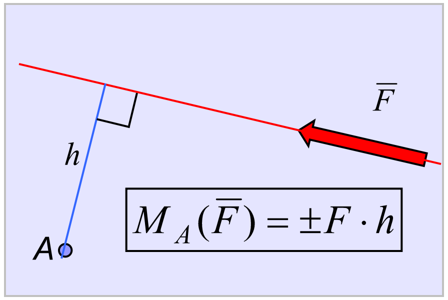
Лекция 3

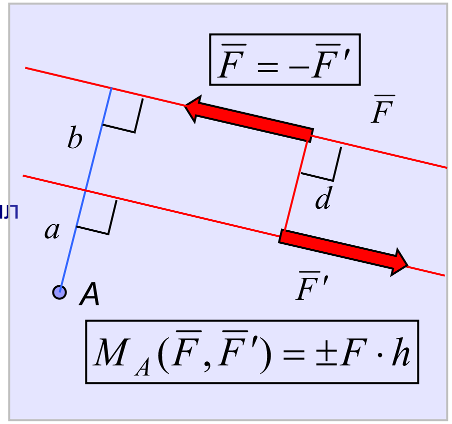
1. Момент силы относительно точки на плоскости.
2. Пара сил. Момент пары сил.



- **Момент силы относительно точки на плоскости** – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы происходит против часовой стрелки,
 и со знаком – (минус) в противном случае.
 Плечо силы – длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.

- **Пара сил** – совокупность двух параллельных друг другу сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны. Пара сил более не может быть упрощена (не может быть заменена одной силой) и представляет собой новую силовую характеристику механического взаимодействия.
- **Момент пары сил на плоскости** (теорема о моменте пары сил) – не зависит от выбора центра приведения (полюса) и равен произведению модуля любой из сил пары на плечо пары, взятым со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием пары сил происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

 Плечо пары сил – длина перпендикуляра, опущенного из любой точки на линии действия одной из сил пары на линию действия другой силы этой пары.



В независимости момента пары от выбора полюса можно убедиться вычислением суммы моментов от каждой из сил относительно любого центра.

$$M_A(\overline{F}, \overline{F}') = F \cdot (a+b) - F'a = Fb = Fd$$

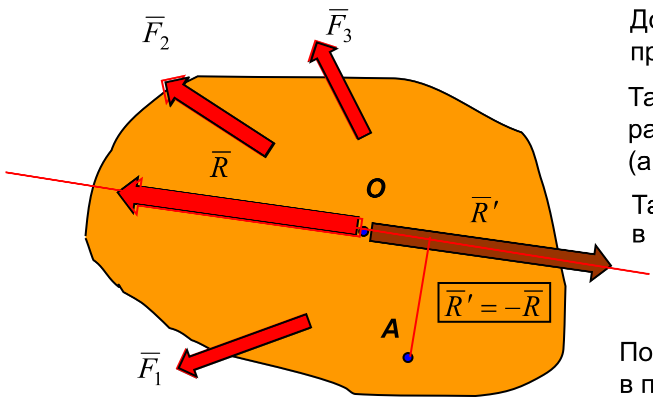
- **Теоремы о парах:** (Теоремы приводятся без доказательств. Подробные доказательства с графической анимацией см. демонстрационную программу автора по теории пар “Теория пар” на сайте МИИТа. Посмотреть…)
- **О переносе пары сил в плоскости ее действия** – Пару сил можно перенести в любое место в плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Об эквивалентности пар сил** – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты алгебраически равны. Кинематическое состояние тела не изменится.

$$M(\overline{F}_1, \overline{F}_1') = F_1 d_1, \quad M(\overline{F}_2, \overline{F}_2') = F_2 d_2; \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow (\overline{F}_1, \overline{F}_1') \equiv (\overline{F}_2, \overline{F}_2')$$

- **О сложении пар сил на плоскости** – Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Условие равновесия системы пар сил** -

$$M = \sum M_i = 0$$

- **Теорема Вариньона о моменте равнодействующей** – Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно того же центра.



Доказательство: Пусть система сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ … приводится к равнодействующей, приложенной в точке *O*.

Такая система не находится в равновесии ($\boldsymbol{R} \neq 0$). Уравновесим эту систему силой ***R'***, равной равнодействующей ***R***, направленной по линии ее действия в противоположную сторону (аксиома о двух силах).

Таким образом, система исходных сил $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$ … и уравновешивающей силы ***R'*** находится в равновесии и должна удовлетворять уравнениям равновесия, например:

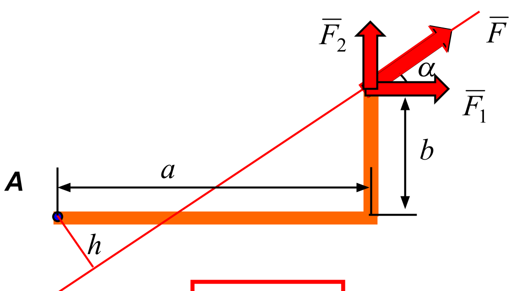
$$\boxed{\sum M_{iA} + M_A(R') = 0}$$

Поскольку сила ***R'***, равна равнодействующей ***R*** и направлена по линии ее действия в противоположную сторону, то $M_A(\boldsymbol{R}') = -M_A(\boldsymbol{R})$. Подстановка этого равенства в уравнение равновесия дает:

$$\boxed{\sum M_{iA} - M_A(R) = 0}$$ или $$\boxed{M_A(R) = \sum M_{iA}}$$

Примеры использования теоремы о моменте равнодействующей:

1. Определение момента силы относительно точки, когда сложно вычислять плечо силы. Например:

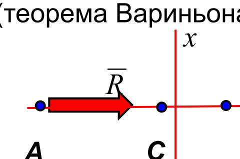


Силу ***F*** разложим на составляющие $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$. Тогда момент силы ***F*** относительно точки *A* можно вычислить как сумму моментов каждой из сил относительно этой точки:

$$M_A(F) = -F_1 b + F_2 a = -(F\cos\alpha)b + (F\sin\alpha)a$$

2. Доказательство необходимости ограничений для II и III форм уравнений равновесия:
Если $\boxed{\sum M_{iA} = 0}$, то система приводится к равнодействующей, при этом она проходит через точку *A*, т.к. ее момент относительное этой точки должен быть равен нулю (теорема Вариньона).

Если при этом $\boxed{\sum M_{iB} = 0}$, то равнодействующая должна также проходить через точку *B*.



Тогда проекция равнодействующей на ось, перпендикулярную *AB*, и момент равнодействующей относительно точки, лежащей на АВ, будут тождественно равны нулю при любом значении равнодействующей.

Лекция 6

1. Момент силы относительно центра в пространстве.
2. Момент силы относительно оси.
3. Момент пары сил в пространстве.

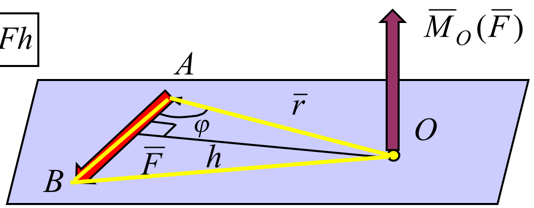
- **Момент силы относительно центра в пространстве – векторная величина, равная векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из центра к точке приложения силы, и вектора силы.**

$$\overline{M}_O(\overline{F}) = \overline{r} \times \overline{F}$$

По определению векторного произведения вектор момента силы направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через центр и силу, в ту сторону, откуда поворот радиуса-вектора к вектору силы на наименьший угол представляется происходящим по часовой стрелке.

Модуль вектора момента силы относительно центра равен:

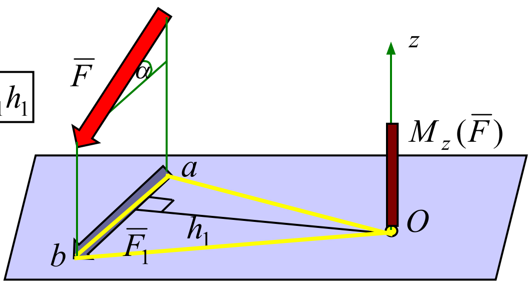
$$M_O(\overline{F}) = rF\sin(\overline{r}, \overline{F}) = Fh$$



Модуль вектора момента силы относительно центра численно равен удвоенной площади треугольника *ΔOAB*.

- **Момент силы относительно оси – алгебраическая величина, равная произведению проекции вектора силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью, взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы представляется при взгляде навстречу оси происходящим против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.**

$$M_z(\overline{F}) = \pm F_1 h_1$$



Момент силы относительно оси численно равен удвоенной площади треугольника *ΔOab*.

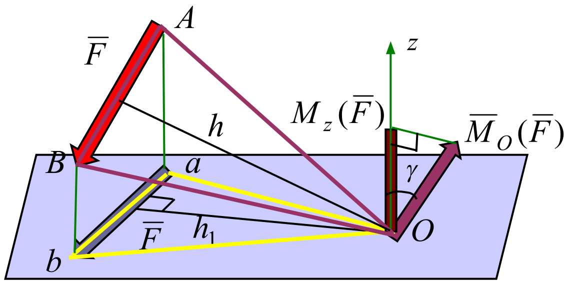
- **Связь момента силы относительно центра и относительно оси.**

Модуль вектора момента силы относительно центра, лежащего на оси z, равен удвоенной площади треугольника *OAB*:

$$M_O(\overline{F}) = Fh = 2S_{OAB}$$

Момент силы относительно оси z, равен удвоенной площади треугольника *Oab*:

$$M_z(\overline{F}) = F_1 h_1 = 2S_{Oab}$$



Треугольник *Oab* получен проекцией треугольника *OAB* на плоскость, перпендикулярную оси z, и его площадь связана с площадью треугольника *OAB* соотношением:

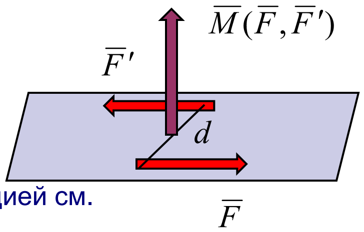
$$S_{Oab} = S_{OAB}\cos\gamma$$

, где γ - двугранный угол между плоскостями треугольников.

Поскольку вектор момента силы относительно точки перпендикулярен плоскости треугольника *OAB,* то угол между вектором и осью равен углу γ.

Таким образом, **момент силы относительно оси есть проекция вектора момента силы относительно центра на эту ось**:

$$M_z(\overline{F}) = M_0(\overline{F})\cos\gamma$$



- **Момент пары сил в пространстве –** вектор, перпендикулярный плоскости действия пары, направленный в ту сторону, откуда вращение плоскости под действием пары представляется происходящим против часовой стрелки.
  Модуль вектора момента пары равен произведению одной из сил пары на плечо пары: $\boxed{M = Fd = F'd}$
- **Теоремы о парах:** (Теоремы приводятся без доказательств. Подробные доказательства с графической анимацией см. демонстрационную программу автора по теории пар "Теория пар" на сайте МИИТа. Посмотреть…)
- **О переносе пары сил в плоскость, параллельную плоскости ее действия** – Пару сил можно перенести в любую плоскость, параллельную плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Об эквивалентности пар сил** – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты геометрически (векторно) равны. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **О сложении пар сил на плоскости** – Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен геометрической (векторной) сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.
- **Условие равновесия системы пар сил** -

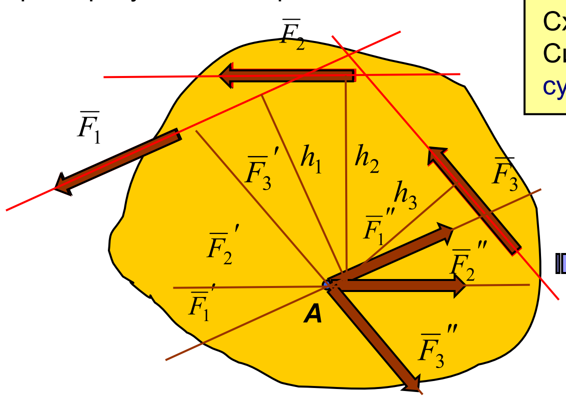
$$\boxed{\overline{M} = \sum \overline{M}_i = 0}$$

Далее будем по-прежнему придерживаться общего плана исследования системы сил, последовательно решая три вопроса :

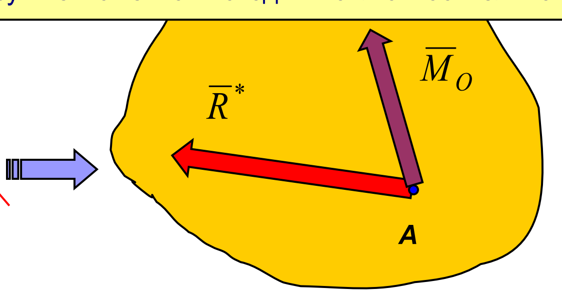
1. Как упростить систему?
2. Каков простейший вид системы?
3. Каковы условия равновесия системы?

- **Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру –** выбираем произвольную точку на плоскости и каждую из сил переносим по методу Пуансо в эту точку. Вместо исходной произвольной системы получим сходящуюся систему сил и систему пар.

В отличие от ранее рассмотренной плоской произвольной системы сил теперь при использовании метода Пуансо присоединенные пары сил характеризуются векторами.



Сходящаяся система сил приводится к одной
Система пар приводится к одной паре (теорем
сумме моментов исходных сил относительно



В общем случае произвольная система сил приводится к одной силе, называемой главным вектором и к паре с моментом, равным главному моменту всех сил системы относительно центра приведения:

$\boxed{\overline{R}^* = \sum \overline{F}_i}$ **- главный вектор,**

$\boxed{\overline{M} = \overline{M}_A = \sum \overline{M}_{iA}}$ **- главный момент.**