

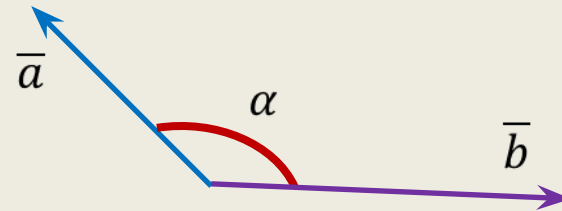
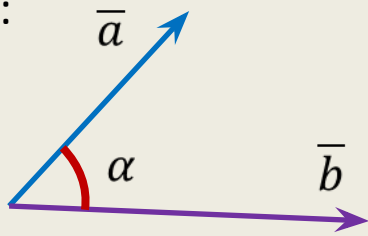
Лекция 7

# **ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ**

# Угол между векторами. Ось

УГЛОМ  $\alpha$  между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется

НАИМЕНЬШИЙ из двух углов между векторами, приведенными к общему началу:

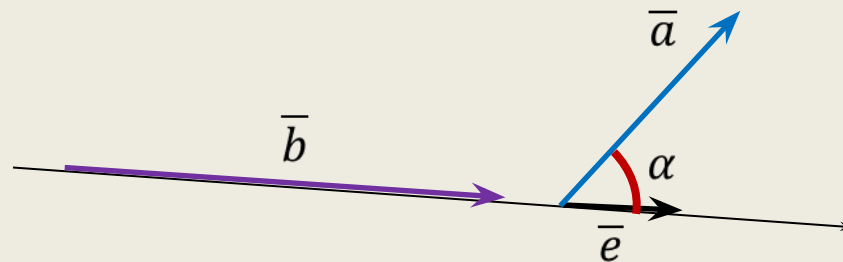


Из определения следует, что  $0 \leq \alpha \leq \pi$  (ПОЧЕМУ?  
ОБЪЯСНИТЕ!)

ОСЬ - это прямая с выбранным положительным

направлением.

Направление оси может быть определено с помощью какого-нибудь ненулевого вектора  $\vec{b}$  (или орта  $\vec{e}$ ).



УГЛОМ между осью и вектором  $\vec{a}$  называется угол  $\alpha = (\vec{a}, \vec{e})$ .

# Проекция вектора на

ПРОЕКЦИЕЙ вектора  $\vec{a}$  на ось ( на направление вектора  $\vec{e}$  ) называется ЧИСЛО

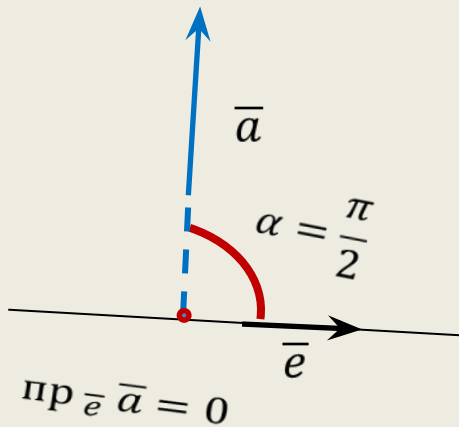
ОСЬ

$$\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha$$

Возможны три случая:

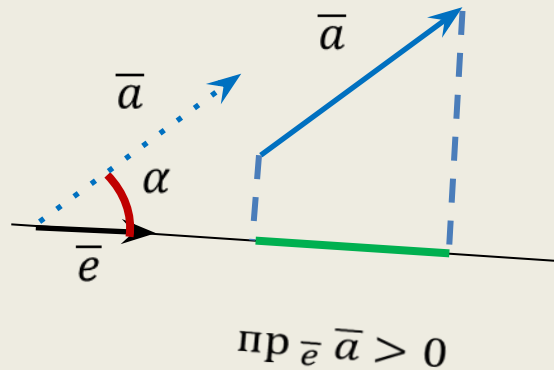
1. Если  $\vec{a} = \vec{0}$  или если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то проекция равна нулю:

$$\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} = 0$$



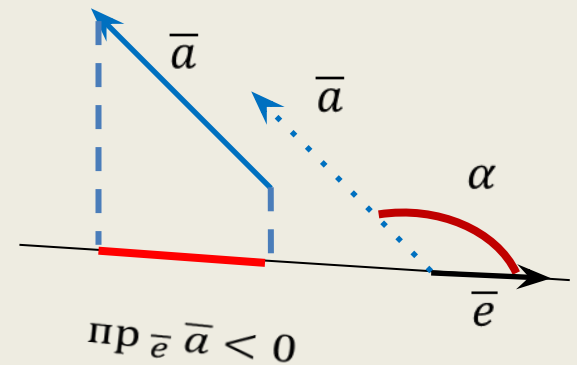
2. Если  $\vec{a} \neq \vec{0}$  и  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , то проекция положительна:

$$\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} > 0$$



3. Если  $\vec{a} \neq \vec{0}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ , то проекция отрицательна:

$$\text{пр}_{\vec{e}} \vec{a} < 0$$



# I Прямоугольная система

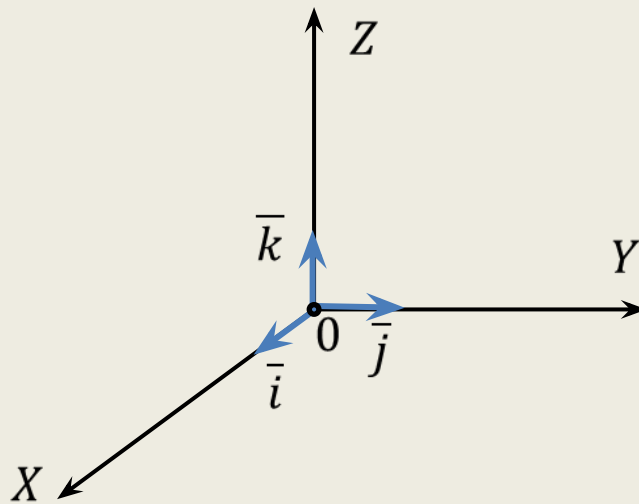
## координат

Зададим вектора в пространстве с помощью чисел.

Для этого рассмотрим ПРЯМОУГОЛЬНУЮ (Декартову ) систему координат  $(x, y, z)$  , то есть

ТРИ взаимно перпендикулярные оси, проходящие через одну точку  $O$  - НАЧАЛО КООРДИНАТ.

Выберем единичный отрезок, при помощи которого измеряются все длины.



Обозначим орты осей:

для оси  $OX$  (оси абсцисс)  $\vec{i}$

для оси  $OY$  (оси ординат)  $\vec{j}$

для оси  $OZ$  (оси аппликат)  $\vec{k}$

# Разложение вектора по

## базису

Отметим любую точку  $A$  пространства.

Вектор  $\overline{0A} = \bar{a}$ , соединяющий начало координат и точку  $A$ , называется

РАДИУС-ВЕКТОРОМ точки  $A$ .

**Проекции** вектора  $\bar{a}$  на оси  $OX, OY, OZ$  обозначим  $x, y, z$ : это **КООРДИНАТЫ** вектора  $\bar{a}$ .

Обозначим это:  $\bar{a} = (x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$ .

Очевидно, что координаты ортов  
равны:

$$\bar{i} = (1, 0, 0);$$

$$\bar{j} = (0, 1, 0);$$

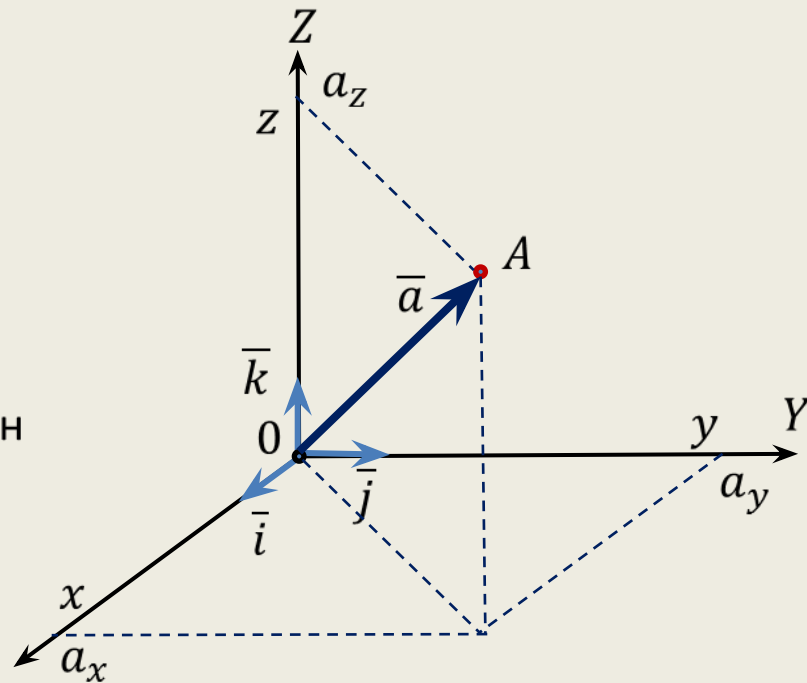
$$\bar{k} = (0, 0, 1);$$

Тогда вектор  $\bar{a} = (x, y, z)$  может быть записан

$$\text{в виде } \bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k};$$

Эта запись называется

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА  $\bar{a}$  ПО БАЗИСУ  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ .



# Модуль вектора

Зная проекции вектора  $\vec{a} = (x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$ , можно найти выражение для модуля вектора.

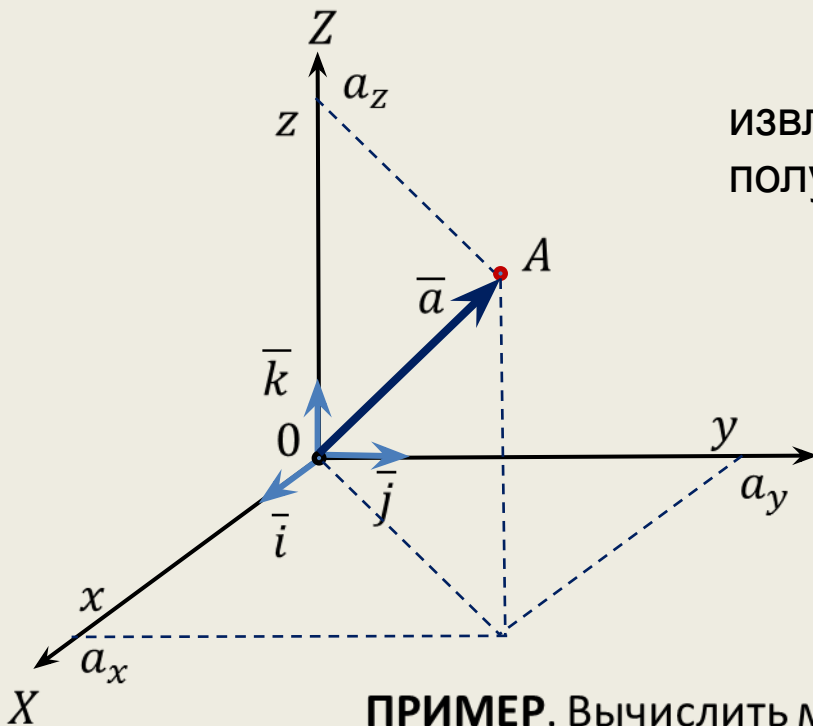
По теореме о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать :

$$|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 ;$$

извлекая корень из обеих частей равенства, получим :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

МОДУЛЬ вектора равен КВАДРАТНОМУ КОРНЮ из СУММЫ КВАДРАТОВ его КООРДИНАТ, или проекций на оси.



**ПРИМЕР.** Вычислить модули векторов  $\vec{a} = (3, -1, 2)$  и  $\vec{b} = (6, -2, -3)$ .

**РЕШЕНИ**

**Е:**

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7;$$

# Направляющие косинусы вектора

Пусть вектор  $\vec{a} = (x, y, z) = (a_x, a_y, a_z)$  составляет углы с осями координат:

с осью  $OX$  угол  $\alpha$ ; с осью  $OY$  угол  $\beta$ ; с осью  $OZ$  угол  $\gamma$ .

По свойству проекции вектора на ось можно написать:

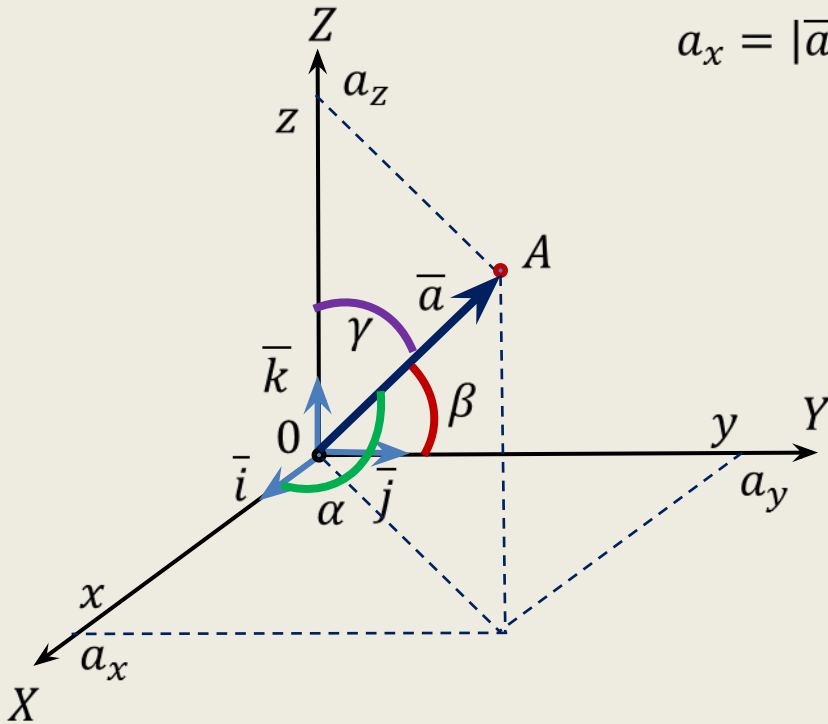
$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha; \quad a_y = |\vec{a}| \cos \beta; \quad a_z = |\vec{a}| \cos \gamma;$$

Выразим косинусы углов  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|};$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|};$$



Числа  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  называются НАПРАВЛЯЮЩИМИ КОСИНУСАМИ вектора  $\vec{a}$ .

Подставим выражение для координат вектора через проекции в эту формулу :

ПРОЕКЦИЕЙ вектора  $\vec{a}$  на ось ( на напра

$$1 = (\cos \alpha)^2 + (\cos \beta)^2 + (\cos \gamma)^2$$

СУММА КВАДРАТОВ НАПРАВЛЯЮЩИХ КОСИНУСОВ ненулевого вектора РАВНА ЕДИНИЦЕ.

Если  $\vec{a} = \vec{0}$  или  
если  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , то  
проекция равна нулю:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Если  $\vec{a} \neq \vec{0}$  и  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , то  
проекция положительна :

$$\vec{a}$$

ОТВЕ

Т :

Если  $\vec{a} \neq \vec{0}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$ , то  
проекция отрицательна :