

# Математические методы в биологии

Блок 1. Основы теории вероятностей,  
или случайные события

Лекция 2

Козлова Ольга Сергеевна  
89276755130, olga-sphinx@yandex.ru

## Следствия теорем сложения и умножения

**Теорема сложения вероятностей для несовместных событий.** Вероятность появления одного из двух **несовместных событий** (безразлично, какого), равна сумме вероятности этих событий:  $P(A + B) = P(A) + P(B)$

**Теорема сложения вероятностей для совместных событий** (одно не исключает другое). Вероятность появления **хотя бы одного** из двух совместных событий  $A$  и  $B$  равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Доказательство. Т.к. события совместны, то событие  $A+B$  эквивалентно наступлению одного из событий (причём все они уже несовместны):

- $A$  наступило,  $B$  – нет
- $B$  наступило,  $A$  – нет
- Наступило и  $A$ , и  $B$

*Пример совместных событий:  $A$  – появление 4х очков;*

*$B$  – появление чётного числа очков.*

По формуле сложения событий  $P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB)$ .

По той же формуле  $P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB) \Rightarrow P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$

По той же формуле  $P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB) \Rightarrow P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$

Т.о.  $P(A + B) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$

# Теорема сложения вероятностей **трёх** совместных событий

Т.к. события совместны, то событие  $A+B+C$  эквивалентно наступлению одного из событий (причём все они уже несовместны):

- А и В наступили, С – нет
- А и С наступили, В – нет
- В и С наступили, А – нет
- А наступило, В и С – нет
- В наступило, А и С – нет
- С наступило, А и В – нет
- Наступили все три события

По формуле сложения событий  $P(A + B + C) = P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(ABC)$

- $P(A) = P(\overline{A}B\overline{C}) + P(A\overline{B}\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) + P(ABC)$   
 $\Rightarrow P(\overline{A}\overline{B}C) = P(A) - P(\overline{A}B\overline{C}) - P(A\overline{B}\overline{C}) - P(ABC)$
- $P(B) = P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) + P(ABC)$   
 $\Rightarrow P(\overline{A}B\overline{C}) = P(B) - P(\overline{A}B\overline{C}) - P(\overline{A}\overline{B}C) - P(ABC)$
- $P(C) = P(\overline{A}\overline{B}C) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\overline{B}C) + P(ABC)$   
 $\Rightarrow P(\overline{A}B\overline{C}) = P(C) - P(\overline{A}\overline{B}C) - P(\overline{A}B\overline{C}) - P(ABC)$

После подстановки:

$$P(A + B + C) = \overline{P(\overline{A}B\overline{C})} + \overline{P(A\overline{B}\overline{C})} + \overline{P(\overline{A}\overline{B}C)} + P(A) - P(\overline{A}B\overline{C}) - P(A\overline{B}\overline{C}) - P(ABC) + P(B) - P(\overline{A}B\overline{C}) - P(\overline{A}\overline{B}C) - P(ABC) + P(C) - P(\overline{A}\overline{B}C) - P(\overline{A}B\overline{C}) - P(ABC) + P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(\overline{A}B\overline{C}) - P(A\overline{B}\overline{C}) - P(\overline{A}\overline{B}C) - 2 * P(ABC)$$

- $P(AC) = P(\overline{A}\overline{B}C) + P(ABC) \Rightarrow P(\overline{A}\overline{B}C) = P(AC) - P(ABC)$
- $P(BC) = P(\overline{A}B\overline{C}) + P(ABC) \Rightarrow P(\overline{A}B\overline{C}) = P(BC) - P(ABC)$
- $P(AB) = P(\overline{A}B\overline{C}) + P(ABC) \Rightarrow P(\overline{A}B\overline{C}) = P(AB) - P(ABC)$

После подстановки:  $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) + P(ABC) - P(AC) + P(ABC) - P(BC) + P(ABC) - 2 * P(ABC) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

$\underset{0,06}{P(A)} + \underset{0,006}{P(B)} + \underset{0,3}{P(C)} - \underset{0,02}{P(AB)} - \underset{0,03}{P(AC)} - \underset{0,03}{P(BC)} + \underset{0,006}{P(ABC)} = 0,496$

По формуле для вероятности противоположного события:

## Следствия теорем сложения и умножения

**Формула полной вероятности.** Пусть событие  $A$  наступает только при условии наступления одного из несовместных событий  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ , образующих вместе полную группу событий. Пусть также известны вероятности этих событий  $B$  и условные вероятности наступления события  $A$  для каждого из событий  $B$  ( $P_{B_n}(A)$ ). Тогда вероятность события  $A$  равна сумме произведений вероятностей  $B$  на соответствующую условную вероятность  $A$ :

$$P(A) = P(B_1) * P_{B_1}(A) + P(B_2) * P_{B_2}(A) + P(B_3) * P_{B_3}(A) + \dots + P(B_n) * P_{B_n}(A)$$

Доказательство. Так как  $A$  наступает только в случае наступления одного из  $B$  (всё равно, какого), событие «появление  $A$ » эквивалентно одному из несовместных событий  $\{B_1A, B_2A, B_3A, \dots, B_nA\}$ . По формуле сложения вероятностей для несовместных событий  $P(A) = P(B_1A) + P(B_2A) + P(B_3A) + \dots + P(B_nA)$

Распишем каждое из слагаемых

по формуле условной вероятности:  $P(B_1A) = P(B_1) * P_{B_1}(A)$

$$P(B_2A) = P(B_2) * P_{B_2}(A)$$

...

$$P(B_nA) = P(B_n) * P_{B_n}(A)$$

# Решение задач через формулу полной вероятности

**Задача 1.** Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь из первого набора без брака – 0,8; вероятность того, что деталь из второго набора без брака – 0,9. Найти вероятность того, что случайно взятая деталь из случайно взятого набора – без брака.

**Решение.** Событие А – «Извлечённая деталь без брака». Естественно, событие А наступает только после того, как произойдёт одно из событий группы В – «выбор одного или другого набора».

Применим формулу:  $P(A) = P(B_1) * P_{B_1}(A) + P(B_2) * P_{B_2}(A) = 0,5 * 0,8 + 0,5 * 0,9 = 0,85$  *(среднее арифметическое, так как вероятности выбора наборов равны)*

**Задача 2.** Три поставщика поставляют в магазин помидоры в соотношении 5:8:7 (на каждые 5 помидоров 1го поставщика второй поставляет 8, а третий – 7). Среди помидоров 1го поставщика – 90% свежие, у второго – 85% свежие, у третьего – 75% свежие. Найти вероятность того, что случайным образом выбранный помидор будет свежим.

**Решение.** Событие А («помидор свеж») наступает только после того, как произойдёт одно из событий группы В – «выбор одного из поставщиков». Вероятность выбора поставщика 1 равна  $5/20=1/4=0,25$ ; вероятность выбора поставщика 2 равна  $8/20=0,4$ ; вероятность выбора поставщика 3 равна  $7/20=0,35$ .

Применим формулу:  $P(A) = P(B_1) * P_{B_1}(A) + P(B_2) * P_{B_2}(A) + P(B_3) * P_{B_3}(A) = 0,25 * 0,9 + 0,4 * 0,85 + 0,35 * 0,75 = 0,225 + 0,34 + 0,2625 = 0,8275$  *(НЕ среднее арифметическое (оно 83,333), так как вероятности выбора наборов НЕ равны)*



# Формула Байеса

Пусть событие  $A$  наступает только при условии наступления одного из несовместных событий  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ , образующих вместе полную группу событий.

**ВОПРОС:** Можем ли мы узнать, как изменились вероятности событий группы  $B$  при условии, что событие  $A$  наступило?

**ОТВЕТ:** Да, для этого надо найти условные вероятности  $P_A(B_1), P_A(B_2), P_A(B_3), \dots, P_A(B_n)$

По формуле произведения вероятностей в общем виде:  $P(AB_1) = P(A) * P_A(B_1) = P(B_1) * P_{B_1}(A)$ , значит,  $P_A(B_1) = \frac{P(B_1) * P_{B_1}(A)}{P(A)}$

В то же время, по формуле полной вероятности  $P(A) = P(B_1) * P_{B_1}(A) + P(B_2) * P_{B_2}(A) + P(B_3) * P_{B_3}(A) + \dots + P(B_n) * P_{B_n}(A)$

Отсюда  $P_A(B_1) = \frac{P(B_1) * P_{B_1}(A)}{P(B_1) * P_{B_1}(A) + P(B_2) * P_{B_2}(A) + P(B_3) * P_{B_3}(A) + \dots + P(B_n) * P_{B_n}(A)}$

Аналогично для любого  $i, i = 1, n$ :

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) * P_{B_i}(A)}{P(B_1) * P_{B_1}(A) + P(B_2) * P_{B_2}(A) + P(B_3) * P_{B_3}(A) + \dots + P(B_n) * P_{B_n}(A)}$$

Компактный вид формулы Байеса:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Вероятность  $B$  при наступлении  $A$   
(апостериорная, «после-опытная»  
вероятность)

Априорная,  
«до-опытная»  
вероятность  
 $B$ )

Событие  $B$  также часто называют гипотезой

$A$



# Решение задач по формуле Байеса

Пусть в задаче про помидоры купленный помидор оказался свежим. Какова вероятность того, что он попал к нам в руки от третьего поставщика?

Решение. Событие А – «помидор свеж». Всего можно сделать три предположения (гипотезы):

- Это помидор от первого поставщика
- Это помидор от второго поставщика
- **Это помидор от третьего поставщика**

По формуле Байеса вероятность того, что этот помидор – от третьего поставщика, равна

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) * P_{B_3}(A)}{P(B_1) * P_{B_1}(A) + P(B_2) * P_{B_2}(A) + P(B_3) * P_{B_3}(A)}$$

*Апостериорная вероятность события  $B_3$*  (стрелка на  $P_A(B_3)$ )

*Априорная вероятность  $B_3$*  (стрелка на  $P(B_3)$ )

*Усл. вер-ть* (стрелка на  $P_{B_3}(A)$ )

*Полная вероятность события А* (стрелка на знаменателе)

Подставляем значения:

$$P_A(B_3) = \frac{0,35 * 0,75}{0,25 * 0,9 + 0,4 * 0,85 + 0,35 * 0,75} = \frac{0,2625}{0,225 + 0,34 + 0,2625} = \frac{0,2625}{0,8275} \approx 0,317$$

*Вероятность выбора 3го поставщика* (стрелка на 0,35)

*Вероятность того, что у 3го поставщика помидор свежий* (стрелка на 0,75)

*Вероятность того, что у 1го поставщика помидор свежий* (стрелка на 0,9)

*Вероятность того, что у 2го поставщика помидор свежий* (стрелка на 0,85)

Вывод. До испытания (покупки помидора) вероятность того, что случайный помидор – от третьего поставщика, составляла 0,35. Сейчас, для уже свершившегося события, она составляет 0,317. Таким образом, использование формулы Байеса позволило нам **переоценить вероятность гипотезы.**

# Формула Бернулли

Пусть производится  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых событие  $A$  может либо появиться, либо нет (причём вероятность его появления  $p$  одинакова!).

**ВОПРОС:** Можем ли мы вычислить вероятность того, что из этих  $n$  испытаний событие наступит ровно  $k$  раз?

**ОТВЕТ:** Да, и эта величина будет записана как  $P_n(k)$

По теореме умножения вероятностей вероятность того, что событие  $A$  наступит  $k$  раз и не наступит  $(n-k)$  раз, равна  $p^k (1-p)^{(n-k)}$ .

Вопрос: сколькими способами можно выбрать  $k$  испытаний, в которых наступило интересующее нас событие  $A$ , среди общего количества испытаний  $n$ ?

Формула Бернулли:  $P_n(k) = C_n^k * p^k (1 - p)^{n-k}$

Пример.

Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равна 0,75.

Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

Решение. Каждый день – это испытание ( $n=6$ ), а  $k=4$ .

Распишем формулу Бернулли:

$$\begin{aligned} P_n(k) &= C_n^k * p^k (1 - p)^{n-k} = C_6^4 * 0,75^4 * (1 - 0,75)^{6-4} \\ &= \frac{6!}{4! (6 - 4)!} * 0,75^4 * 0,25^2 \approx 15 * 0,316 * 0,0625 \approx 0,3 \end{aligned}$$



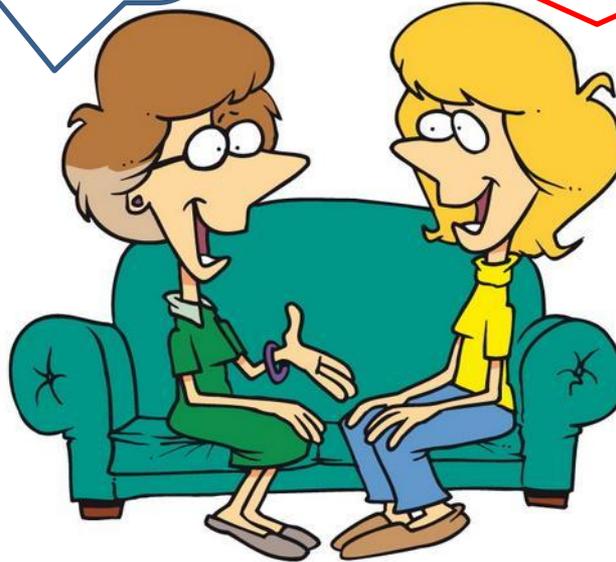
# Весь классический тер-вер на одном слайде

| Что?                                     | Как считать? | Условия применения   | Пример  |
|--|--------------|--|---|
| Классическое определение вероятности     |              | Равновероятность элементарных исходов  | Выпадение чётного числа очков                         |
| Число перестановок                       | $P_n = n!$   | -  | Размещение 3х книг на 3х местной полке                |
| Число размещений из n по m               |              |  | Составление 2х-букв.слов из 4х букв                   |
| Число размещений из n по m с повторением |              | Неограниченное количество элементов типа n                                     | Составление 3х-значн.чисел из 1,2,3,4,5               |
| Число сочетаний из n по m                |              |  | Выбор 2х деталей из 4х                                |
| Формула сложения вероятностей            |              | События несовместны  | Устроит 1 событие из 2х (всё равно, какое)            |
| Формула условной вероятности             |              |  | Вер-ть В при усл-ии, что А уже случилось              |
| Общий вид формулы умножения вер-тей      |              | -  | Устроит только пара совместно случившихся событий     |
| Ф-ла противоположной вероятности         |              | События независимы в совокупности  | Вероятность появления хотя бы одного события          |
| Формула полной вероятности               |              | Событие А наступает только после одного из В; В образуют полную группу событий | Когда вероятности наступления А после В разные        |
| Формула Байеса                           |              | Событие А наступает только после одного из В; В образуют полную группу событий | Переоценить вероятность В после того, как наступило А |
| Формула Бернулли                         |              |  | Вероятность того, что в 8 семьях родится 5 девочек    |

# Парадокс дней рождения

Ну надо же, мы  
родились в один  
день! Какое  
невероятное  
совпадение!

Вовсе нет! Анна  
пригласила столько  
народу, что вероятность  
такого совпадения  
больше 50%!



ВОПРОС: Сколько же людей минимум должна была пригласить на вечеринку Анна?

# Парадокс дней рождения

- Пусть дни рождения распределены равномерно по всему году
- Пусть в году ровно 365 дней, и нет високосных лет
- На вечеринке нет близнецов и людей, заведомо родившихся в один и тот же день

Рассчитаем вероятность противоположного события, то есть того, что дни рождения всех участников вечеринки различны.

Для второго человека эта вероятность равна  $1 - \frac{1}{365} = \frac{364}{365}$ , для третьего  $1 - \frac{2}{365} = \frac{363}{365}$ , для  $n$ -го  $1 - \frac{n-1}{365} = \frac{365-n+1}{365}$ .

По формуле умножения вероятностей вероятность того, что дни рождения  $n$  участников вечеринки различны, равна

$$\frac{364}{365} * \frac{363}{365} * \dots * \frac{365-n+1}{365} = \frac{364*363*\dots*(365-n+1)}{365^{n-1}} = \frac{365*364*363*\dots*(365-n+1)}{365^n} = \frac{365!}{365^n * (365-n)!}$$

Значит, вероятность того, что хотя бы у двух человек дни рождения в один день, равна  $1 - \frac{365!}{365^n * (365-n)!}$ , и она должна быть больше 0,5.

Такое произойдёт при  $n \geq 23$ , значит, на вечеринке у Анны присутствует не менее 23 человек, и этого числа достаточно, чтобы вероятность совпадения дней рождения была больше вероятности несовпадения!