Здравствуйте!

Лекция №13

Сходимость несобственных интегралов первого рода от функций произвольного знака.

Признак Больцано–Коши

Для того, чтобы интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходился необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A_0 \;\; \forall A'' > A' > A_0 \quad \left| \int_{A'}^{A''} f(x)dx \right| < \varepsilon .$$

Доказательство.

Снова рассмотрим функцию $F(A)=\int\limits_a^A f(x)dx$. По признаку Больцано–Коши, для существования конечного предела $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\forall \varepsilon>0 \;\; \exists A_0 \;\; \forall A''>A'>A_0 \;\; \left|F(A'')-F(A')\right|<\varepsilon .$$

Но в нашем случае

$$F(A'')-F(A')=\int\limits_a^{A''} f(x)dx-\int\limits_a^{A'} f(x)dx=\int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx$$

и поэтому признак Больцано–Коши принимает форму, указанную в формулировке теоремы.

Следствие. Если сходится $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$**, то сходится и** $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$.

Доказательство.

По признаку Больцано–Коши

$$\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx \text{ сходится} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A_0 \;\; \forall A'' > A' > A_0 \;\; \int_{A'}^{A''} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Но тогда $\left| \int_{A'}^{A''} f(x)\,dx \right| < \int_{A'}^{A''} |f(x)|\,dx < \varepsilon$ и мы получаем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists A_0 \;\; \forall A'' > A' > A_0 \;\; \left| \int_{A'}^{A''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon,$$

откуда, по тому же самому признаку Больцано–Коши следует, что $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ сходится.

Определение. Если $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся (**или: интеграл **сходится абсолютно).** Если же $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится, но $\int_a^{\infty} |f(x)|\,dx = +\infty$, то интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ называется **неабсолютно сходящимся (**или: интеграл **сходится не абсолютно).**

Вторая теорема о среднем. Пусть

1. функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$;

2. функция $g(x)$ монотонна и ограничена на этом отрезке.

Тогда существует точка $c\in[a,b]$, такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

Доказывать эту теорему мы не будем.

Признак Дирихле.

Пусть

1. $\exists K < +\infty \ \forall A > a \ \left|\int_a^A f(x)dx\right| < K$;

2. при $x \to +\infty$ функция $g(x)$ монотонно убывает до нуля (запись: $g(x) \downarrow 0$).

Тогда $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство.

1. Из первого ограничения теоремы $\forall A', A'' > a$ имеем

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right| = \left|\int_{a}^{A''} f(x)dx - \int_{a}^{A'} f(x)dx\right| \le \left|\int_{a}^{A''} f(x)dx\right| + \left|\int_{a}^{A'} f(x)dx\right| \le 2K.$$

2. Из второго ограничения теоремы имеем

$$g(x) \downarrow 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists A_0 \ \forall x > A_0 \ 0 \le g(x) < \varepsilon$$

3. Возьмем любые $A'' > A' > A_0$. Тогда, используя вторую теорему о среднем, получим

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right| = \left|g(A')\int_{A'}^{c} f(x)dx + g(A'')\int_{c}^{A''} f(x)dx\right| \le$$

$$\le |g(A')| \left|\int_{A'}^{c} f(x)dx\right| + |g(A'')| \left|\int_{c}^{A''} f(x)dx\right| \le \varepsilon \cdot 2K + \varepsilon \cdot 2K = \varepsilon \cdot 4K.$$

Так как ε сколь угодно мало, то, по признаку Больцано–Коши, $\int_{a}^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Следствие. Если $g(x)\downarrow 0$, то сходятся следующие интегралы: $\int\limits_a^\infty g(x)\sin\omega x dx$ (при любых значениях ω) и $\int\limits_a^\infty g(x)\cos\omega x dx$ (при $\omega \neq 0$)

Доказательство.

Пусть $f(x)=\sin\omega x$ или $f(x)=\cos\omega x$. Тогда имеем

$$\left|\int\limits_a^A \sin\omega x dx\right| = \left|\frac{\cos\omega a - \cos\omega A}{\omega}\right| \le \frac{|\cos\omega a| + |\cos\omega A|}{|\omega|} \le \frac{2}{|\omega|} < +\infty,$$

$$\left|\int\limits_a^A \cos\omega x dx\right| = \left|\frac{\sin\omega A - \sin\omega a}{\omega}\right| \le \frac{|\sin\omega A| + |\sin\omega a|}{|\omega|} \le \frac{2}{|\omega|} < +\infty,$$

если $\omega \neq 0$. Поэтому, по признаку Дирихле, при $\omega \neq 0$ интегралы $\int\limits_a^\infty g(x)\cos\omega x dx$ и $\int\limits_a^\infty g(x)\sin\omega x dx$ сходятся. Последний интеграл сходится и при $\omega = 0$ (он просто равен нулю).

Пример неабсолютно сходящегося интеграла.

Таким интегралом является $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Так как при $x \to +\infty$ $\frac{1}{x} \downarrow 0$, то этот интеграл сходится по признаку Дирихле.

Рассмотрим теперь $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$. Из достаточно очевидного неравенства

$$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

получаем

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2} \left(\int_1^\infty \frac{dx}{x} - \int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x} dx \right) = +\infty,$$

так как $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = +\infty$ (см. практический признак сходимости) и

$\int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ сходится по тому же признаку Дирихле. Поэтому $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty$ и $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится неабсолютно.

Признак Абеля.

Пусть

а) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a, +\infty)$;

б) интеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$ сходится (не обязательно абсолютно!);

в) функция $g(x)$ монотонна и ограничена.

Тогда интеграл $\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Доказательство.

Имеем

1. $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists A_0 \ \forall A'' > A' > A_0 \ \left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx\right| < \varepsilon$;

2. функция $g(x)$ ограничена $\Rightarrow \exists K < +\infty \ \forall x > a \ |g(x)| \le K$.

3. В силу монотонности функции $g(x)$ можно снова воспользоваться второй теоремой о среднем. Получаем, что для любых $A'' > A' > A_0$

$$\left|\int\limits_{A'}^{A''} f(x)g(x)dx\right| = \left|g(A')\int\limits_{A'}^{c} f(x)dx + g(A'')\int\limits_{c}^{A''} f(x)dx\right| \le$$

$$\le |g(A')|\left|\int\limits_{A'}^{c} f(x)dx\right| + |g(A'')|\left|\int\limits_{c}^{A''} f(x)dx\right| \le K\cdot\varepsilon + K\cdot\varepsilon = 2K\varepsilon,$$

и, по признаку Больцано–Коши, $\int\limits_a^\infty f(x)g(x)dx$ сходится.

Несобственные интегралы второго рода

Итак, в несобственных интегралах первого рода снимается ограничение конечности промежутка интегрирования. В несобственных интегралах второго рода снимается ограничение ограниченности подынтегральной функции.

Будем называть c **особой точкой** функции $f(x)$ если $\lim\limits_{x\to c}|f(x)|=+\infty$.

А теперь рассмотрим определение несобственных интегралов второго рода. Пусть речь идет об интеграле $\int\limits_a^b f(x)dx$, **но *b* является особой точкой** функции $f(x)$. Как поступить в этом случае?

Основная идея заключается в том, чтобы немного отступить от особой точки. Поэтому рассмотрим отрезок $[a, b-\eta]$, где $0 < \eta < b-a$. Тогда на этом отрезке особых точек уже не будет. Будем считать, что для этих значений η существует интеграл $\int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ естественно определить так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \to +0} \int\limits_a^{b-\eta} f(x)dx,$$

который и называется несобственным интегралом второго рода. Если этот предел существует и конечен, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ **сходится** (или: интеграл **существует**); если этот предел равен бесконечности или вообще не существует, то говорят, что интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ **расходится** (или: интеграл **не существует**).

Аналогично, если особой точкой является левый конец промежутка интегрирования, то $\int_a^b f(x)dx$ определяется так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta\to+0}\int_{a+\eta}^b f(x)dx.$$

Наконец, если особая точка c лежит внутри промежутка интегрирования, то есть $a<c<b$, то $\int_a^b f(x)dx$ определяется так:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta_1\to+0}\int_a^{c-\eta_1} f(x)dx + \lim_{\eta_2\to+0}\int_{c+\eta_2}^b f(x)dx.$$

Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, то в этом случае

$$\int_a^b f(x)dx = \big(F(c-0)-F(a)\big)+\big(F(b)-F(c+0)\big).$$