МИНОБРНАУКИ РОССИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ФГБОУ ВО «ВГУ»)

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
КАФЕДРА ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Квантовый протокол E91. Неравенства Белла

Штанько Валерий Александрович
ВГУ ФКН, бакалавр, 4 курс
Научный руководитель: профессор А. Ф. Клинских

Введение

Криптография - наука об изобретении кодов и шрифтов, известная со времен Цезаря. Ее популярность обусловлена особой важностью секретной передачи информации.

Квантовая криптография — метод защиты коммуникаций, основанный на явлениях квантовой физики. Ее отличием стало использование не математических методов, а – физических.

Одним из перспективных направлений в квантовой криптографии является использование перепутанных состояний для создания секретного ключа. Соответствующий протокол был предложен Экертом в 1991 году, и в литературе его обозначают E91.

Перепутанное состояние

- это совместное состояние не менее двух квантовых систем, которое получается, если системы происходят из одного источника либо взаимодействовали в прошлом.

В настоящее время в качестве источников перепутанных пар фотонов используются кристаллы с квадратичной нелинейностью, в которых в процессе параметрического распада фотон накачки с частотой ω_0 распадается на сигнальный ω_s и холостой ω_i фотоны:

$$\omega_0 = \omega_s + \omega_i$$

и соответствующие волновые вектора удовлетворяют условию фазового синхронизма

$$\overrightarrow{k_0} = \overrightarrow{k_s} + \overrightarrow{k_i}.$$

ПРОСТЕЙШИЙ СЛУЧАЙ ПЕРЕПУТАННОГО СОСТОЯНИЯ ДВУХ ПОДСИСТЕМ A и B

$$\psi \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B,$$

где $\mathcal{H}_A$ и $\mathcal{H}_B$ - гильбертовы пространства, соответствующие подсистемам A и B, называется перепутанным, если его невозможно представить в факторизованном виде:

$$\psi = |\psi A \otimes |\psi B$$

где $|\psi\rangle_A \in \mathcal{H}_A$, $|\psi\rangle_B \in \mathcal{H}_B$.

Понятие перепутанности для смешанных состояний является обобщением такового для чистых состояний. Пусть система находится в смешанном состоянии $\rho \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Состояние ρ называется факторизованным, если

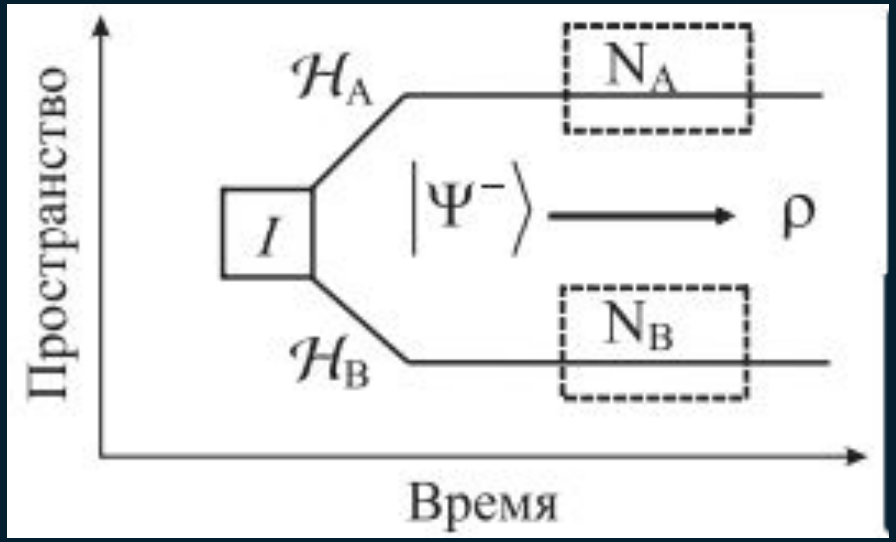
$$\rho = \rho A \otimes \rho B,$$

где $\rho A \in \mathcal{H}_A$, $\rho B \in \mathcal{H}_B$. Состояние ρ называется сепарабельным, если его можно представить в виде выпуклой комбинации факторизованных состояний,

$$\rho_{sep} = \sum_n p_n \rho_n^A \otimes \rho_n^B,$$

где p_n есть вероятность соответствующего факторизованного состояния: $p_n > 0$, $\sum_n p_n = 1$. Если состояние невозможно представить в законченном виде, то оно называется перепутанным.

ВОЗМОЖНОЕ ИЛЛЮСТРАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСТЫХ И СМЕШАННЫХ ПЕРЕПУТАННЫХ СОСТОЯНИЙ



Следуя Д. Бому, перепутанное состояние двух частиц с полуцелым спином (кубитов), которые образуются в результате распада частицы со спином 0. Суммарный спин двух частиц при этом сохраняется и равен 0, поэтому спины кубитов должны быть строго антикоррелированы. Вектор состояния данного синглетного состояния двух кубитов имеет вид

$$\left|\Psi^{-}\right\rangle -= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|1\right\rangle_A \bigotimes \left|0\right\rangle_B - \left|0\right\rangle_A \bigotimes \left|1\right\rangle_B\right),$$

где $|1(0)\rangle_{A\,(B)}$ обозначает спин вверх (вниз) у кубита, относящегося к подсистеме A (B). Состояние представляет пример, в котором усреднение по одной из подсистем оставляет другую в максимально перемешанном состоянии $\left(\left|0\right\rangle\left\langle 0\right| + \left|1\right\rangle\left\langle 1\right|\right)/\sqrt{2}$.

ЧЕТЫРЕ МАКСИМАЛЬНО ПЕРЕПУТАННЫХ СОСТОЯНИЯ БЕЛЛА

$$\left(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle\right)/\sqrt{2} = |\Phi^+\rangle,$$

$$\left(|0\rangle \otimes |0\rangle - |1\rangle \otimes |1\rangle\right)/\sqrt{2} = |\Phi^-\rangle,$$

$$\left(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle\right)/\sqrt{2} = |\Psi^+\rangle,$$

$$\left(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle\right)/\sqrt{2} = |\Psi^-\rangle,$$

При проекции спина на произвольный единичный вектор $\vec{n}$ измеряется наблюдаемая

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — матрицы Паули. Легко проверить, что результаты локальных измерений наблюдаемой $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$ могут принимать только два значения: ± 1 (в соответствии с собственными значениями наблюдаемой). С другой стороны, нетрудно убедиться в том, что, как бы ни были направлены векторы $\vec{n}$ и $\vec{m}$, для среднего значения совместной наблюдаемой в состоянии $|\Psi^-\rangle$, выполняется равенство

$$\langle \Psi^- | (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}_A) \otimes (\vec{m} \cdot \vec{\sigma}_B) | \Psi^- \rangle = -\vec{n} \cdot \vec{m}$$

Из этого следует, что при измерении вдоль одной и той же оси квантово-механическое среднее в синглетном состоянии равно -1, являясь математическим выражением антикорреляции. Как было впервые показано Д. Беллом, квантовомеханическое среднее противоречит результату, выводимому из теории “скрытых параметров”.

В теории скрытых параметров ожидаемые значения произведений $\vec{n} \cdot \vec{\sigma}_A$ и $\vec{m} \cdot \vec{\sigma}_B$ даются усреднением результатов, получаемых локально и независимо друг от друга Алисой и Бобом, по распределению вероятности ρ (λ) некоего скрытого параметра λ,

$$E(\vec{n}, \vec{m}) = \int d\lambda \rho(\lambda) N(\vec{n}, \lambda) M(\vec{m}, \lambda),$$

где N, M = ±1 описывают зависящие от скрытого параметра λ статистики локальных измерений Алисы и Боба соответственно

СПЕЦИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ НЕРАВЕНСТВ БЕЛЛА И КХШХ (CHSH)

Квантовая механика предсказывает следующее значение коррелятора в синглетном состоянии:

$$\langle \Psi^- | (a \otimes c - a \otimes d + b \otimes c + b \otimes d) | \Psi^- \rangle = -2\sqrt{2}$$

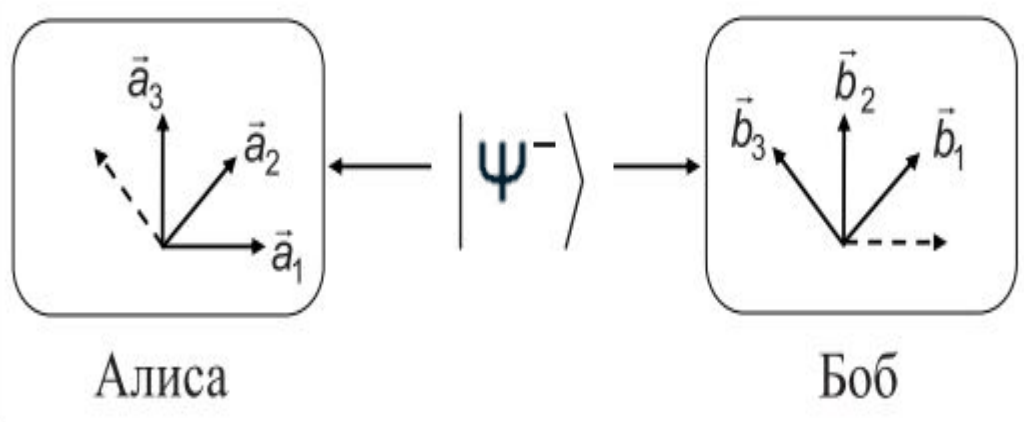
Для вычисления этого же коррелятора в рамках теории скрытых параметров напомним, что в силу принятия значений +1 или −1 наблюдаемыми *a, b, c, d*, то есть их дихотомичности, имеем

$$ac - ad + bc + bd = a(c - d) + b(c + d) = \pm 2 \text{ или } 0.$$

Тогда модуль коррелятора мажорируется неравенством:

$$|S| = |E(\vec{a_1}, \vec{b_1}) - E(\vec{a_1}, \vec{b_3}) + E(\vec{a_3}, \vec{b_1}) + E(\vec{a_3}, \vec{b_3})| \leq 2$$

СХЕМА ПРОТОКОЛА ЭКЕРТА



Чистое состояние такого источника описывается волновой функцией

$$|\Psi\rangle = |00\rangle \otimes |A\rangle + |01\rangle \otimes |B\rangle + |10\rangle \otimes |C\rangle + |11\rangle \otimes |D\rangle$$

где состояния $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ представляют базисные векторы двухчастичной системы и, в то время как состояния $|A\rangle$, $|B\rangle$, $|C\rangle$, $|D\rangle$ — это некие состояния подслушивающей стороны. Единственной возможностью для Евы не быть обнаруженной — это создать источник, генерирующий состояния

$$|\Psi\rangle = (|01\rangle - |10\rangle) \otimes |C\rangle.$$

В любом другом случае состояния кубитов Евы будут перепутаны с состояниями Алисы и Боба, что может быть обнаружено ими при измерениях. Но состояние $|C\rangle$ является полностью декоррелированым по отношению к синглетному состоянию в (1.18). Следовательно, измерение Евой своей частицы не дает ей никакой информации о состоянии кубитов Алисы и Боба.