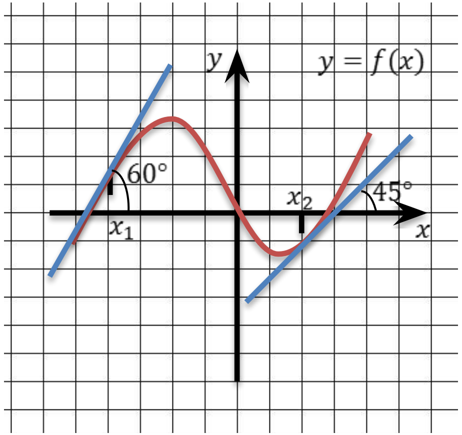
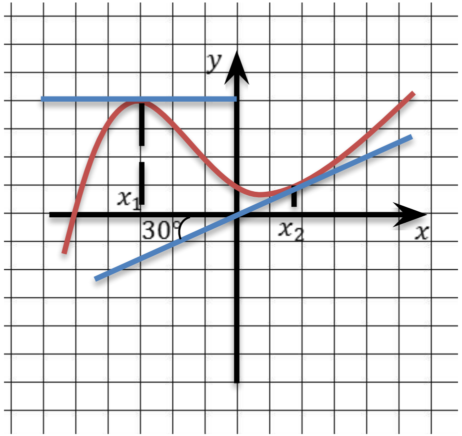
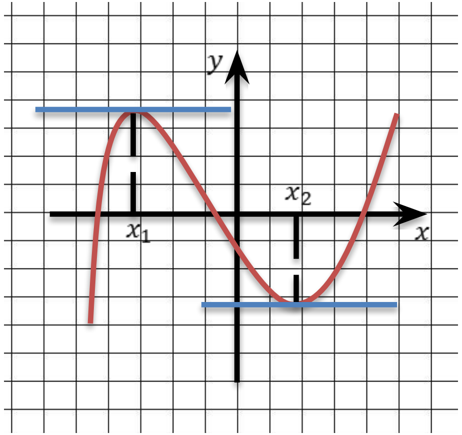
Алгоритм отыскания производной

Упражнение:

- На рисунках изображены графики некоторых функций. Определите значения производных соответствующих функций в точках x_1 и x_2.







$$f'(x_1) = tg\ 60° = \sqrt{3}$$

$$f'(x_2) = tg\ 45° = 1$$

$$f'(x_1) = tg\ 0° = 0$$

$$f'(x_2) = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f'(x_1) = tg\ 0° = 0$$

$$f'(x_2) = tg\ 0° = 0$$

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$:

1. Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.
2. Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример:

- Найти производную функции $y = 7x + 4$ по алгоритму.

Решение:

1. $\boldsymbol{f(x) =}(\boldsymbol{7x + 4})$
2. $\boldsymbol{f(x + \Delta x)} = \mathbf{7}(\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}) + \mathbf{4}$
3. $\Delta y = \qquad - \qquad = \qquad - \qquad = 7x + 7\Delta x + 4 - 7x - 4 =$

   $= 7\Delta x$
4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7\Delta x}{\Delta x} = 7$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 7 = 7$

Ответ: $(7x + 4)' = 7$.

Пример:

- Найти производную функции $y = x^2 + 5x - 3$ в точке $x_0 = -1$ по алгоритму.

Решение:

1. $\boldsymbol{f(x) = (x^2 + 5x - 3\ )}$
2. $\boldsymbol{f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta x) - 3}$
3. $\Delta y = \qquad - \qquad = \qquad - \qquad =$

$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5x + 5\Delta x - 3 - x^2 - 5x + 3 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5\Delta x$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 5\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + 5 + \Delta x)}{\Delta x} = \Delta x + 2x + 5$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2x + 5\ ) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} 2x + \lim\limits_{\Delta x \to 0} 5 = 0 + 2x + 5 = 2x + 5$

$f'(x) = 2x + 5 \Longrightarrow f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 5 = -2 + 5 = 3$

Ответ: 3.

Пример:

- Найти производную функции $y = \frac{x^2}{4} - x$ в точке $x_0 = 2$.

Решение:

1. $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{4} + x}$

2. $\boldsymbol{f(x + \Delta x) = \frac{(x+\Delta x)^2}{4} - (x + \Delta x)}$

3. $\Delta y = \qquad - \qquad = \qquad - \qquad = \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2}{4} -$

$-x - \Delta x + x = \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{4} - \Delta x = \Delta x\left(\frac{2x+\Delta x}{4} - 1\right)$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x\left(\frac{2x+\Delta x}{4}-1\right)}{\Delta x} = \frac{2x+\Delta x}{4} - 1$

5. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{2x+\Delta x}{4} - 1\right) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x+\Delta x}{4} - \lim\limits_{\Delta x\to 0} 1 = \frac{2x}{4} - 1 = \frac{x}{2} - 1$

$f'(x) = \frac{x}{2} - 1$

$f'(2) = \frac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$

Ответ: 0.

Пример:

- Найти производную функции $y = \frac{3}{x^2} - 7.$

Решение:

1. $f(x) = \left(\frac{3}{x^2} - 7\right)$

2. $f(x + \Delta x) = \frac{3}{(x+\Delta x)^2} - 7$

3. $\Delta y = \qquad - \qquad = \qquad - \qquad = \frac{3x^2 - 3\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{x^2(x+\Delta x)^2} =$

$= \frac{-6x\Delta x - 3(\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2} = \frac{\Delta x(-6x - 3\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x(-6x-3\Delta x)}{x^2(x+\Delta x)^2}}{\Delta x} = \frac{-6x - 3\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$

5. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{-6x-3\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-6x-3\Delta x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(x^2(x+\Delta x)^2)} = \frac{-6\lim\limits_{\Delta x\to 0} x - 3\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} x^2 \cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0}(x+\Delta x)^2} = \frac{-6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}$

Ответ: $\left(\frac{3}{x^2} - 7\right)' = -\frac{6}{x^3}.$

Пример:

- Найти производную функции $y = \sqrt{x+1}$.

Решение:

1. $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x+1}}$
2. $\boldsymbol{f(x+\Delta x) = \sqrt{x+\Delta x+1}}$
3. $\Delta y = \quad - \quad = \quad - \quad = \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}} =$

$$= \frac{x+\Delta x+1-x-1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}$$

4. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}}$
5. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} 1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\sqrt{x+\Delta x+1}+\sqrt{x+1}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt{x+\Delta x+1} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

Ответ: $\left(\sqrt{x+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$.