

АЛГЕБРА

ЛОГИКИ



Высказывания



Алгебра логики – наука, изучающая законы и формы мышления; учение о способах рассуждений и доказательств.

Алгебра логики возникла в середине XIX века в трудах английского математика **Джорджа Буля**. Ее создание представляло собой попытку решать традиционные логические задачи алгебраическими методами.

Алгебра в широком смысле этого слова наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться не только над числами, но и над другими математическими объектами.

Примеры алгебр: алгебра натуральных чисел, алгебра рациональных чисел, алгебра многочленов, алгебра векторов, алгебра матриц, алгебра множеств и т.д. Объектами алгебры логики или булевой алгебры являются высказывания.

Высказывание – это любое предложение какого-либо языка, в котором что-либо утверждается или отрицается. Любое высказывание можно определить как истинное или ложное (быть одновременно и тем и другим оно не может).

Пример: Определить значения истинности для следующих высказываний.

Лед – твердое состояние воды.

Ответ: истинное высказывание.

Треугольник – это геометрическая фигура.

Ответ: истинное высказывание.

Буква А – согласная.

Ответ: ложное высказывание.



Высказывания (продолжение)

В естественном языке высказывания выражаются повествовательными предложениями. Восклицательные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

Высказывания бывают общими, частными или единичными. Общее высказывание начинается (или может начать) со слов: **все, всякий, каждый, ни один**. Частное высказывание начинается (или может начать) со слов: **некоторые, большинство** и т.п. Во всех других случаях высказывание является единичным.

Пример.

Определить тип высказывания (общее, частное, единичное).

Все рыбы умеют плавать.

Ответ: общее высказывание

Некоторые медведи - бурые.

Ответ: частное высказывание

Париж – столица Китая.

Ответ: единичное высказывание



Высказывания (продолжение)

Простые высказывания в алгебре логики обозначаются *заглавными латинскими буквами*.

Пример.

A = Число 8 кратно 4.

B = На яблонях растут бананы.

Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному – 0.
Таким образом, A = 1, B = 0.

Буквы, обозначающие высказывания можно рассматривать как имена *логических переменных*. Логические переменные принимают два значения: 0 и 1 (на языке программирования: «ложь» - false, «истина» - true).



Высказывания (продолжение)

Высказывания могут выражаться с помощью математических, физических, химических и прочих знаков. Из двух числовых выражений можно составить высказывания, соединив их знаками равенства или неравенства.

Высказывание называется **простым** (элементарным), если никакая его часть сама не является высказыванием.

Примеры: Идет дождь. Нам живется весело. Число 8 кратно 2.

Выражение, состоящее из нескольких простых высказываний, называется **составным** (сложным). Простые высказывания соединяются с помощью **логических операций** (связок).

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "**не**", "**и**", "**или**", "**если...**", "**то**", "**тогда и только тогда**" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются **логическими связками**.

Примеры: Идет дождь, а у меня нет зонта. Вася летом побывает и на море, и в горах. Число 8 кратно 2 и 4.



Самостоятельная работа №1

Высказывания.

1. Какие из предложений являются высказываниями? Определите их истинность.

- 1) Число 6 – четное.
- 2) Посмотрите на доску.
- 3) Все роботы являются машинами.
- 4) У каждой лошади есть хвост.
- 5) Кто отсутствует?
- 6) $X^2 \geq 0$
- 7) Выразите 1 час 15 минут в минутах.

2. Определите тип высказываний (общее, частное, единичное)

- b) Все ананасы приятны на вкус.
- c) Кошка является домашним животным.
- d) Все лекарства неприятны на вкус.
- e) Многие растения обладают целебными свойствами.
- f) А – первая буква в алфавите.
- g) Любой неразумный человек ходит на руках.
- h) Мой кот страшный забияка.



Логические операции

Логическая операция – способ построения сложного высказывания из простых высказываний, при котором значение истинности сложного высказывания полностью определяется значениями истинности простых высказываний.

Правила выполнения логических операций отражаются в таблицах, которые называются *таблицами истинности*.

Таблица истинности - это табличное представление логической операции, в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных операндов вместе со значением истинности результата операции для каждого из этих сочетаний.



Логическая операция КОНЪЮНКЦИЯ (лат. Conjunctio – связываю):

- В естественном языке соответствует союзу **И**;
- В математической логике обозначение: **&** , \wedge или \cdot ;
- В языках программирования: **AND**;
- Иное название: **логическое умножение**.
- Конъюнкция – двухместная операция; записывается в виде: $A \& B$, $A \wedge B$, $A \cdot B$. **Значение такого выражения будет ЛОЖЬ, если хотя бы значение одного из высказываний ложно.**

Пример.

1. A = На автостоянке стоит «Мерседес»
 B = На автостоянке стоят «Жигули»
 $A \& B$ = На автостоянке стоят «Мерседес» и «Жигули»
2. A = Число 6 делится на 3
 B = Число 6 делится на 2
 $A \& B$ = Число 6 делится на 3 и на 2

Таблица истинности
КОНЪЮНКЦИИ :

A	B	A & B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Логическая операция ДИЗЪЮНКЦИЯ (лат. Disjunctio – различаю):

- В естественном языке соответствует союзу **ИЛИ**;
- В математической логике обозначение: \vee , +;
- В языках программирования: **OR**;
- Иное название: **логическое сложение**.
- Дизъюнкция – двухместная операция; записывается в виде: $A \vee B$. **Значение такого выражения будет ИСТИНА, если хотя бы значение одного из высказываний истинно.**

Пример.

1. A = На автостоянке стоит «Мерседес»
 B = На автостоянке стоят «Жигули»
 $A \vee B$ = На автостоянке стоит «Мерседес» или «Жигули»
2. A = Число 8 делится на 3
 B = Число 8 делится на 2
 $A \vee B$ = Число 8 делится на 3 или на 2

Таблица истинности
ДИЗЪЮНКЦИИ:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Логическая операция ИНВЕРСИЯ (лат. *Inversio* – переворачиваю):

- В естественном языке соответствует частице **НЕ**;
 - В математической логике обозначение: $\neg A$ или \overline{A} ;
 - В языках программирования: **NOT**;
 - Иное название: **логическое отрицание**.
- Инверсия – унарная (одноместная) операция;
записывается в виде: $\neg A$ или \overline{A}

Пример.

1. A = Я знаю китайский язык
 \overline{A} = Я не знаю китайский язык
2. A = Число 8 делится на 2
 \overline{A} = Число 8 не делится на 2

Таблица ИСТИННОСТИ ИНВЕРСИИ:	
A	$\neg A$
0	1
1	0



Логическая операция ИМПЛИКАЦИЯ (лат. *Implicatio* – тесно связываю):

- В естественном языке соответствует обороту **ЕСЛИ ..., ТО ...**;
- В математической логике обозначение: \Rightarrow или \rightarrow ;
- Иное название: **логическое следование**.
- Импликация – двухместная операция; записывается в виде: $A \Rightarrow B$. **Значение такого выражения будет ЛОЖЬ тогда и только тогда, когда условие (первое высказывание) истинно, а следствие (второе высказывание) ложь.**

Пример.

A = Выглядит солнце

B = Станет тепло

$A \Rightarrow B$ = Если на улице солнце, то станет тепло

C = Станет холодно

$A \Rightarrow C$ = Если на улице солнце, то станет холодно

В обычной речи связка “если ..., то” описывает причинно-следственную связь между высказываниями. Но в логических операциях смысл высказываний не учитывается. Рассматривается только их истинность или ложность. Поэтому не надо смущаться “бессмысленностью” импликаций, образованных высказываниями, совершенно не связанными по содержанию. Например, такими:
“если президент США — демократ, то в Африке водятся жирафы”,
“если арбуз — ягода, то в бензоколонке есть бензин”.

Таблица
ИСТИННОСТИ
ИМПЛИКАЦИИ:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Логическая операция ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

(лат. *Aequivalens* – равноценное):

- В естественном языке соответствует оборотам **ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА** и **В ТОМ И ТОЛЬКО В ТОМ СЛУЧАЕ**;
- В математической логике обозначение: \Leftrightarrow или \leftrightarrow или \equiv ;
- Иное название: **равнозначность**.
- Эквивалентность – двухместная операция; записывается в виде: $A \Leftrightarrow B$. **Значение такого выражения будет ИСТИНА тогда и только тогда, когда оба простых высказывания одновременно истинны или ложны.**
- *Пример.*
 - A = Людоед голоден
 - B = Он давно не ел
 - $A \Leftrightarrow B$ = Людоед голоден тогда и только тогда, когда он давно не ел.

Таблица истинности
ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Логические операции имеют следующий приоритет:

Порядок выполнения логических операций задается круглыми скобками. Но для уменьшения числа скобок договорились считать, что сначала выполняется операция отрицания (“не”), затем конъюнкция (“и”), после конъюнкции — дизъюнкция (“или”) и в последнюю очередь — импликация (“следование”) или эквивалентность (“равнозначность”).

