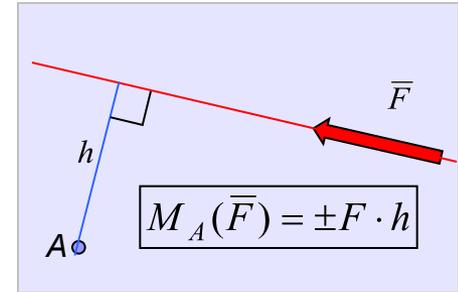


Лекция 3

1. Момент силы относительно точки на плоскости.
2. Пара сил. Момент пары сил.

Момент силы относительно точки на плоскости – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

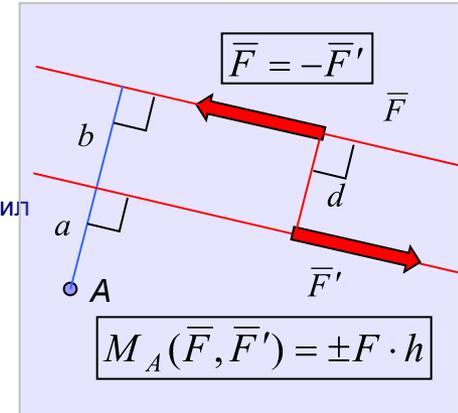
Плечо силы – длина перпендикуляра, опущенного из точки на линию действия силы.



Пара сил – совокупность двух параллельных друг другу сил, равных по величине и направленных в противоположные стороны. Пара сил более не может быть упрощена (не может быть заменена одной силой) и представляет собой новую силовую характеристику механического взаимодействия.

Момент пары сил на плоскости (теорема о моменте пары сил) – не зависит от выбора центра приведения (полюса) и равен произведению модуля любой из сил пары на плечо пары, взятым со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием пары сил происходит против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

Плечо пары сил – длина перпендикуляра, опущенного из любой точки на линии действия одной из сил пары на линию действия другой силы этой пары.



В независимости момента пары от выбора полюса можно убедиться вычислением суммы моментов от каждой из сил относительно любого центра.

$$M_A(\bar{F}, \bar{F}') = F \cdot (a + b) - F'a = Fb = Fd$$

Теоремы о парах: (Теоремы приводятся без доказательств. Подробные доказательства с графической анимацией см. демонстрационную программу автора по теории пар “Теория пар” на сайте МИИТа. [Посмотреть...](#))

О переносе пары сил в плоскости ее действия – Пару сил можно перенести в любое место в плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.

Об эквивалентности пар сил – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты алгебраически равны. Кинематическое состояние тела не изменится.

$$M(\bar{F}_1, \bar{F}'_1) = F_1 d_1, \quad M(\bar{F}_2, \bar{F}'_2) = F_2 d_2; \quad F_1 d_1 = F_2 d_2 \Rightarrow (\bar{F}_1, \bar{F}'_1) \equiv (\bar{F}_2, \bar{F}'_2)$$

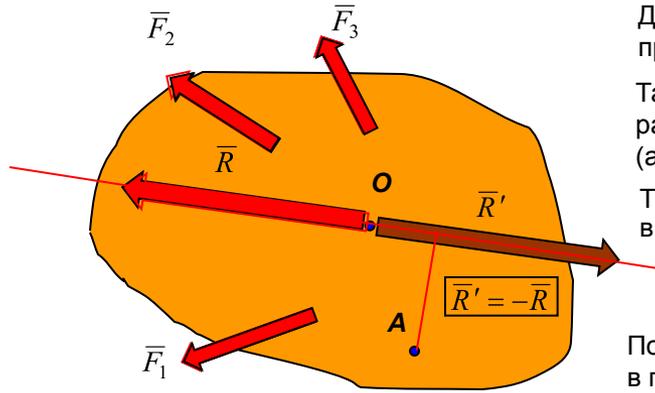
О сложении пар сил на плоскости – Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен алгебраической сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.

Условие равновесия системы пар сил -

$$M = \sum M_i = 0$$

Лекция 3 (продолжение – 3.3)

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей – Если система сил имеет равнодействующую, то момент этой равнодействующей относительно любого центра равен алгебраической сумме моментов сил системы относительно того же центра.



Доказательство: Пусть система сил $F_1, F_2, F_3 \dots$ приводится к равнодействующей, приложенной в точке O.

Такая система не находится в равновесии ($R \neq 0$). Уравновесим эту систему силой R' , равной равнодействующей R , направленной по линии ее действия в противоположную сторону (аксиома о двух силах).

Таким образом, система исходных сил $F_1, F_2, F_3 \dots$ и уравнивающей силы R' находится в равновесии и должна удовлетворять уравнениям равновесия, например:

$$\sum M_{iA} + M_A(R') = 0$$

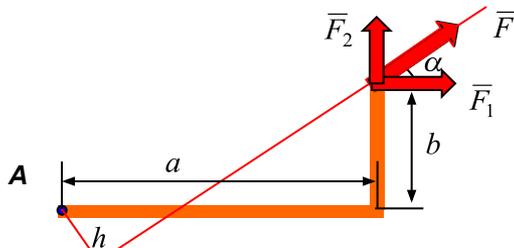
Поскольку сила R' , равна равнодействующей R и направлена по линии ее действия в противоположную сторону, то $M_A(R') = -M_A(R)$. Подстановка этого равенства в уравнение равновесия дает:

$$\sum M_{iA} - M_A(R) = 0$$

$$M_A(R) = \sum M_{iA}$$

Примеры использования теоремы о моменте равнодействующей:

1. Определение момента силы относительно точки, когда сложно вычислять плечо силы. Например:



Силу F разложим на составляющие F_1 и F_2 . Тогда момент силы F относительно точки A можно вычислить как сумму моментов каждой из сил относительно этой точки:

$$M_A(F) = -F_1 b + F_2 a = -(F \cos \alpha) b + (F \sin \alpha) a$$

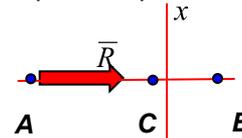
2. Доказательство необходимости ограничений для II и III форм уравнений равновесия:

Если $\sum M_{iA} = 0$ система приводится к равнодействующей, при этом она проходит через

точку A, т.к. ее момент относительно этой точки должен быть равен нулю (теорема Вариньона).

Если при этом $\sum M_{iB} = 0$ равнодействующая должна также проходить через точку B.

Тогда проекция равнодействующей на ось, перпендикулярную AB, и момент равнодействующей относительно точки, лежащей на AB, будут тождественно равны нулю при любом значении равнодействующей.



Лекция 6

1. Момент силы относительно центра в пространстве.
2. Момент силы относительно оси.
3. Момент пары сил в пространстве.

■ **Момент силы относительно центра в пространстве** – векторная величина, равная векторному произведению радиуса-вектора, проведенного из центра к точке приложения силы, и вектора силы.

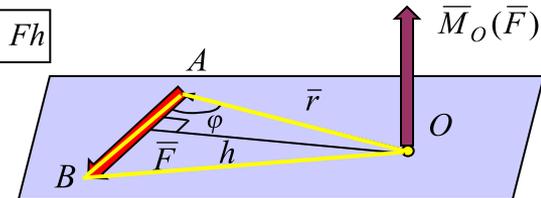
$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

По определению векторного произведения вектор момента силы направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через центр и силу, в ту сторону, откуда поворот радиуса-вектора к вектору силы на наименьший угол представляется происходящим по часовой стрелке.

Модуль вектора момента силы относительно центра равен:

$$M_O(\vec{F}) = rF \sin(\vec{r}, \vec{F}) = Fh$$

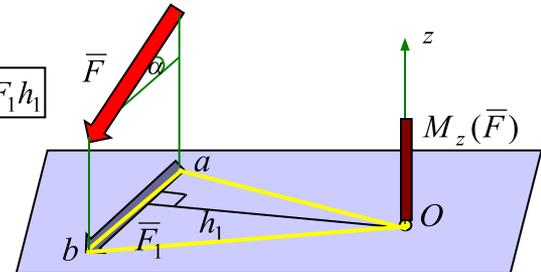
Модуль вектора момента силы относительно центра численно равен удвоенной площади треугольника ΔOAB .



■ **Момент силы относительно оси** – алгебраическая величина, равная произведению проекции вектора силы на плоскость, перпендикулярную оси, на плечо этой проекции относительно точки пересечения оси с плоскостью, взятая со знаком + (плюс), если вращение плоскости под действием силы представляется при взгляде навстречу оси происходящим против часовой стрелки, и со знаком – (минус) в противном случае.

$$M_z(\vec{F}) = \pm F_1 h_1$$

Момент силы относительно оси численно равен удвоенной площади треугольника ΔOab .



■ **Связь момента силы относительно центра и относительно оси.**

Модуль вектора момента силы относительно центра, лежащего на оси z, равен удвоенной площади треугольника OAB :

$$M_O(\vec{F}) = Fh = 2S_{OAB}$$

Момент силы относительно оси z, равен удвоенной площади треугольника Oab :

$$M_z(\vec{F}) = F_1 h_1 = 2S_{Oab}$$

Треугольник Oab получен проекцией треугольника OAB на плоскость, перпендикулярную оси z, и его площадь связана с площадью треугольника OAB соотношением:

$$S_{Oab} = S_{OAB} \cos \gamma$$

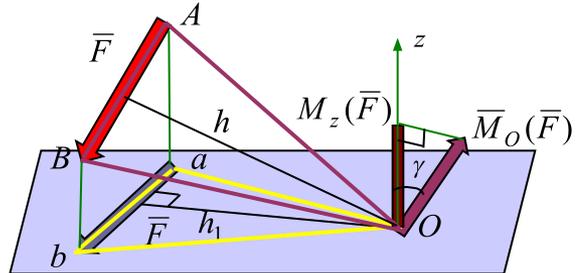
где γ – двугранный угол между плоскостями треугольников.

Поскольку вектор момента силы относительно точки перпендикулярен плоскости треугольника OAB , то угол между вектором и осью равен углу γ .

Таким образом, **момент силы относительно оси есть проекция**

вектора момента силы относительно центра на эту ось:

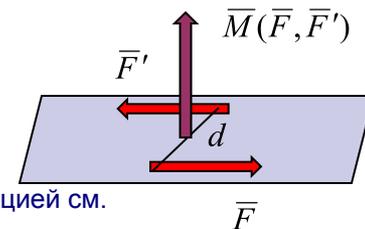
$$M_z(\vec{F}) = M_O(\vec{F}) \cos \gamma$$



Лекция 6 (продолжение – 6.2)

- Момент пары сил в пространстве** – вектор, перпендикулярный плоскости действия пары, направленный в ту сторону, откуда вращение плоскости под действием пары представляется происходящим против часовой стрелки. Модуль вектора момента пары равен произведению одной из сил пары на плечо пары:

$$M = Fd = F'd$$



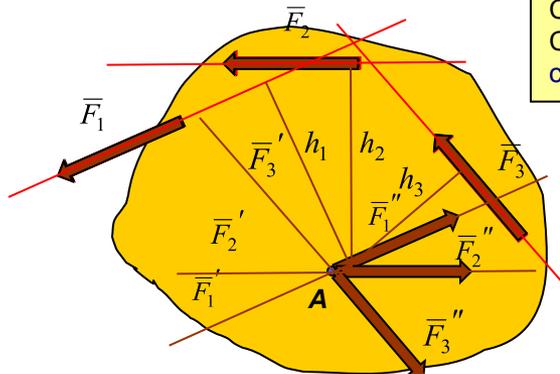
- Теоремы о парах:** (Теоремы приводятся без доказательств. Подробные доказательства с графической анимацией см. демонстрационную программу автора по теории пар “Теория пар” на сайте МИИТа. [Посмотреть...](#))
- О переносе пары сил в плоскость, параллельную плоскости ее действия** – Пару сил можно перенести в любую плоскость, параллельную плоскости ее действия. Кинематическое состояние тела не изменится.
- Об эквивалентности пар сил** – Пару сил можно заменить другой парой сил, если их моменты геометрически (векторно) равны. Кинематическое состояние тела не изменится.
- О сложении пар сил на плоскости** – Систему пар сил на плоскости можно заменить одной парой, момент которой равен геометрической (векторной) сумме моментов исходных пар. Кинематическое состояние тела не изменится.
- Условие равновесия системы пар сил** -

$$\bar{M} = \sum \bar{M}_i = 0$$

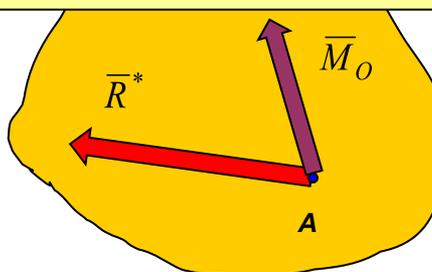
Далее будем по-прежнему придерживаться общего плана исследования системы сил, последовательно решая три вопроса :

1. Как упростить систему?
2. Каков простейший вид системы?
3. Каковы условия равновесия системы?

- Приведение плоской произвольной системы сил к заданному центру** – выбираем произвольную точку на плоскости и каждую из сил переносим по методу Пуансо в эту точку. Вместо исходной произвольной системы получим сходящуюся систему сил и систему пар. В отличие от ранее рассмотренной плоской произвольной системы сил теперь при использовании метода Пуансо присоединенные пары сил характеризуются векторами.



Сходящаяся система сил приводится к одной силе.
Система пар приводится к одной паре (теорема о сумме моментов исходных сил относительно центра приведения).



В общем случае произвольная система сил приводится к одной силе, называемой **главным вектором** и к паре с моментом, равным **главному моменту** всех сил системы относительно центра приведения:

$$\bar{R}^* = \sum \bar{F}_i \text{ главный вектор,}$$

$$\bar{M} = \bar{M}_A = \sum \bar{M}_{iA} \text{ главный момент.}$$