

# Курс лекций по теоретической механике

## Статика.

Лекция 1.3. Реальные связи

■ **Трение скольжения.** При действии сдвигающей силы, приложенной к телу, покоящемуся на шероховатой поверхности, возникает сила, противодействующая возможному смещению тела (**сила трения сцепления**) из равновесного положения или его действительному перемещению (**сила трения скольжения**) при его движении.

**Основные законы трения (Амонта - Кулона):**

1. Сила трения лежит в касательной плоскости к соприкасающимся поверхностям и направлена в сторону противоположную направлению, в котором приложенные к телу силы стремятся его сдвинуть или сдвигают в действительности (реактивный характер).

2. Сила трения изменяется от нуля до своего максимального значения  $0 \leq F_{\text{тр}} \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}}$ . Максимальная сила трения пропорциональна коэффициенту трения и силе нормального давления  $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fN$ .

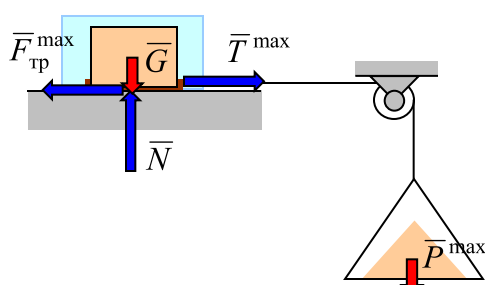
3. Коэффициент трения есть величина постоянная для данного вида и состояния соприкасающихся поверхностей ( $f = \text{const}$ ).

4. Сила трения в широких пределах не зависит от площади соприкасающихся поверхностей.

■ **Способы определения коэффициента трения.**

1. Сдвигающая сила изменяется от нуля до своего максимального значения –  $0 \leq T \leq T^{\text{max}}$ , ( $0 \leq P \leq P^{\text{max}}$ ).

2. Сила нормального давления изменяется от некоторого начального значения до минимального значения –  $N_0 \geq N \geq N^{\text{min}}$  ( $G_0 \geq G \geq G^{\text{min}}$ ).



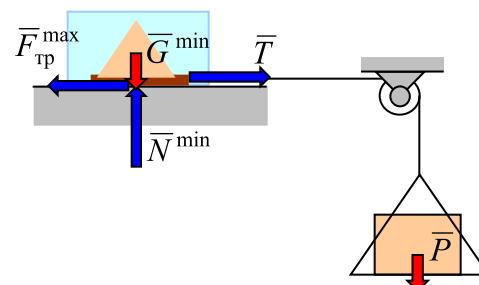
$$\sum X_i = 0; \quad T^{\text{max}} - F_{\text{тр}}^{\text{max}} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N - G = 0.$$

$$T^{\text{max}} = fN;$$

$$N = G;$$

$$f = \frac{T^{\text{max}}}{N} = \frac{P^{\text{max}}}{G}.$$



$$\sum X_i = 0; \quad T - F_{\text{тр}}^{\text{max}} = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N^{\text{min}} - G^{\text{min}} = 0.$$

$$T = fN^{\text{min}};$$

$$N^{\text{min}} = G^{\text{min}};$$

$$f = \frac{T}{N^{\text{min}}} = \frac{P}{G^{\text{min}}}.$$

3. Сдвигающая сила и сила нормального давления изменяются при изменении угла наклона плоскости скольжения от нуля до максимального

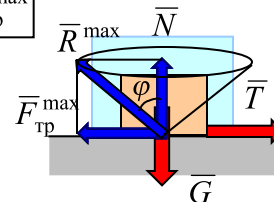
Активные силы ( $G$ ,  $T$  и др.) можно заменить равнодействующей силой  $P$ , имеющей угол отклонения от вертикали  $\alpha$ . Можно показать, что **равновесие возможно лишь в том случае, когда эта сила остается внутри пространства конуса трения**:

Условие равновесия по оси  $x$ :  $P \sin \alpha \leq F_{\text{тр}}^{\text{max}}$ .  
Из уравнения равновесия по оси  $y$ :  $N = P \cos \alpha$ .  
Максимальная сила трения  $F_{\text{тр}}^{\text{max}} = fN = \text{tg} \varphi N = \text{tg} \varphi P \cos \alpha$ .  
Тогда  $P \sin \alpha \leq \text{tg} \varphi P \cos \alpha$ , откуда  **$\text{tg} \alpha \leq \text{tg} \varphi$  и  $\alpha \leq \varphi$** .

■ **Угол трения.**

С учетом силы трения, возникающей при контакте с шероховатой поверхностью полная реакция такой поверхности может рассматриваться как геометрическая сумма нормальной реакции абсолютно гладкой поверхности и силы трения:

$$\bar{R}^{\text{max}} = \bar{N} + \bar{F}_{\text{тр}}^{\text{max}}$$



Угол отклонения полной реакции шероховатой поверхности – **угол трения**, равный:

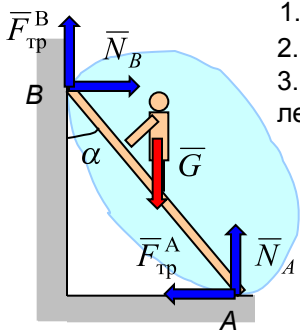
$$\varphi = \arctg \left( \frac{F_{\text{тр}}^{\text{max}}}{N} \right) = \arctg(f)$$

При изменении направления сдвигающей силы  $T$  на опорной поверхности ее поворотом относительно нормали к плоскости полная максимальная реакция шероховатой поверхности описывает **конус трения**.

■ **Учет сил трения при решении задач на равновесие.** При наличии сил трения:

1. К действующим на объект активным силам и реакциям абсолютно гладких поверхностей **добавляются соответствующие силы трения**, направленные по общей касательной к контактным поверхностям в сторону, противоположную возможному смещению точки касания объекта относительно опорной шероховатой плоскости.
2. К уравнениям равновесия, составленным для объекта, **добавляются выражения для максимальных сил трения** в количестве, равном числу сил трения.

■ **Пример решения задачи на равновесие с учетом трения.** Человек весом  $G$  собирается установить легкую лестницу под углом  $\alpha$  к вертикали (стене) и взобраться на половину длины лестницы для выполнения работы. Коэффициенты трения в точках контакта лестницы с полом ( $A$ ) и со стеной ( $B$ ) равны  $f_A$  и  $f_B$  соответственно. Определить предельное значение угла наклона, при котором лестница с человеком может сохранять равновесие. Весом лестницы пренебречь.



1. Выбираем на объект (человек и лестница), отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями гладкой поверхности.
2. Добавляем активные силы (силу тяжести  $G$ ).
3. Добавляем силы трения, направленные в сторону, противоположную возможному перемещению контактных точек  $A$  и  $B$  лестницы под действием приложенной активной силы.

4. Составляем уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & N_B - F_{\text{тр}}^A &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & F_{\text{тр}}^B - G + N_A &= 0; \\ \sum M_{iA} &= 0; & G \frac{AB}{2} \sin \alpha - F_{\text{тр}}^B AB \sin \alpha - N_B AB \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

5. Добавляем выражения для сил трения:

$$\begin{aligned} F_{\text{тр}}^A &= f_A N_A; \\ F_{\text{тр}}^B &= f_B N_B; \end{aligned}$$

6. Подстановка последних выражений в уравнения равновесия с простыми преобразованиями третьего уравнения дает :

$$\begin{aligned} \sum X_i &= 0; & N_B - f_A N_A &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; & f_B N_B - G + N_A &= 0; \\ \sum M_{iA} &= 0; & G \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha - f_B N_B \operatorname{tg} \alpha - N_B &= 0. \end{aligned}$$

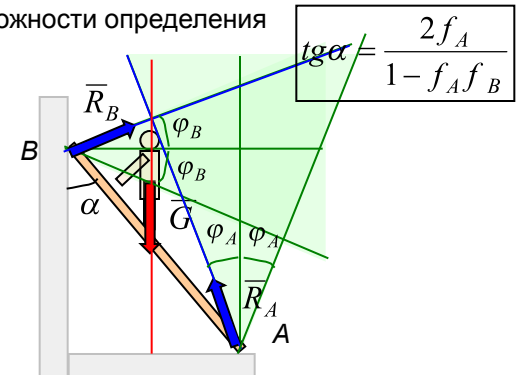
7. Решение первых двух уравнений дает выражения для нормальных реакций:

$$\begin{aligned} N_A &= \frac{G}{1 + f_A f_B}; \\ N_B &= \frac{f_A G}{1 + f_A f_B}. \end{aligned}$$

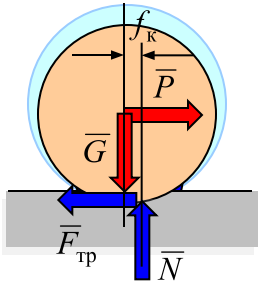
8. Подстановка выражений для нормальных реакций в третье уравнение равновесия приводит к возможности определения предельного угла наклона  $\alpha$ :

■ **Определение области равновесия.** Задача решена для конкретного положения человека, угол наклона соответствует предельному равновесию (использованы максимальные значения сил трения). С помощью понятия конуса трения, образуемого полной реакцией шероховатой поверхности и теоремы о трех силах можно определить **область возможных равновесных положений** человека на лестнице.

Для этого достаточно по заданным коэффициентам трения определить углы трения, определяющие предельные положения полной реакции и построить конусы трения. Общая область конусов дает область равновесных положений человека. Хорошо видно, что для более высокого положения человека надо уменьшать угол наклона.



■ **Соппротивление при качении.** При действии сдвигающей силы, приложенной к катку, покоящемуся на шероховатой поверхности, возникает сила, противодействующая возможному смещению тела (**сила трения сцепления**) из равновесного положения или его действительному перемещению (**сила трения скольжения**) при его движении и пара сил, момент которой препятствует повороту катка (**момент сопротивления качению**). Возникновение пары сил, препятствующей качению, связана с деформацией опорной плоскости, в результате которой равнодействующая нормальных реактивных сил по площадке контакта смещена от линии действия силы тяжести в сторону возможного или действительного движения.



**Основные законы трения качения:**

1. Момент сопротивления качению всегда направлен в сторону противоположную, тому направлению, в котором приложенные к телу силы стремятся его повернуть, или действительному повороту под действием этих сил (реактивный характер).

2. Момент сопротивления качению изменяется от нуля до своего максимального значения

$$0 \leq M_k \leq M_k^{\max}$$

Максимальный момент сопротивления качению пропорционален коэффициенту трения качения и силе нормального давления:

$$M_k^{\max} = f_k N$$

3. Коэффициент трения качения есть величина постоянная для данного вида и состояния соприкасающихся поверхностей ( $f_k = const$ ).

4. Момент сопротивления качению в широких пределах не зависит от радиуса катка.

Если коэффициент трения скольжения является безразмерной величиной, то коэффициент трения качения измеряется единицами длины и равен по величине указанному смещению равнодействующей нормального давления. В силу малости деформаций коэффициент трения качения имеет очень малую величину и составляет, например, для стального бандажа по стальному рельсу 0.0005 м.