_{\,\overline{e}}\,\overline{a} > 0$$

3. Если $\overline{a} \neq \overline{0}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, то проекция отрицательна :

$$\text{пр}_{\,\overline{e}}\,\overline{a} < 0$$







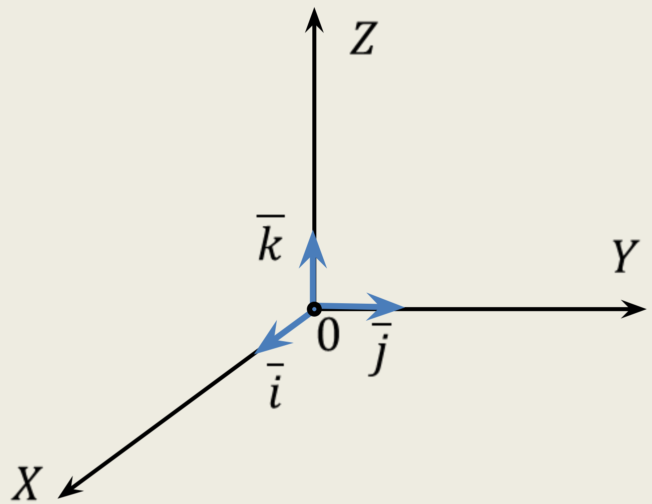
Прямоугольная система координат

Зададим вектора в пространстве с помощью чисел.

Для этого рассмотрим ПРЯМОУГОЛЬНУЮ (Декартову) систему координат (x, y, z) , то есть

ТРИ взаимно перпендикулярные оси, проходящие через одну точку 0 - НАЧАЛО КООРДИНАТ.

Выберем единичный отрезок, при помощи которого измеряются все длины.



Обозначим орты осей:

для оси $0X$ (оси абсцисс) $\overline{i}$

для оси $0Y$ (оси ординат) $\overline{j}$

для оси $0Z$ (оси аппликат) $\overline{k}$

Разложение вектора по базису

Отметим любую точку A пространства.

Вектор $\overline{0A} = \overline{a}$, соединяющий начало координат и точку A, называется

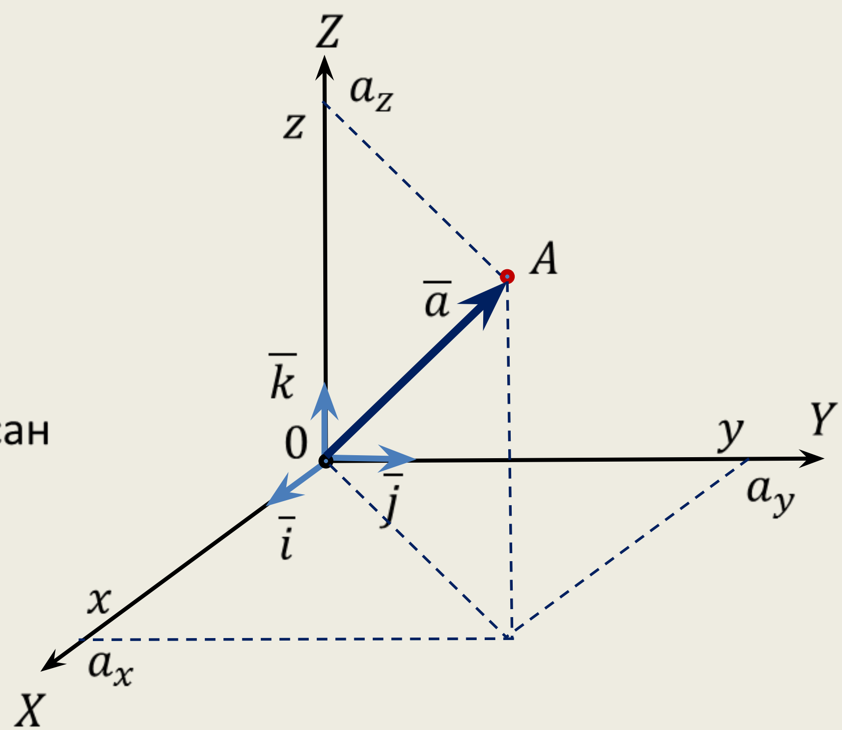
РАДИУС-ВЕКТОРОМ точки A.

Проекции вектора $\overline{a}$ на оси $0X$, $0Y$, $0Z$ обозначим x, y, z : это **КООРДИНАТЫ** вектора $\overline{a}$.

Обозначим это : $\overline{a} = (x, y, z) = \left(a_x, a_y, a_z\right)$.

Очевидно, что координаты ортов равны:

$$\overline{i} = (1, 0, 0);$$
$$\overline{j} = (0, 1, 0);$$
$$\overline{k} = (0, 0, 1);$$



Тогда вектор $\overline{a} = (x, y, z)$ может быть записан

в виде $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$;

Эта запись называется

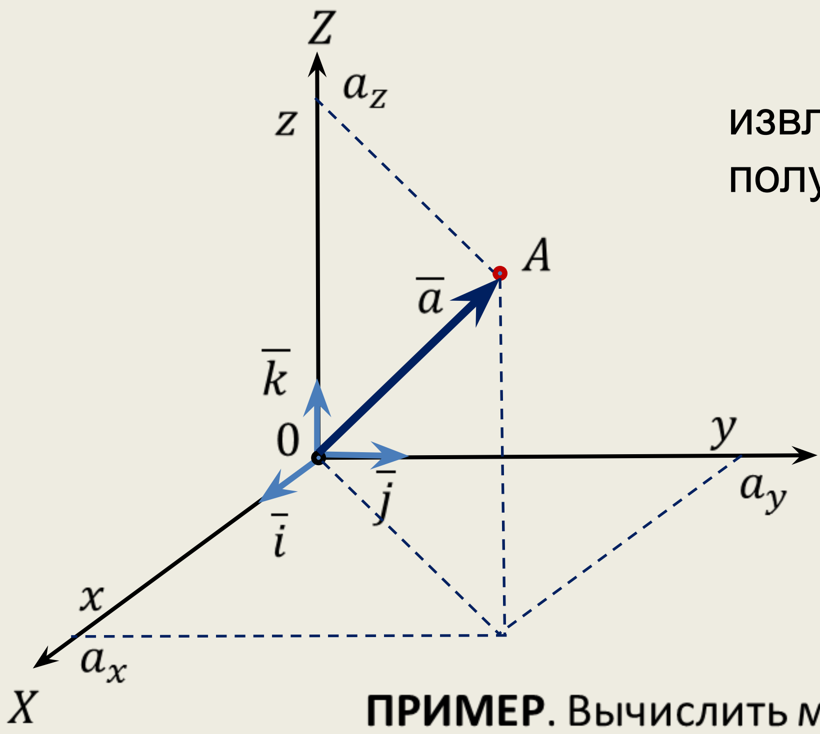
РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА $\overline{a}$ ПО БАЗИСУ $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

Модуль вектора

Зная проекции вектора $\overline{a} = (x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$, можно найти выражение для модуля вектора.

По теореме о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать :

$$|\overline{a}|^2 = {a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2 \,;$$



извлекая корень из обеих частей равенства, получим :

$$|\overline{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$

МОДУЛЬ вектора равен КВАДРАТНОМУ КОРНЮ из СУММЫ КВАДРАТОВ его КООРДИНАТ, или проекций на оси.

ПРИМЕР. Вычислить модули векторов $\overline{a} = (3, -1, 2)$ и $\overline{b} = (6, -2, -3)$.

РЕШЕНИЕ:

$$|\overline{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14};$$

$$|\overline{b}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7;$$

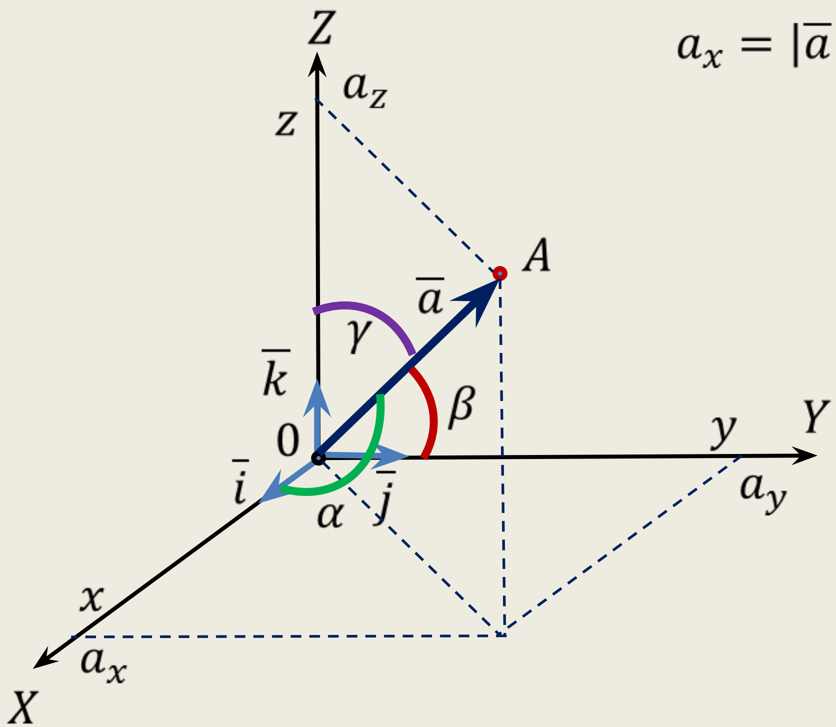
Направляющие косинусы вектора

Пусть вектор $\overline{a} = (x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$ составляет углы с осями координат:

с осью $0X$ угол α; с осью $0Y$ угол β; с осью $0Z$ угол γ .

По свойству проекции вектора на ось можно написать :

$a_x = |\overline{a}| \cos\alpha\,;\ \ a_y = |\overline{a}| \cos\beta\,;\ \ a_z = |\overline{a}| \cos\gamma\,;$



Выразим косинусы углов α, β, γ:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\overline{a}|};$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\overline{a}|};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\overline{a}|};$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются НАПРАВЛЯЮЩИМИ КОСИНУСАМИ вектора $\overline{a}$.

$$\alpha$$

Подставим выражение для координат вектора через проекции в эту формулу :

$$\overline{a}$$

$$\overline{e}$$

$$\alpha$$

ПРОЕКЦИЕЙ вектора $\overline{a}$ на ось (на напра

$$1 = (\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2$$

СУММА КВАДРАТОВ НАПРАВЛЯЮЩИХ КОСИНУСОВ ненулевого вектора РАВНА ЕДИНИЦЕ.

Если $\overline{a} = \overline{0}$ или

если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то

проекция равна нулю:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

РЕШЕНИЕ:

Если $\overline{a} \neq \overline{0}$ и $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, то

проекция положительна :

$$\overline{a}$$

ОТВЕТ:

Если $\overline{a} \neq \overline{0}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, то

проекция отрицательна :