Случайным называют событие, которое может произойти или не произойти (заранее предсказать невозможно) во время наблюдения или испытания.

Вероятностью события A называется отношение числа благоприятных для этого события исходов к общему числу равновозможных исходов. Пишем: $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Алгоритм нахождения вероятности случайного события

Для нахождения вероятности случайного события А при проведении некоторого испытания следует найти:

1) число N всех возможных исходов данного испытания;

2) количество $N(A)$ тех исходов, в которых наступает событие A;

3) частное $\frac{N(A)}{N}$; оно и будет равно вероятности события A.

Заметим, что всегда выполняется двойное неравенство $0 \leqslant m \leqslant n$, поэтому вероятность любого события A лежит на отрезке $[0; 1]$, то есть $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

1. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованные. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.

1. Из 1000 собранных на заводе телевизоров 5 штук бракованные. Эксперт проверяет один наугад выбранный телевизор из этой 1000. Найдите вероятность того, что проверяемый телевизор окажется бракованным.

Решение.

При выборе телевизора наугад возможны 1000 исходов, событию A «выбранный телевизор бракованный» благоприятны 5 исходов. По определению вероятности

$$P(A) = \frac{5}{1000} = 0{,}005.$$

Ответ: 0,005.

2. В урне 9 красных, 6 жёлтых и 5 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется жёлтым?

Решение.

Общее число исходов равно числу шаров: $9 + 6 + 5 = 20$. Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 6. Искомая вероятность равна $\frac{6}{20} = 0{,}3$.

Ответ: 0,3.

События A и B называются **противоположными** друг к другу, если любой исход благоприятен ровно для одного из них. Например, в рассмотренной задаче №1 событие «выбранный телевизор рабочий» является противоположным событию «выбранный телевизор бракованный».

Событие, противоположное событию A, обозначают $\overline{A}$. Из определения противоположных событий следует $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, значит, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3. Из 30 билетов, предлагаемых на экзамене, школьник может ответить только на 27. Какова вероятность того, что школьник не сможет ответить наугад выбранный билет?

1-й способ.

Обозначим через A событие «школьник может ответить билет» через A. Тогда $P(A) = \frac{27}{30} = 0{,}9$. Вероятность противоположного события равна $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

3. Из 30 билетов, предлагаемых на экзамене, школьник может ответить только на 27. Какова вероятность того, что школьник не сможет ответить наугад выбранный билет?

2-й способ.

Так как школьник может ответить на 27 билетов, то на 3 билета он ответить не может. Вероятность получить один из этих билетов равна $\frac{3}{30} = 0{,}1.$

Ответ: 0,1.

Два события A и B называют **несовместными**, если отсутствуют исходы, благоприятствующие одновременно как событию A, так и событию B. Например, при бросании кубика события «выпало число 3» и «выпало чётное число» несовместны. При этом события «выпало число больше 3» и «выпало чётное число» совместны.

Пусть событие C означает, что произошло хотя бы одно из событий A и B. Тогда C называют **объединением событий** A и B, пишут $C = A \cup B$.

Если события A и B несовместны, то вероятность их объединения равна сумме вероятностей событий A и B: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4. Имеются 20 карточек, на которых записаны числа от 1 до 20. Из них наугад выбирают одну карточку. Какова вероятность того, что на выбранной карточке будет число 20 или любое нечётное число?

Решение.

Обозначим через A событие «выбрана карточка с числом 20», через B — событие «выбрана карточка с нечётным числом». События A и B несовместны. Вероятность события A равна $\frac{1}{20}$. Так как карточек с нечётными числами ровно половина от общего числа карточек, то $P(B) = \frac{1}{2}$. Поэтому

$$P(A \cup B) = \frac{1}{20} + \frac{1}{2} = 0{,}55.$$

Ответ: 0,55.

5. На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 4 с мясом, 2 с картошкой и 9 с капустой. Какова вероятность того, что случайно выбранный пирожок будет с мясом или картошкой?

Решение.

События выбора пирожка с мясом и с картошкой несовместны. Всего пирожков $4 + 2 + 9 = 15$. Вероятность выбора пирожка с мясом равна $\frac{4}{15}$, вероятность выбора пирожка с картошкой равна $\frac{2}{15}$. Вероятность выбора пирожка с мясом или картошкой равна $\frac{4}{15} + \frac{2}{15} = \frac{6}{15} = 0{,}4$.

Ответ: 0,4.

Два события A и B называют **независимыми**, если вероятность каждого из них не зависит от появления или непоявления другого события.

Например, выполним последовательно два подбрасывания монеты. Тогда события «при первом подбрасывании выпала решка» и «при втором подбрасывании выпал орёл» являются независимыми: вероятность каждого из них равна $\frac{1}{2}$ независимо от того, что произошло при другом подбрасывании.

Рассмотрим другой пример. Пусть в урне находятся два чёрных и два белых шара. Сперва из урны наугад извлекают один шар. Затем из той же урны наугад извлекают ещё один шар. Обозначим через A событие «первый извлечённый шар белый», а через B — «второй извлечённый шар чёрный». Тогда события A и B являются зависимыми. Действительно, если событие A произошло, то в урне из трёх оставшихся шаров два чёрных и $P(B) = \frac{2}{3}$. Если же событие A не произошло, то в урне из трёх оставшихся шаров один чёрный и $P(B) = \frac{1}{3}$.

Пусть событие C означает, что произошло как событие A, так и B. Тогда C называют **пересечением событий** A и B, пишут $C = A \cap B$.

Если события A и B независимы, то вероятность их пересечения равна произведению вероятностей событий A и B: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Правило умножения

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний А и В, следует перемножить число всех исходов испытания А и число всех исходов испытания В.

6. Монету подбрасывают четыре раза подряд. Какова вероятность того, что все четыре раза выпадет «орёл»?

Решение.

Обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4 вероятности выпадения орла в каждом из четырёх подбрасываний. Эти события независимы и $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{2}$. Поэтому

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625.$$

Ответ: 0,0625.

7. Одновременно бросают два игральных кубика. Найдите вероятность P того, что на одном кубике выпадет 5 очков, а на другом — чётное число очков. В ответ запишите величину $\frac{1}{P}$.

7. Одновременно бросают два игральных кубика. Найдите вероятность P того, что на одном кубике выпадет 5 очков, а на другом — чётное число очков. В ответ запишите величину $\frac{1}{P}$.

Решение.

Обозначим события: A — «на первом кубике выпало 5 очков», B — «на втором кубике выпало чётное число очков», C — «на втором кубике выпало 5 очков», D — «на первом кубике выпало чётное число очков». Тогда данное в условии событие происходит либо при появлении события $A \cap B$, либо события $C \cap D$. События $A \cap B$ и $C \cap D$ несовместны (так как события A и D не могут произойти одновременно). Поэтому искомая вероятность равна $P = P(A \cap B) + P(C \cap D)$. События A и B независимы, события C и D также независимы. Отсюда $P = P(A \cap B) + P(C \cap D) = P(A)P(B) + P(C)P(D) =$
$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. В ответ пишем $\frac{1}{P} = 6$.

Ответ: 6.

Вариант 1

1. Из 2000 собранных на заводе вентиляторов 4 штуки бракованные. Эксперт проверяет один наугад выбранный вентилятор из этих 2000. Найдите вероятность того, что проверяемый вентилятор окажется бракованным.

2. В стандартном наборе домино 28 костей, каждая разделена на 2 части, в которых может быть от нуля до шести точек (все кости в наборе разные). Найдите вероятность того, что наугад выбранная кость будет содержать 6 точек хотя бы в одной из частей.

3. В урне 10 красных, 7 жёлтых и 8 зелёных шаров. Из урны наугад достают один шар. Какова вероятность того, что все 10 красных шаров остались в урне?

4. Из стандартной колоды в 36 карт выкинули два туза и все дамы. Из оставшихся 30 карт наугад вытягивают одну карту. Какова вероятность того, что эта карта окажется королём или тузом?

5. Монету подбрасывают три раза подряд. Найдите вероятность того, что при этих подбрасываниях «орёл» не появится ни разу.

6. Одновременно бросают два игральных кубика. Найдите вероятность P того, что «шестёрка» выпадет ровно на одном из этих кубиков. В ответ запишите величину $\frac{1}{P}$.

B10. Теория вероятностей

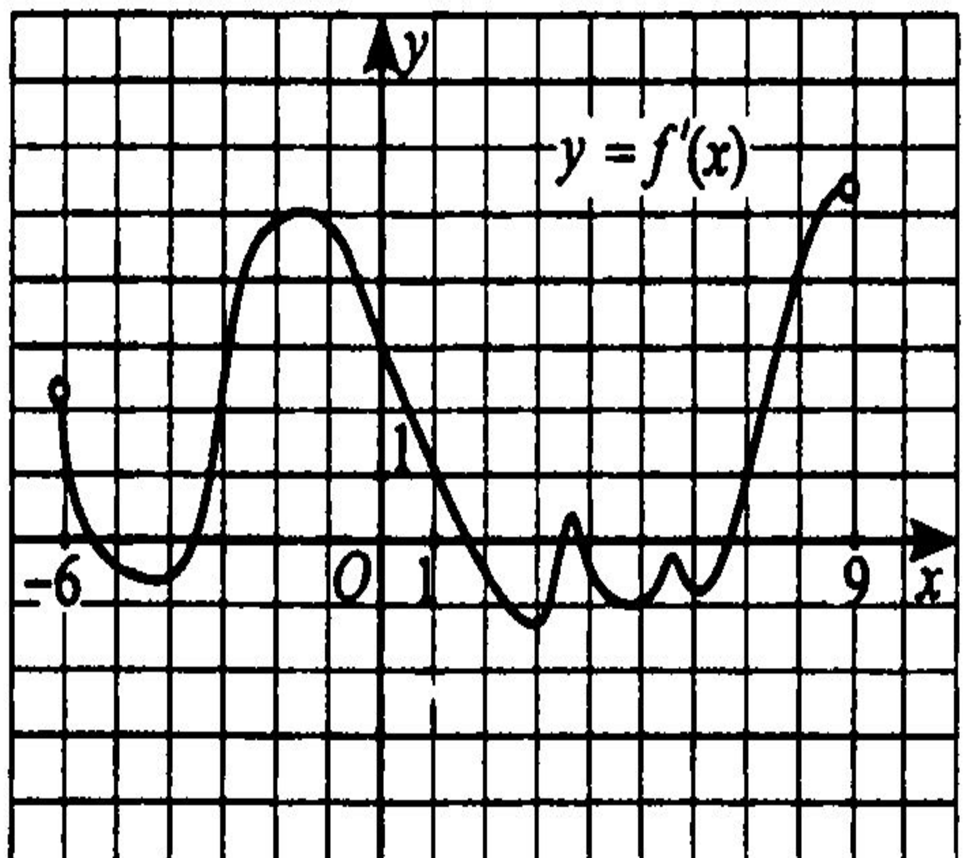
	1	2	3	4	5	6
Вар. 1	0,002	0,25	0,6	0,2	0,125	3,6

Вариант 1

1. Найдите значение выражения $6^{\sqrt{6}+1} \cdot 6^{2-\sqrt{6}}$.

2. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 13, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

3. На рисунке 99 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-5; 8]$.



4. Среди изготовленных на заводе 1000 деталей 6 деталей бракованные. Эксперт проверяет одну наугад выбранную деталь. Какова вероятность того, что она будет без брака?

5. Найдите точку максимума функции

$$y = (5x^2 - 12x + 12)e^{x+12}.$$

6. Первый рабочий обрабатывает 600 деталей на 10 минут быстрее, чем второй рабочий. Сколько деталей в минуту обрабатывает второй рабочий, если первый обрабатывает в минуту на 10 деталей больше?

7. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = 20t - 5t^2$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 7,2 метров.

Ответы к заданиям тренировочных тестов

	1	2	3	4	5	6	7
Вар. 1	216	3,25	5	0,994	0	20	3,2