

Здравствуйте!

Лекция №13

Сходимость несобственных интегралов первого рода от функций произвольного знака.

Признак Больцано–Коши

Для того, чтобы интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходиллся необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_0 \quad \forall A'' > A' > A_0 \quad \left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

Снова рассмотрим функцию $F(A) = \int_a^A f(x)dx$. По признаку

Больцано–Коши, для существования конечного предела $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_0 \forall A'' > A' > A_0 |F(A'') - F(A')| < \varepsilon.$$

Но в нашем случае

$$F(A'') - F(A') = \int_a^{A''} f(x)dx - \int_a^{A'} f(x)dx = \int_{A'}^{A''} f(x)dx$$

и поэтому признак Больцано–Коши принимает форму, указанную в формулировке теоремы.

Следствие. Если сходится $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$, то сходится и $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

Доказательство.

По признаку Больцано–Коши

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx \text{ сходится} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A_0 \forall A'' > A' > A_0 \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx < \varepsilon.$$

Но тогда $\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx < \varepsilon$ и мы получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A_0 \forall A'' > A' > A_0 \left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

откуда, по тому же самому признаку Больцано–Коши следует, что

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \text{ сходится.}$$

Определение. Если $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ называется **абсолютно сходящимся** (или: интеграл **сходится абсолютно**). Если же $\int_a^{\infty} f(x) dx$ сходится, но $\int_a^{\infty} |f(x)| dx = +\infty$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ называется **неабсолютно сходящимся** (или: интеграл **сходится не абсолютно**).

Вторая теорема о среднем. Пусть

1. функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$;

2. функция $g(x)$ монотонна и ограничена на этом отрезке.

Тогда существует точка $c \in [a, b]$, такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

Доказывать эту теорему мы не будем.

Признак Дирихле.

Пусть

$$1. \exists K < +\infty \quad \forall A > a \quad \left| \int_a^A f(x) dx \right| < K;$$

2. при $x \rightarrow +\infty$ функция $g(x)$ монотонно убывает до нуля (запись: $g(x) \downarrow 0$).

Тогда $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство.

1. Из первого ограничения теоремы $\forall A', A'' > a$ имеем

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| = \left| \int_a^{A''} f(x) dx - \int_a^{A'} f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^{A''} f(x) dx \right| + \left| \int_a^{A'} f(x) dx \right| \leq 2K.$$

2. Из второго ограничения теоремы имеем

$$g(x) \downarrow 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A_0 \forall x > A_0 \quad 0 \leq g(x) < \varepsilon$$

3. Возьмем любые $A'' > A' > A_0$. Тогда, используя вторую теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x) dx \right| &= \left| g(A') \int_{A'}^c f(x) dx + g(A'') \int_c^{A''} f(x) dx \right| \leq \\ &\leq |g(A')| \left| \int_{A'}^c f(x) dx \right| + |g(A'')| \left| \int_c^{A''} f(x) dx \right| \leq \varepsilon \cdot 2K + \varepsilon \cdot 2K = \varepsilon \cdot 4K. \end{aligned}$$

Так как ε сколь угодно мало, то, по признаку Больцано–Коши,

$\int_a^{\infty} f(x)g(x) dx$ сходится.

Следствие. Если $g(x) \downarrow 0$, то сходятся следующие интегралы:

$$\int_a^{\infty} g(x) \sin \omega x dx \text{ (при любых значениях } \omega) \text{ и } \int_a^{\infty} g(x) \cos \omega x dx \text{ (при } \omega \neq 0)$$

Доказательство.

Пусть $f(x) = \sin \omega x$ или $f(x) = \cos \omega x$. Тогда имеем

$$\left| \int_a^A \sin \omega x dx \right| = \left| \frac{\cos \omega a - \cos \omega A}{\omega} \right| \leq \frac{|\cos \omega a| + |\cos \omega A|}{|\omega|} \leq \frac{2}{|\omega|} < +\infty,$$

$$\left| \int_a^A \cos \omega x dx \right| = \left| \frac{\sin \omega A - \sin \omega a}{\omega} \right| \leq \frac{|\sin \omega A| + |\sin \omega a|}{|\omega|} \leq \frac{2}{|\omega|} < +\infty,$$

если $\omega \neq 0$. Поэтому, по признаку Дирихле, при $\omega \neq 0$ интегралы

$$\int_a^{\infty} g(x) \cos \omega x dx \text{ и } \int_a^{\infty} g(x) \sin \omega x dx \text{ сходятся. Последний интеграл}$$

сходится и при $\omega = 0$ (он просто равен нулю).

Пример неабсолютно сходящегося интеграла.

Таким интегралом является $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Так как при $x \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{x} \downarrow 0$, то этот интеграл сходится по признаку Дирихле.

Рассмотрим теперь $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$. Из достаточно очевидного неравенства

$$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

получаем

$$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2} \left(\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} - \int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx \right) = +\infty,$$

так как $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$ (см. практический признак сходимости) и

$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ сходится по тому же признаку Дирихле. Поэтому

$\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$ и $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится неабсолютно.

Признак Абеля.

Пусть

а) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a, +\infty)$;

б) интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится (не обязательно абсолютно!);

в) функция $g(x)$ монотонна и ограничена.

Тогда интеграл $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство.

Имеем

1. $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A_0 \forall A'' > A' > A_0 \left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon;$

2. функция $g(x)$ ограничена $\Rightarrow \exists K < +\infty \forall x > a |g(x)| \leq K.$

3. В силу монотонности функции $g(x)$ можно снова воспользоваться второй теоремой о среднем. Получаем, что для любых $A'' > A' > A_0$

$$\begin{aligned} \left| \int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx \right| &= \left| g(A') \int_{A'}^c f(x)dx + g(A'') \int_c^{A''} f(x)dx \right| \leq \\ &\leq |g(A')| \left| \int_{A'}^c f(x)dx \right| + |g(A'')| \left| \int_c^{A''} f(x)dx \right| \leq K \cdot \varepsilon + K \cdot \varepsilon = 2K\varepsilon, \end{aligned}$$

и, по признаку Больцано–Коши, $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Несобственные интегралы второго рода

Итак, в несобственных интегралах первого рода снимается ограничение конечности промежутка интегрирования. В несобственных интегралах второго рода снимается ограничение ограниченности подынтегральной функции.

Будем называть c **особой точкой** функции $f(x)$ если $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$.

А теперь рассмотрим определение несобственных интегралов второго рода. Пусть речь идет об интеграле $\int_a^b f(x)dx$, но b является **особой точкой** функции $f(x)$. Как поступить в этом случае?

Основная идея заключается в том, чтобы немного отступить от особой точки. Поэтому рассмотрим отрезок $[a, b - \eta]$, где $0 < \eta < b - a$. Тогда на этом отрезке особых точек уже не будет. Будем считать, что для этих значений η существует интеграл $\int_a^{b-\eta} f(x)dx$. Тогда

$\int_a^b f(x)dx$ естественно определить так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_a^{b-\eta} f(x)dx,$$

который и называется несобственным интегралом второго рода. Если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$

сходится (или: интеграл **существует**); если этот предел равен бесконечности или вообще не существует, то говорят, что интеграл

$\int_a^b f(x)dx$ **расходится** (или: интеграл **не существует**).

Аналогично, если особой точкой является левый конец промежутка интегрирования, то $\int_a^b f(x)dx$ определяется так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{a+\eta}^b f(x)dx.$$

Наконец, если особая точка c лежит внутри промежутка интегрирования, то есть $a < c < b$, то $\int_a^b f(x)dx$ определяется так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta_1 \rightarrow +0} \int_a^{c-\eta_1} f(x)dx + \lim_{\eta_2 \rightarrow +0} \int_{c+\eta_2}^b f(x)dx.$$

Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, то в этом случае

$$\int_a^b f(x)dx = (F(c-0) - F(a)) + (F(b) - F(c+0)).$$