9. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

9.1. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Теорема

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному).

То есть если существует неопределенность вида

$$\frac{0}{0} \quad или \quad \frac{\infty}{\infty}$$

то

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Доказательство:

Рассмотрим неопределенность вида $\frac{0}{0}$ *при* $x \to x_0$

Будем предполагать, что функции *f(x)* и *g(x)*, и их производные непрерывны в точке x_0, причем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} g(x_0) = 0$$

Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

Применим теорему Лагранжа на отрезке [x,x0]:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi_1)\cdot\cancel{(x-x_0)}}{g'(\xi_2)\cdot\cancel{(x-x_0)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}$$

где $x<\xi_1<x_0$

$$x<\xi_2<x_0$$

При $x \to x_0$

в силу непрерывности производных

$$f'(x) \quad и \quad g'(x)$$

имеем

$$f'(\xi_1) \to f'(x_0)$$

$$g'(\xi_2) \to g'(x_0)$$

следовательно

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

ПРИМЕРЫ.

1

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}}$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

2

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

Решение:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$