Секрет обучения заключается в уважении к ученику (Ральф Эмерсон).

Линейная алгебра

Лекция 11

Агаев Рафиг Пашаевич
(доктор физико-математических наук)

План лекции 11

- Минимальный многочлен матрицы
- Жорданова форма
- Связь между жордановой формой и минимальным многочленом
- Примеры жордановых форм
- Компоненты матрицы
- Функция от матрицы
- Примеры функции от матрицы

Канонический вид лин. преобразования

Рассматриваем лин. преобр. в n–мерном пространстве и матрицы A порядка n.

Мы уже знаем:

1) если у лин. преобр. (матрицы) все собственные значения различны, то его (ее) можно привести к диагональному виду;

2) если у лин. преоб. (матрицы) есть n линейно независимых собств. векторов, то его (ее) можно привести к диагональному виду;

3) матрицу самосопряженного лин. преобр. в ортонормиров. базисе можно привести к диагональному виду.

4) любую действительную симметричную матрицу можно привести к диагональному виду.

Вопрос! Есть матрицы, которые нельзя приводить к диагон. виду.

Какой канонический вид имеют такие матрицы и насколько этот вид отличается от диагон. вида.

На этот вопрос отвечает жорданова нормальная форма лин. преобразования (матрицы).

Присоединенные и собственные векторы

- Пусть задано лин. преобразование A в n-мерном пространстве. Предположим, что у A имеются k линейно независимых собственных векторов

$$e_1,\ f_1,\ \ldots,\ h_1,$$

соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Тогда существует базис, состоящий из групп векторов (здесь $p+q+\ldots+s=n$)

$$e_1,\ \ldots,\ e_p;\ f_1,\ \ldots,\ f_q;\ \ldots;\ h_1,\ \ldots.\ h_s,$$

в котором преобразование имеет следующий вид

$$\begin{array}{llll}
Ae_1 = \lambda_1 e_1, & Ae_2 = e_1 + \lambda_1 e_2, & \ldots, & Ae_p = e_{p-1} + \lambda_1 e_p; \\
Af_1 = \lambda_2 f_1, & Af_2 = f_1 + \lambda_2 f_2, & \ldots, & Af_q = f_{q-1} + \lambda_2 f_q; \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
Ah_1 = \lambda_k h_1, & Ah_2 = h_1 + \lambda_k h_2, & \ldots, & Ah_s = h_{s-1} + \lambda_k h_s.
\end{array}$$

В каждом подпространстве, порожденном каждой группой векторов есть один собственный вектор. Остальные векторы называют присоединенными. Например, в группе $e_1, \ldots, e_p$, вектор e_1 собственный вектор. А остальные векторы e_i называют присоединенным вектором $i-1$-го порядка.

Присоединенные и собственные векторы

- Еще раз отметим, что

$$Ae_i = \lambda e_i + e_{i-1}.$$

где e_k - присоединенный вектор $k-1$-го порядка.

Итак, в таком базисе матрица преобразования будет состоят из клеток (блоков), расположенных по главной диагонали, а все остальные элементы, не принадлежащие ни одной из клеток, будут равны нулю.

Чтобы понять, что стоит в каждой клетке матрицы преобраз., еще раз напишем преобразование для группы векторов, и обратим внимание на то, как переводятся векторы одной группы. Также вспомним, как строится матрица лин. преобразования. Получим:

$$\begin{aligned}
Ae_1 &= \lambda_1 e_1, \\
Ae_2 &= e_1 + \lambda_1 e_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Ae_{p-1} &= e_{p-2} + \lambda_1 e_{p-1}, \\
Ae_p &= e_{p-1} + \lambda_1 e_p.
\end{aligned}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма

Для лин. преобразования для всех базисных векторов с различными собств. значениями мы получим блочную матрицу с блоками, порядки которых равны *p, q,…, s* :

$$
\begin{pmatrix}
\lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & & & & & & & & & \\
0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & & & & & & & & & & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & \lambda_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & \lambda_2 & 1 & \dots & 0 & & & & & & \\
 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_2 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k
\end{pmatrix},
$$

Все не указанные элементы равны нулю.

Теорема о жордановой форме

- Теорема 1. Пусть задана матрица A порядка n. Существует невырожденная матрица S такая, что $S^{-1}AS = J_A$, где

$$J_A = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k(\lambda_k) \end{bmatrix},$$

жорданова форма матрицы A,
$p + q + \cdots + s = n$, а каждая жорданова клетка (блок) $J_i(\lambda_i)$ имеет вид

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Что говорит о матрице ее жорданова форма?

Жорданова каноническая форма — это набор «почти диагональных» матриц, называемых жордановыми матрицами. Сюда входят и все диагональные матрицы. На множестве квадратных комплексных матриц каждый класс эквивалентности (по отношению подобия) содержит какую-то жорданову матрицу и любые две жордановы матрицы из одного класса эквивалентности одинаковы с точностью до тривиального различия. Жорданова матрица, подобная какой-либо заданной матрице, называется *жордановой канонической формой* (иногда — *жордановой нормальной формой*) этой матрицы. Если для какой-то матрицы найдена ее жорданова каноническая форма, то можно считать, что об этой матрице (или линейном преобразовании) известно все, чем обычно интересуются в линейной алгебре, и, чтобы получить необходимую информацию, достаточно лишь взглянуть на жорданову каноническую форму.

Минимальный многочлен матрицы

- Вспомним теорему Гамильтона-Кели (см. Презентацию 9).

Теорема Гамилтона-Кели. Каждая матрица A порядка n удовлетворяет своему храктеристическому многочлену, т.е. $P_A(A) = \mathbf{0}_{n\times n}$.

Пусть

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n - c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} - \cdots \pm c_n$$

– характеристический многочлен матрицы A, и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ - ее различные собственные значения кратности $m_1, \ldots, m_s$ - соответственно. Очевидно, то $m_1 + \cdots + m_s = n$

Запишем $p_A(\lambda)$ как

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}.$$

Определение 1. Многочлен $\psi(\lambda)$ наименьшей степени q

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\nu_s},$$

который аннулирует матрицу A, т.е. $\psi(A) = \mathbf{0}_{n\times n}$, называют минимальными аннулирующим многочленом или просто минимальным многочленом. Здесь $q = \nu_1 + \cdots + \nu_s$.

Минимальный многочлен для каждой матрицы – единственный.

Алгебраическая и геометрическая кратности собст. значений

- Кратность m_i собственного значения λ_i называют его алгебраической кратностью. .
- Число жордановых блоков собственного значения λ_i называют его геометрической кратностью . Это число равно числу линейно независимых собственных векторов для этого собств. значения.
- Для собственного значения λ_i максимальный размер ν_i его жорданового блока называют его индексом.

Вернемся к минимальному аннулирующему многочлену:

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{\nu_s}.$$

- Максимальный размер ν_i жорданового блока для λ_i совпадает с степенью множителя $(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}$.

Повторение мать учения или еще раз о свойствах жордановой формы

1. Число k ее жордановых клеток (с учетом повторов одних и тех же клеток) равно максимальному числу ее линейно независимых собственных векторов.

2. Матрица J диагонализуема тогда и только тогда, когда $k = n$.

3. Число жордановых клеток, отвечающих какому-то одному собственному значению, совпадает с его геометрической кратностью, т. е. с размерностью соответствующего собственного подпространства. Сумма порядков всех жордановых клеток, отвечающих одному собственному значению, совпадает с его алгебраической кратностью.

4. Знание собственных значений вместе с их алгебраическими и геометрическими кратностями в общем случае не дает полной информации о жордановой матрице. Необходимо еще выяснить, каковы размеры жордановых клеток для каждого собственного значения. Порядок наибольшей жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ, — это кратность числа λ как корня минимального многочлена (см. теорему 3.3.6).

Пусть у матрицы *A* жорданова форма такая

- $$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & & \\ & 0 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & 0 & & & & & & & \\ & & & 3 & 1 & & & & & & \\ & & & & 3 & 0 & & & & & \\ & & & & & 3 & 1 & & & & \\ & & & & & & 3 & 0 & & & \\ & & & & & & & 2 & 0 & & \\ & & & & & & & & 2 & 0 & \\ & & & & & & & & & 7 & 1 \\ & & & & & & & & & & 7 \end{bmatrix}.$$

Для данной матрицы A порядка 11 имеем (все не указанные элементы равны нулю):

$m_0 = 3;\ m_2 = 2; m_3 = 4; m_7 = 2;$

$\nu_0 = 2; \nu_2 = 1; \nu_3 = 2; \nu_7 = 2.$

Хар. многочлен имеет вид: $p_A(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 2)^2\,(\lambda - 3)^4(\lambda - 7)^2.$

Минимальный многочлен: $\psi(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 2)\,(\lambda - 3)^2(\lambda - 7)^2.$

Вопрос?

Чему равно общее число лин. нез. собст. векторов для *A*?

Функция от матриц

Вопрос 1? Где применяются функции от матрицы?

- При решении системы дифференциальных уравнений
- Для быстрого вычисления степени матрицы высокого порядка (например, при вычисления предела последовательности степеней функции от матриц определенного класса)
- В различных приложениях теории управления и т.п.

Вопрос 2? Какой имеет смысл $f(A)$ (или что понимается под $f(A)$), если $f(x)$ - функция скалярной переменной. Ответ очевиден, если $f(x)$ - многочлен (подставляем A в функцию $f(x)$ и вычисляем значения $f(A)$). А как вычислить $f(A)$ - если $f(x)$ - не многочлен.

Функция от матриц

Определение 1. Пусть задана функция ψ. Если для нее определены q чисел

$$\psi(\lambda_k), \psi'(\lambda_k), \dots, \psi^{(\nu_k - 1)}(\lambda_k), \quad k = 1, .., q,$$

то говорят, что функция определена на спектре матрицы.

Лемма 1. Если g и h два многочлена, то $g(A) = h(A)$ тогда и только тогда, когда g и h имеют одинаковые значения на спектре матрицы A.

Доказательство можно найти, например, в главе 5 книги Ланкастера П. «Теория матриц».

Вывод из леммы 1. Мы будем требовать, что все функции f, которые определены на спектре матрицы A и принимают там одинаковые значения, приводили к одной и той же матрице $f(A)$. В частности, для любой f, определенной на спектре A, мы будем иметь возможность записать $f(A) = g(A)$, где g - некоторый многочлен (например, интерполяционный многочлен).

Формулы, которые нам нужны для вычисления функции от матрицы.

- Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n и пусть функция f определена на спектре матрицы A. Тогда существуют независимые от функции f матрицы Z_{kj}, что

$$f(A) := \sum_{k=1}^{s} \sum_{j=0}^{\nu_s - 1} f^{(j)}(\lambda_k)\, Z_{kj}, \qquad (1)$$

где

$$Z_{k0} = I \text{ при } s = 1,$$

$$Z_{k0} = \prod_{i \neq k} \left(I - \left(\frac{A - \lambda_k I}{\lambda_i - \lambda_k} \right)^{\nu_k} \right)^{\nu_i}, \qquad \text{при } s > 1 \qquad (2)$$

$$Z_{kj} = Z_{k0}\, (j!)^{-1} (A - \lambda_k I)^j. \qquad (3)$$

В формуле (2) вместо ν_k и ν_k можно подставить любые числа больше ν_k и ν_k.

С помощью формул (1)-(3) мы вычислим функции от матриц.

Примеры

Пример 1. Для матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

вычислить значения

а) $f(x) = x^{75}$; б) $f(x) = e^x$ при $x = A$.

У этой матрицы с.з. 3 и 5, а минимальный многочлен равен

$$\psi(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 5)^2$$

поскольку размер наибольшей жордановой клетки для со. зн. 5 равен 2 (число клеток равно 1 для каждого соб. зн.)

Сперва находим компоненты нашей матрицы по формулам (2) и (3), и определим параметры: $\nu_1 = 1, \nu_2 = 2, \quad s = 2.$.

1) Вычисляем компоненты Z_{kj} для собст. значения $\lambda_1 = 3$, где $\nu_1 = 1$, $k=1$.

$$Z_{10} = \prod_{i \neq k} \left(I - \left(\frac{A - \lambda_k I}{\lambda_i - \lambda_k} \right)^{\nu_k} \right)^{\nu_i} = \left(I - \left(\frac{A - 3I}{5 - 3} \right)^1 \right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

продолжение примера

2) Вычисляем компоненты Z_{kj} для собст. значения λ_2 =5, где $\nu_2 = 2$, k=2.

$$Z_{20} = \prod_{i \neq k} \left(I - \left(\frac{A - \lambda_k I}{\lambda_i - \lambda_k} \right)^{\nu_k} \right)^{\nu_i} = \left(I - \left(\frac{A - 5I}{3 - 5} \right)^2 \right)^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

По формуле (3) вычисляем Z_{21}:

$$Z_{21} = Z_{20}\,(1!)^{-1}(A - 5I)^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

А теперь для пункта а) определим $f(A) = A^{75}$ с помощью (1).

$$A^{75} := \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=0}^{\nu_s - 1} f^{(j)}(\lambda_k)\, Z_{kj} =$$

$$= \sum_{j=0}^{0} 3^{75}\ Z_{10} + \sum_{j=0}^{1} (x^{75})^{(j)}_{x=5}\, Z_{2j} = 3^{75} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 5^{75} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 75 *$$

$$5^{74} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^{75} & 0 & 0 \\ 0 & 5^{75} & 3 * 5^{76} \\ 0 & 0 & 5^{75} \end{bmatrix}.$$

Слайд 1

1