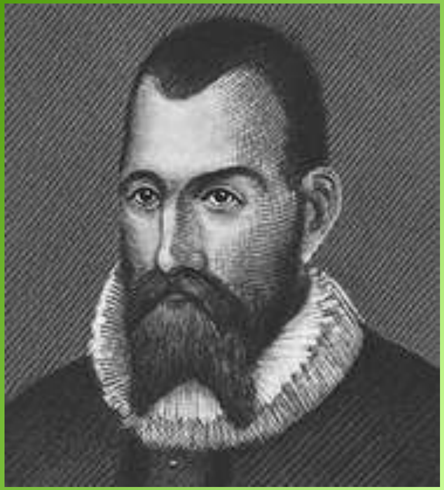
Логарифм

и его свойства

$$\log_a в$$

Тема урока: Логарифмы

$$a^{\log_a в} = в$$



В 1590 году шотландский математик Джон НЕПЕР пришел к идее логарифмических вычислений и составил первые таблицы логарифмов, опубликовал труд «Описание удивительных таблиц логарифмов». В этом труде содержались определение логарифмов, объяснение их свойств. Изобрел логарифмическую линейку, счетный инструмент, использующий таблицы Непера для упрощения вычислений.

Применение логарифма

Банковские расчёты

География

Расчёты в производстве

Биология

Химия

Физика

Астрономия

Психология

Социология

Музыка

Некоторая сумма денег в *A* руб. подвержена приросту в *p*% годовых. Через сколько лет эта сумма составит *S* руб.?

$$n = \frac{\lg S - \lg A}{\lg\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

Альпинисты, поднимаясь на пик Победы, достигли высоты, где давление было равно 304 мм рт. ст. Вычислим, на какой высоте находились альпинисты. (p_0 =760 мм рт. ст.)

Решение.

Высота над уровнем моря вычисляется по формуле

$$h = \frac{800}{0.4343} \lg \frac{p_0}{p}$$

где - P_0 давление на уровне моря, p – давление на высоте h м.

$$h = \frac{800}{0.4343} \lg \frac{760}{304} = 7330.2$$

Увеличение диаметра объектива телескопа позволяет видеть всё большее количество звёзд, не различимых простым глазом. При этом предельная «звёздная величина» *k* звёзд, видимых через телескоп, вычисляется по приближённой формуле $K = 7{,}5 + 5\lg D$

где *D* – диаметр объектива телескопа в см. Например, при *D* = 8 см

$$K = 7{,}5 + 5\lg 8 = 12$$

Значит, через телескоп можно увидеть звёзды до 12-й величины.

Что такое логарифм? Как решать логарифмы?

Эти вопросы многих выпускников вводят в ступор. Традиционно тема логарифмов считается сложной, непонятной и страшной. Особенно -уравнения с логарифмами.

Это абсолютно не так. Абсолютно! Не верите?

Хорошо. Сейчас, за какие-то 10 - 20 минут **вы**:

1. Поймете, **что такое логарифм**.
2. Научитесь решать целый класс показательных уравнений.

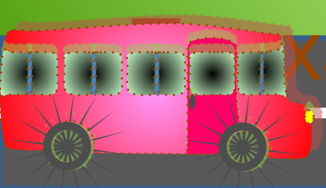
Даже если ничего о них не слышали.

3. Научитесь вычислять простые логарифмы.

Причём для этого вам нужно будет знать только таблицу умножения, да как возводится число в степень...

Чувствую, сомневаетесь вы...

Ну ладно, засекайте время!



хали!

- Для начала решите в уме вот такое уравнение:

$$3^x = 9$$

Удалось?

Ну да, х = 2. Три в квадрате - это девять.

- А теперь решите почти то же самое:

$$\mathbf{3^x = 8}$$

Что, что-то не так? **$3^x = 8$**

Ответ, что нету такого икса,

не принимается!

Согласитесь, что это как-то нечестно – с девяткой пример решается в уме, а с восьмеркой не решается вовсе! Ну чем девятка лучше восьмерки?!

Математика не терпит такой дискриминации. Для математики все числа равны! Ну, не буквально, конечно...

Можно сообразить, что икс – какое-то дробное число, между единичкой ($3^1 = 3$) и двойкой ($3^2 = 9$). И даже приближенно подобрать, найти это число. Но так возиться каждый раз....

Математика решает вопрос как всегда радикально и элегантно.

- Вернёмся к нашему загадочному примеру:

$$3^x = 8$$

X - это число, в которое надо возвести 3, чтобы получить 8.

Фраза понятна?

Если непонятна, прочитайте ещё раз. И ещё. Это важно.

- ***назовём это число логарифмом*** восьми по основанию три.

Записывается это вот как:

$$x = \log_3 8$$

- Читаем ещё раз: "икс равен логарифму восьми по основанию три".

Где что пишется – запомнить легко: число 3 – называется **основанием**, пишется в логарифме и в показательном выражении *внизу*.

Основание у чего угодно - оно, обычно, внизу бывает.

- ***И это правильный ответ!***

- Как решить пример:

$$5^x = 12 \ ?$$

- Легко!

x - это число, в которое надо возвести 5, чтобы получить 12.

В математической записи: $x = \log_5 12$

Оформление решения:

$$5^x = 12$$

$$x = \log 12$$

- Ещё пример:

$$2^x = 135$$

Элементарно!

$$x = \log_2 135$$

- И ещё:

$$19^x = 0,352$$

Не вопрос!

$$x = \log_{19} 0,352$$

***Это все верные ответы*!**

Приятно, правда?

- Представьте, мы в обыденной жизни спросили, например: "**как доехать до вокзала**?" И нам честно и правильно ответили: "**На автобусе, который идёт до вокзала**!" В жизни толку с такого ответа мало.

<u>А в математике - пожалуйста!</u>

- Вас смущает, что вместо конкретного числа мы пишем какие-то значки с цифрами? Ну ладно, только для вас... **Я покажу вам это конкретное число:**

$$\boldsymbol{x = \log_3 8 = 1{,}892789260714.....}$$

- Легче стало? Учтите ещё, что это число *никогда* не кончается. Иррациональное оно...
- Поэтому и записывают логарифмы вместо страшно лохматых чисел. Кому надо числовой ответ - посчитает на калькуляторе.

- Но радость от новых знаний будет неполной без ложки дегтя.
- Если логарифм считается без калькулятора, его *надо считать*.
- Ответ, например, $x = \log_2 4$ **нехорош**.
- Этот логарифм вычисляется, и его вы *обязаны* посчитать. Собственно, это и есть **решение логарифма**.
- И чему же равен $\log_2 4$?

$$\log_3 27 = 3$$

- Уловили? Ну-ка разовьём успех!

Решаем примеры:

$\log_3 81 =$

2 1 3 6 5 4

$$\log_3 27 = 3$$

- Уловили? Ну-ка разовьём успех!

Решаем примеры:

$\log_3 81 =$ 4

$\log_5 5 =$

2 1 3 6 5 4

$$\log_3 27 = 3$$

- Уловили? Ну-ка разовьём успех!

Решаем примеры:

$\log_3 81 =$ 4

$\log_4 16 =$

$\log_5 5 =$ 1

2 1 3 6 5 4

$$\log_3 27 = 3$$

- Уловили? Ну-ка разовьём успех!

Решаем примеры:

$\log_3 81 =$ 4

$\log_4 16 =$ 2

$\log_5 5 =$ 1

$\log_6 216 =$

2 1 3 6 5 4

$$\log_3 27 = 3$$

- Уловили? Ну-ка разовьём успех! Решаем примеры:

$\log_3 81 = 4$

$\log_4 16 = 2$

$\log_5 5 = 1$

$\log_6 216 = 3$

- Вот мы и познакомились с логарифмами. На понятном уровне. Вы убедились, что они не опасны. Но есть, есть у них свои фишки! Самая важная - это ***ограничения***.
- До сих пор мы знали два жёстких ограничения. **Нельзя делить на ноль и извлекать корень чётной степени из отрицательного числа.** Эти ограничения играют огромную роль в решении заданий. Про ОДЗ помните? Теперь добавляются ограничения, связанные с логарифмами.
- Запишем в общем виде, т.е. через буквы:

$$c = \log_a b$$

- или, что едино:

$$\log_a b = c$$

- Вспомним: *a* - это основание, которое нужно возвести в степень *c*, чтобы получить *b*.

- Прикинем, любым ли числом может быть *a*? Если, к примеру, *a* = 1? Забавно получится, единица в любой степени - единица. Как-то оно не очень... Как не меняй *c*, а *a* и *b* единичками останутся... Та же история и с нулём. Не годятся эти числа в качестве основания. Отрицательные числа - капризные. В одну степень их можно возводить, в другую нельзя... Вот и поступили с ними, как со всеми капризными – вовсе исключили из рассмотрения.
- В результате получилось:

$$a > 0; \quad a \neq 1$$

- А если мы *положительное* число возведём в любую степень, мы получим... получим... Да! Положительное число и получим. Отсюда:

$$b > 0$$

Ещё не мешает знать, *что такое десятичный логарифм* и *что такое натуральный логарифм*?

В математике два основания употребляются очень часто.

Это основание 10 и основание число е.

$$\log_{10} b = \lg b$$

$$\log_e b = \ln b$$

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b$$