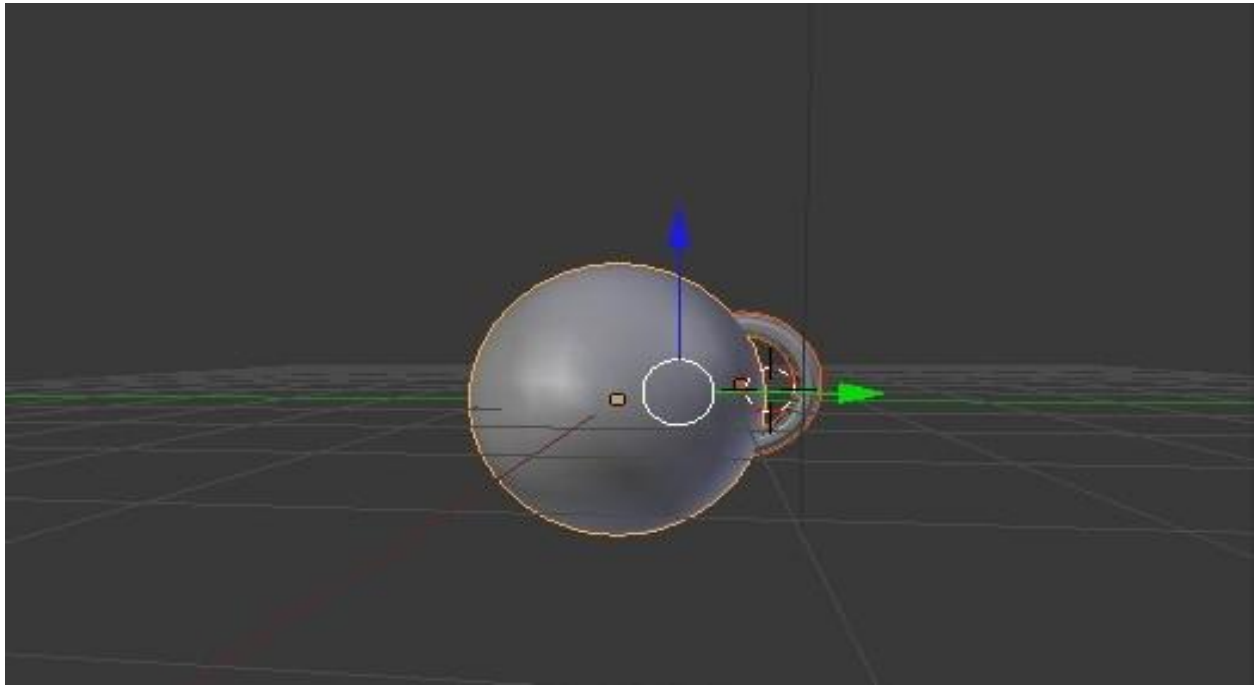
Об исследовании топологии двумерных многообразий с помощью графического редактора Blender.

Доклад подготовил: Кирщина Артем Васильевич
Научный руководитель: Хромова Олеся Павловна

- Целью настоящей работы является визуализация в графическом редакторе Blender топологической операции склейки двумерных многообразий на примере сферы.
- Объектом исследования являются двумерные дифференцируемые многообразия и их топологические инварианты.



Основные определения и факты

M, N – n-мерные многообразия.

f : M → N – гомеоморфизм (т.е. взаимно однозначное, взаимно непрерывное отображение).

Опр. Характеристику пространства, которая сохраняется при гомеоморфизме, принято называть **топологическим инвариантом**.

Примером топологического инварианта служит **эйлерова характеристика** (или характеристика Эйлера-Пункаре)многообразия M, которая обычно обозначается $\chi(M)$.

В случае двумерного многообразия эйлерова характеристика вычисляется по формуле

$$\chi(M) = \Г - \Р + \В,$$

где Г, Р и В есть соответственно число граней, ребер и вершин полиэдра, восстановленного на поверхности многообразия.

Если двумерное многообразие M получено из многообразий M' и M'' склеиванием по гомеоморфизмам

$$f_i : y_i \to y_i' \quad , i = 1,2,\ldots,k ,$$

то эйлерова характеристика многообразия M равна сумме эйлеровых характеристик многообразий M' и M'', т. е. $\chi(M) = \chi(M') + \chi(M'')$

- Ввести понятие ручки и ленты Мебиуса!!!
  Дополнить рисунками

Теорема (о классификация двумерных многообразий).

Любое гладкое компактное связное замкнутое двумерное многообразие M гомеоморфно либо сфере S^2 с g ручками (если M ориентировано), либо сфере S^2 с k пленками Мебиуса (если M неориентировано).

При этом число g ручек называют **родом многообразия** M, а число k пленок Мебиуса – **неориентируемым родом**.

Таким образом, для эйлеровой характеристики 2-мерных многообразий в соответствие с теоремой выполняется

$$\chi(M) = 2 - 2g,$$

где g – род ориентированного многообразия M, или

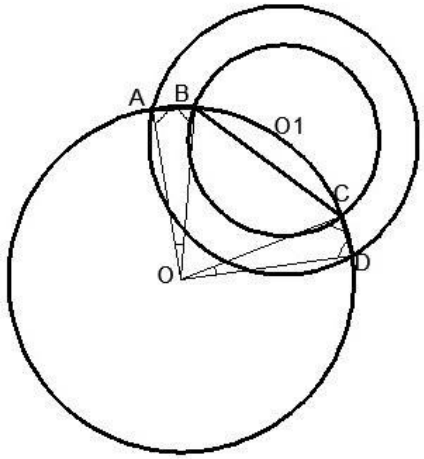
$$\chi(M) = 2 - k,$$

где k – неориентируемый род.

Математическое обоснование возможности выполнения операции склейки в графических редакторах

В данном разделе рассмотрим операцию “приклеивания” ручки к сфере. С точки зрения дальнейшей визуализации этой процедуры в графическом 3d редакторе остановимся на двух вариантах такой склейки.

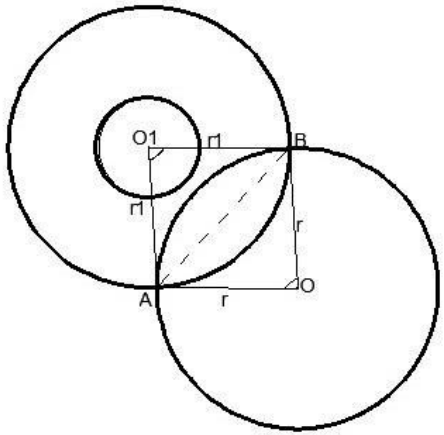
Случай первый.



- Обозначим через S окружность, соответствующую разрезу сферы, а через S_T -окружность, соответствующую внешней части кольца, и рассмотрим треугольники ΔOAB и ΔOCD. Поскольку OA = OB = R, то AB = CD = 2R cos(β), где R - радиус окружности S, β = ∠OBA = ∠OAB.

  Для простоты выполнения склейки в графическом редакторе будем <<опускать>> тор в сферу так, чтобы отрезок BC был диаметром окружности S_T ,и значит равным 2R cos(β).

Случай второй.



- Теперь будем считать, что ручка образована путем вырезания дырки из тора. В этом случае в разрезе будем иметь следующую картину, где как и ранее через S обозначена окружность, соответствующая разрезу сферы, а через S_T - окружность, соответствующая внешней части кольца.

Из соображений простоты выполнения построения в графическом редакторе будем считать, что R = R_1 , где R - радиус окружности S, а R_1 радиус окружности S_T При этом хорда AB = 2R cos(β), где β = $\angle$ OBA.

Blender

Среди уникальных особенностей Blender следует отметить следующие.

1. Кроссплатформенность. Blender одинаково хорошо и стабильно работает в Linux, Windows и др. операционных системах.

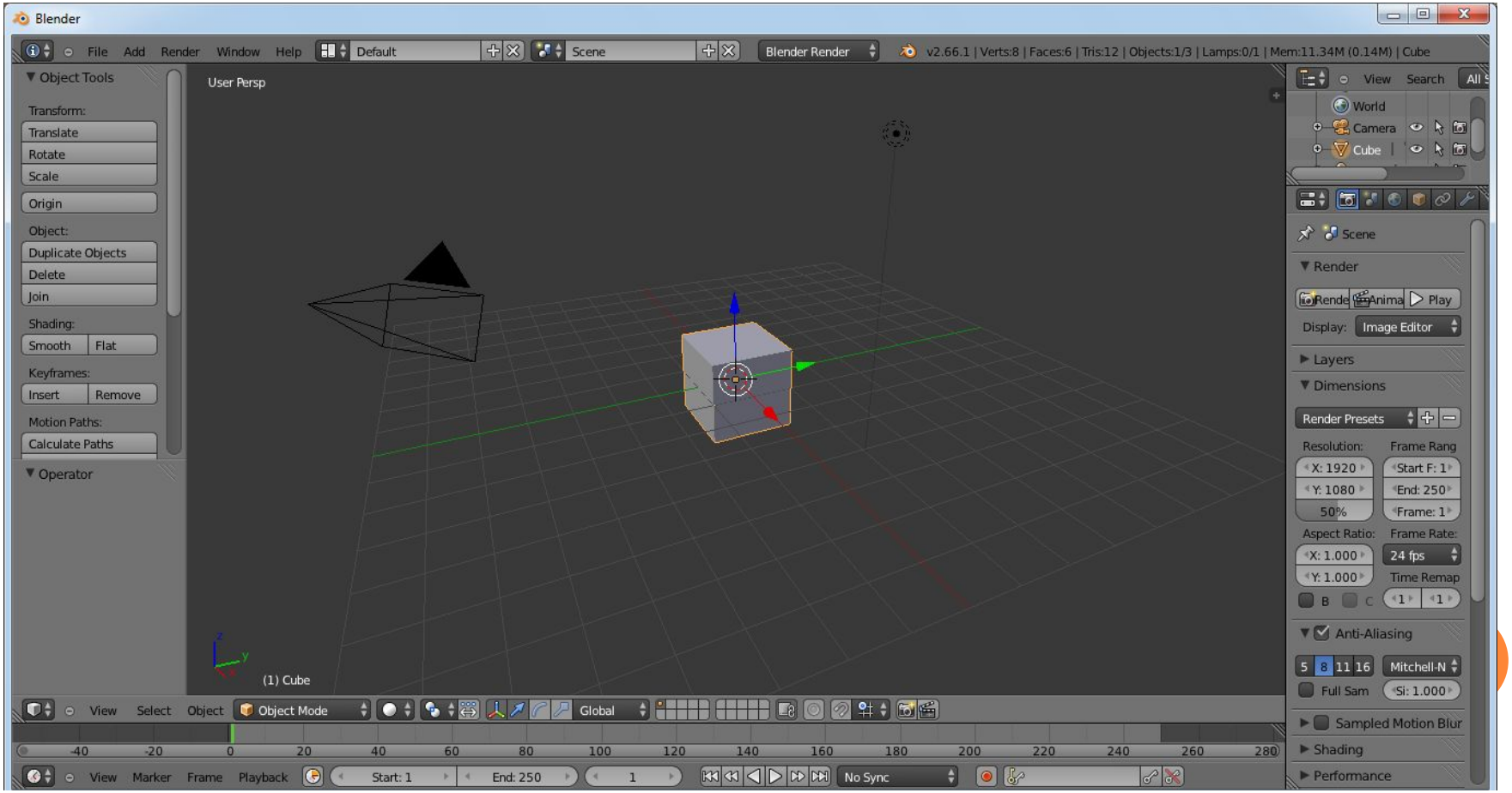
2. Размер. По сравнению с коммерческими разработками размер этого редактора совершенно мизерный --- всего несколько десятков мегабайт.

3. Системные требования. Программа может полноценно функционировать даже на ПК с очень слабыми конфигурациями, вплоть до нетбуков. Минимальные требования к системе более чем скромные: процессор с одним ядром, работающий на частоте 1 ГГц, оперативная память 512 Мбайт и видеокарта с поддержкой Open GL и объемом памяти не ниже 64 Мбайт.

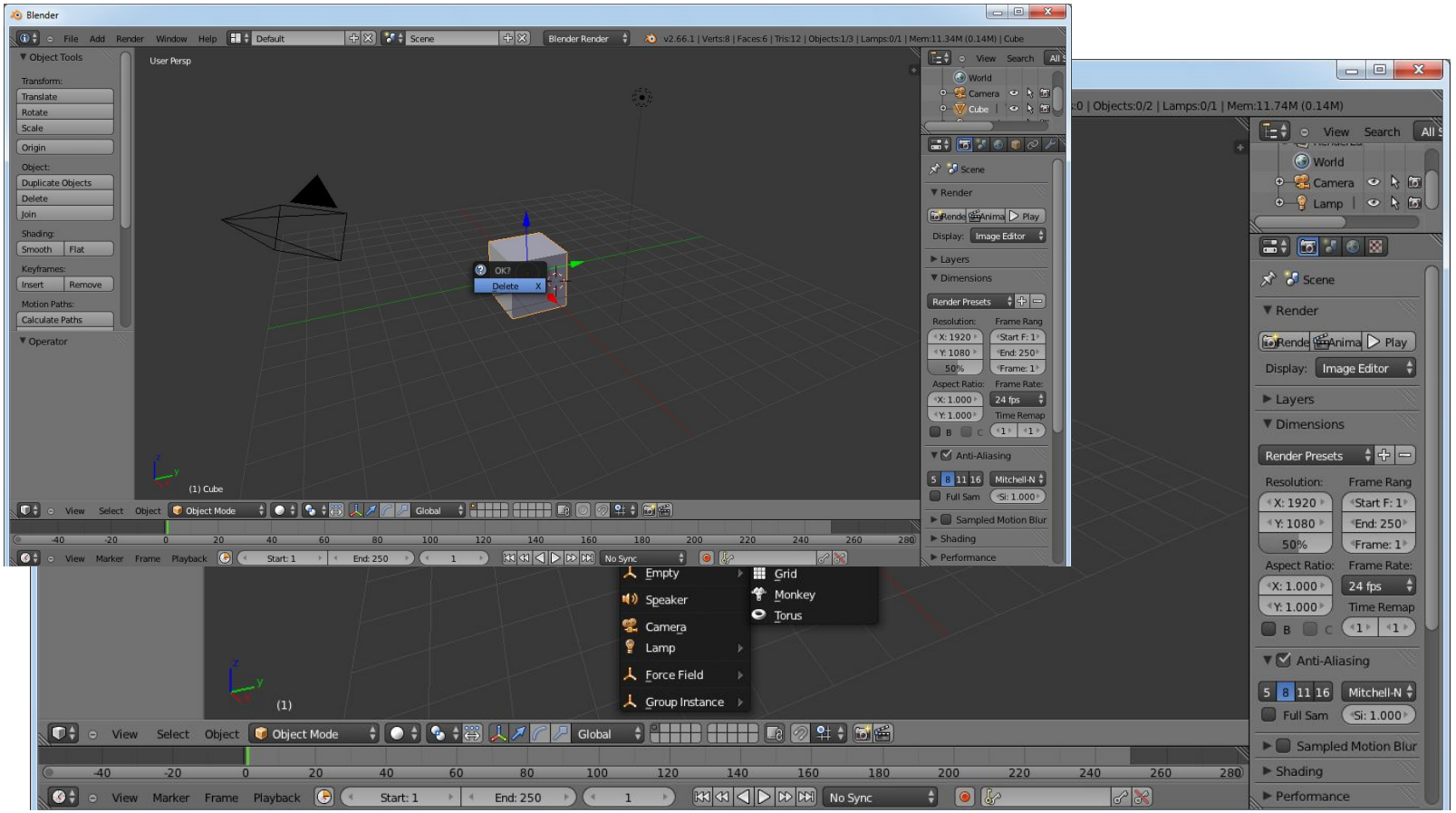
Визуализация топологических операций в Blender

Операция склейки

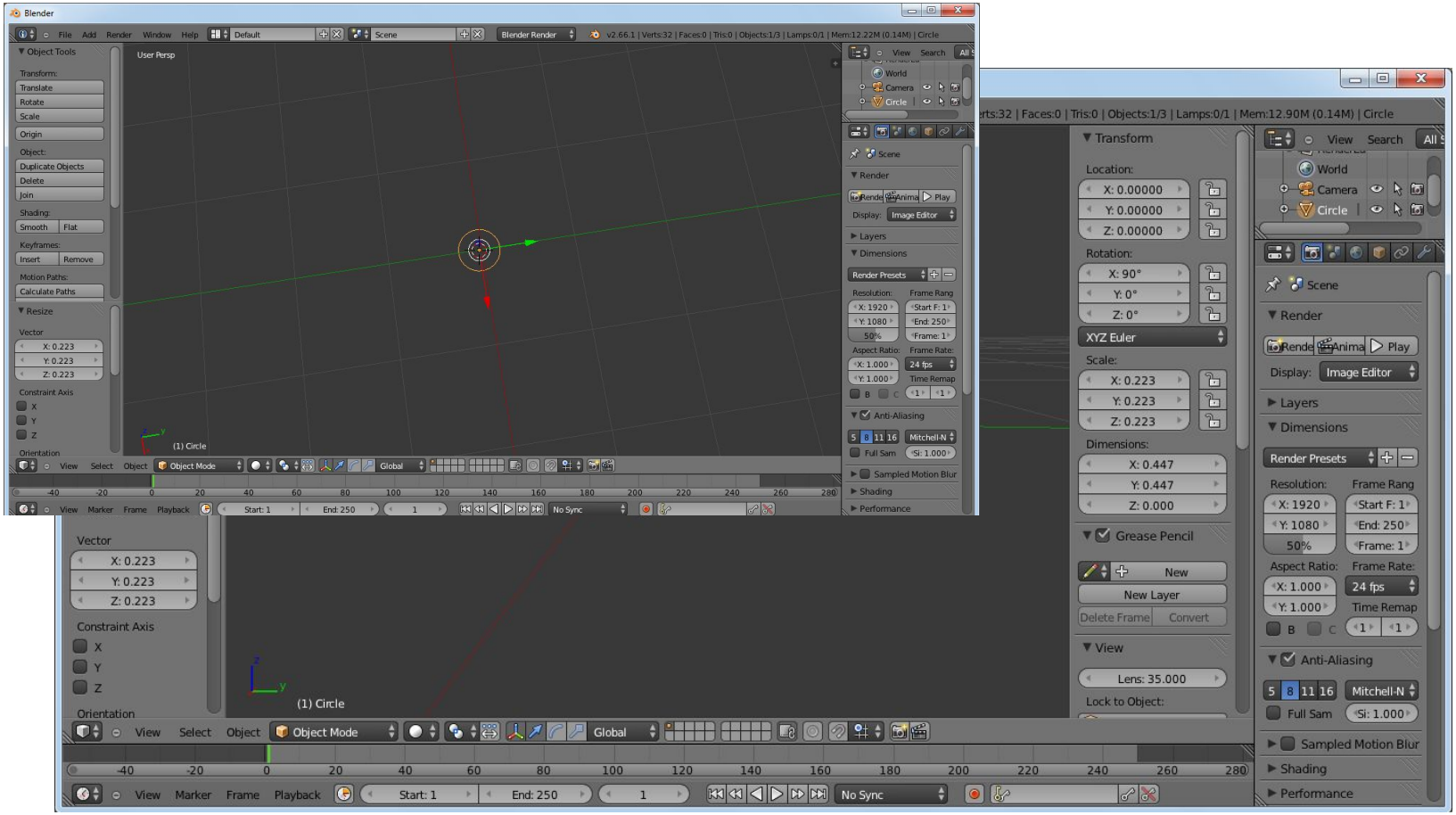
Далее будут показаны пошагово действия в Blender.



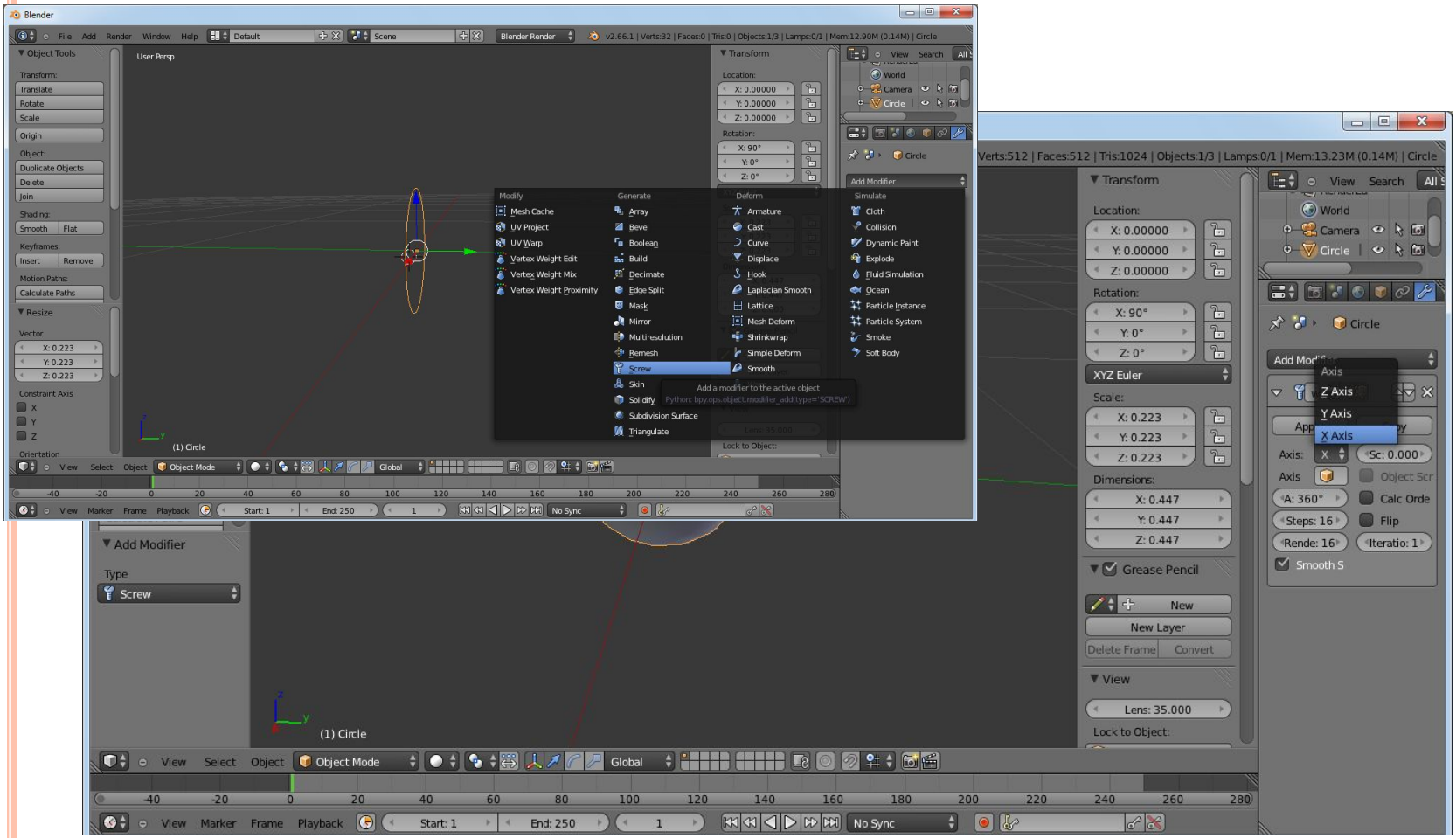
Удаляем стандартный куб, добавляем меш окружность



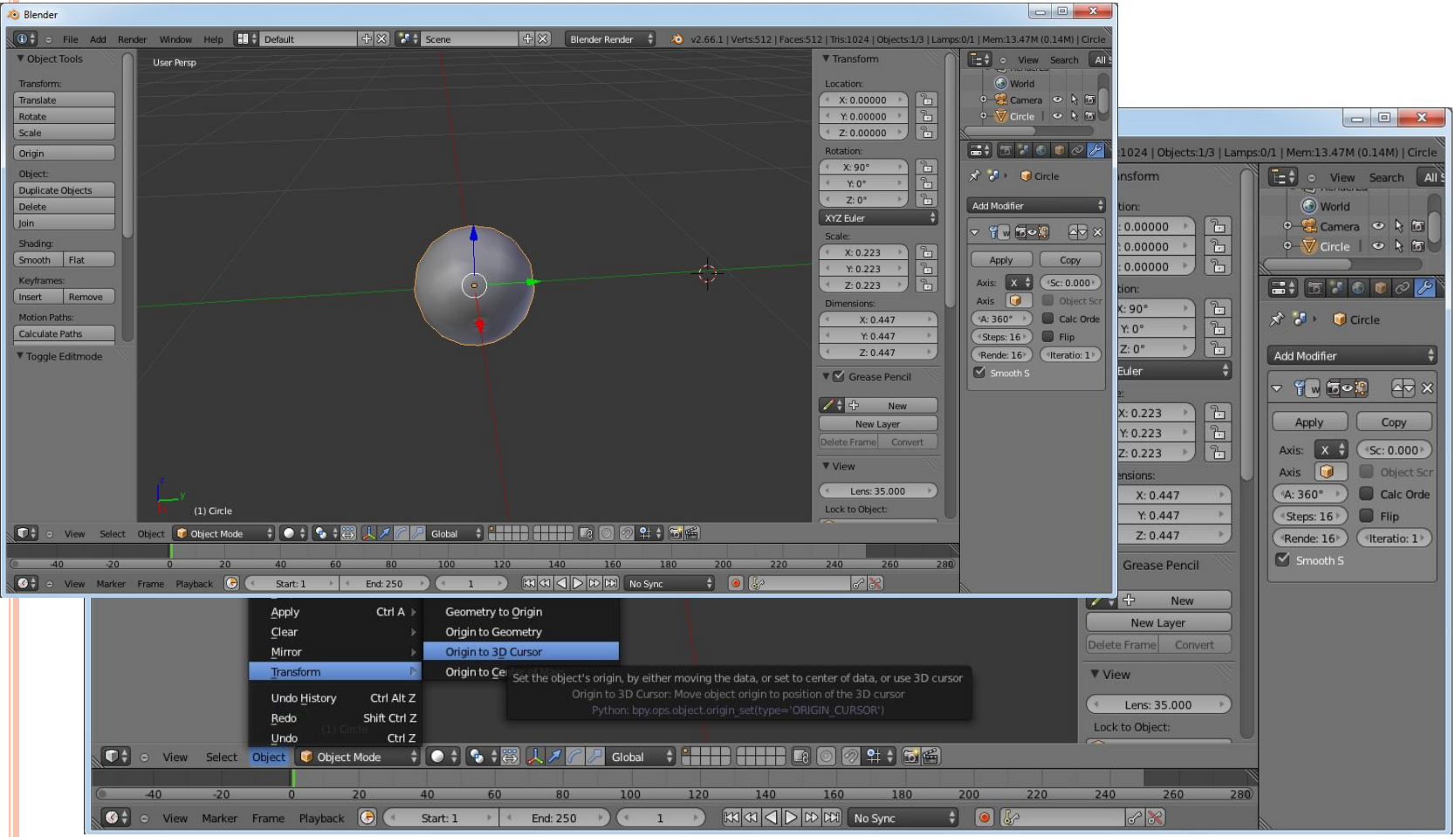
Уменьшаем диаметр окружности, поворачиваем окружность по оси Ox на 90 градусов



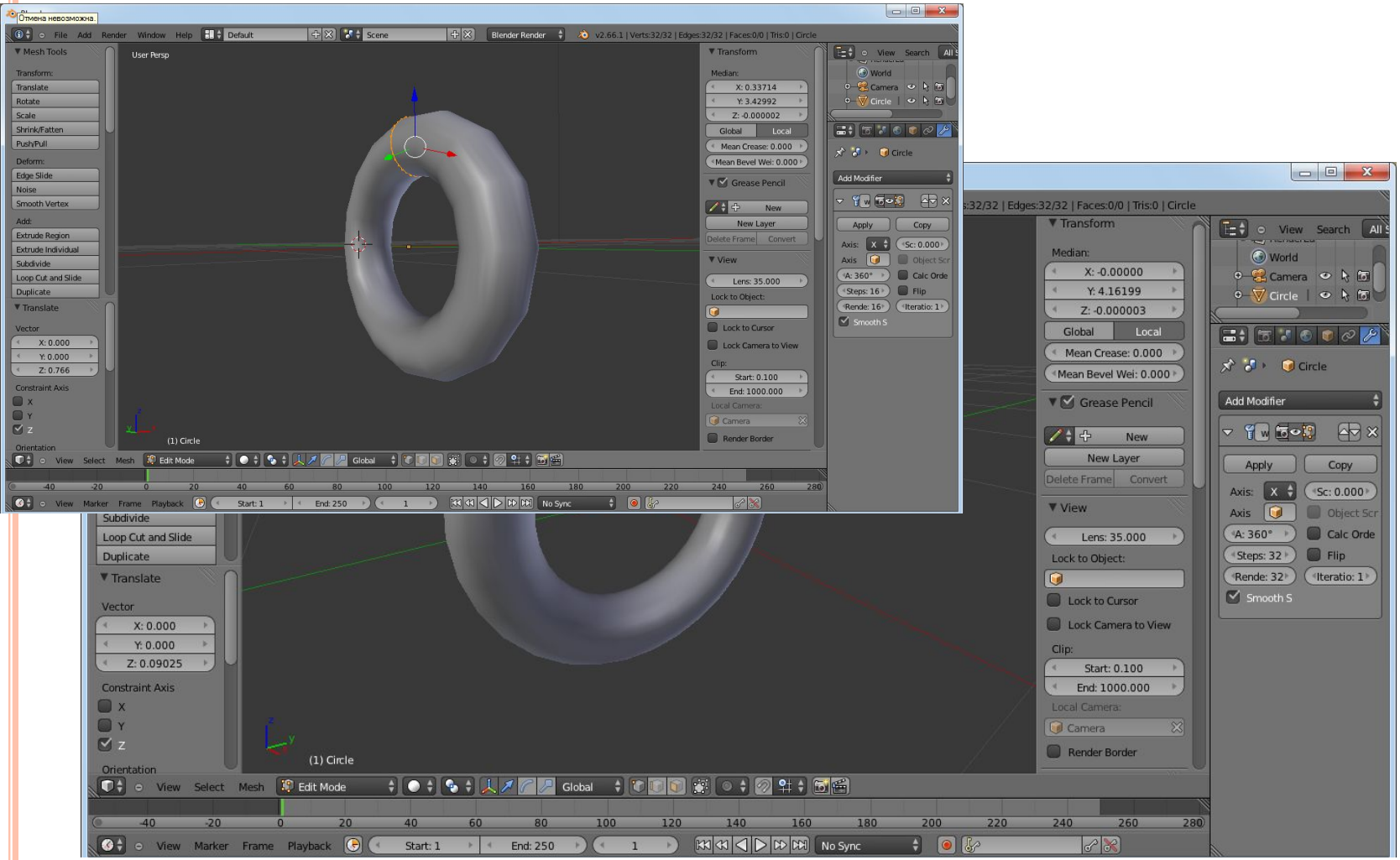
Используем модификатор screw, В результате получаем новый меш, гомеоморфный тору.



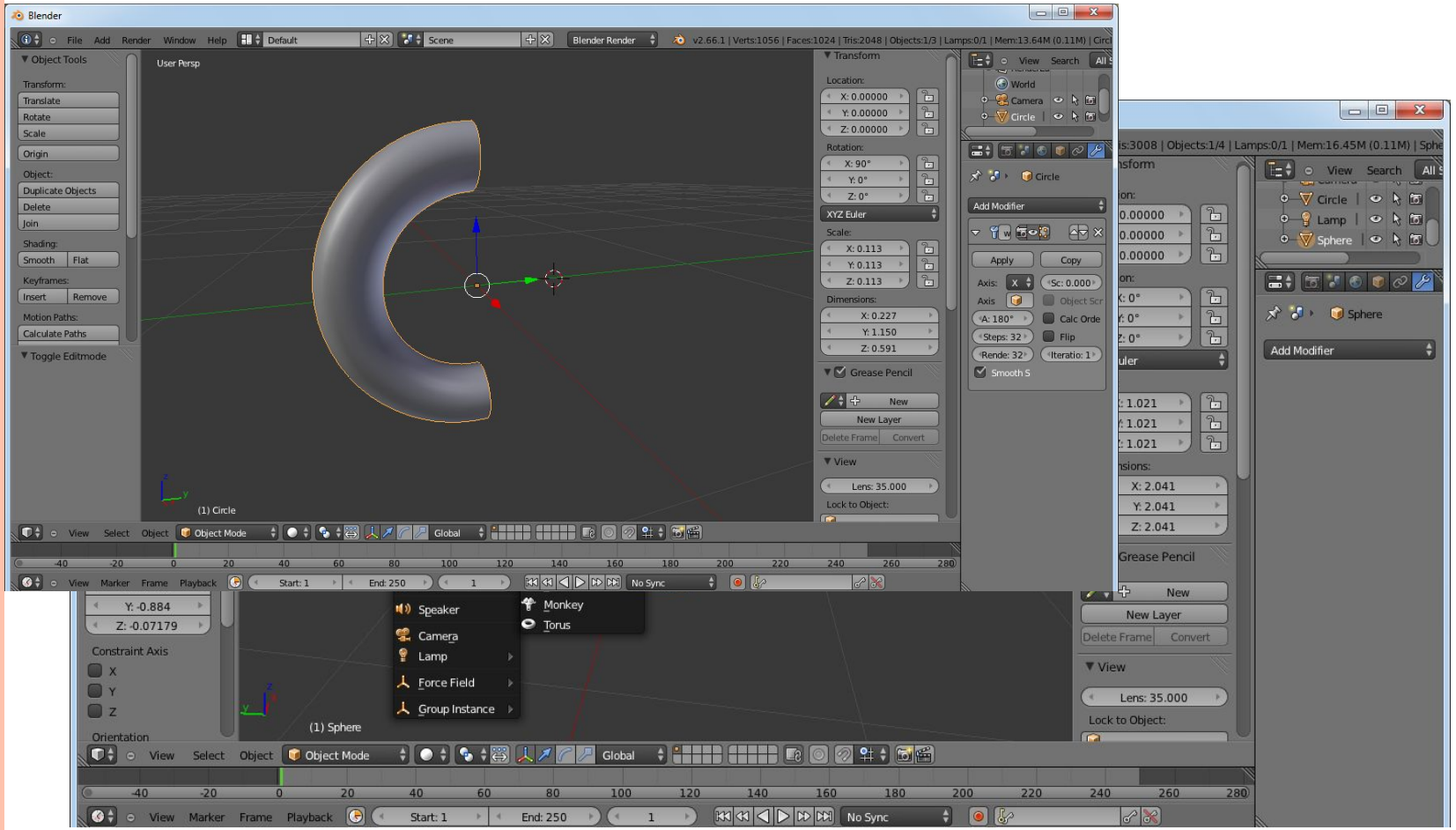
Перемешаем 3D курсор, растягиваем меш до ширины, 3D курсора.



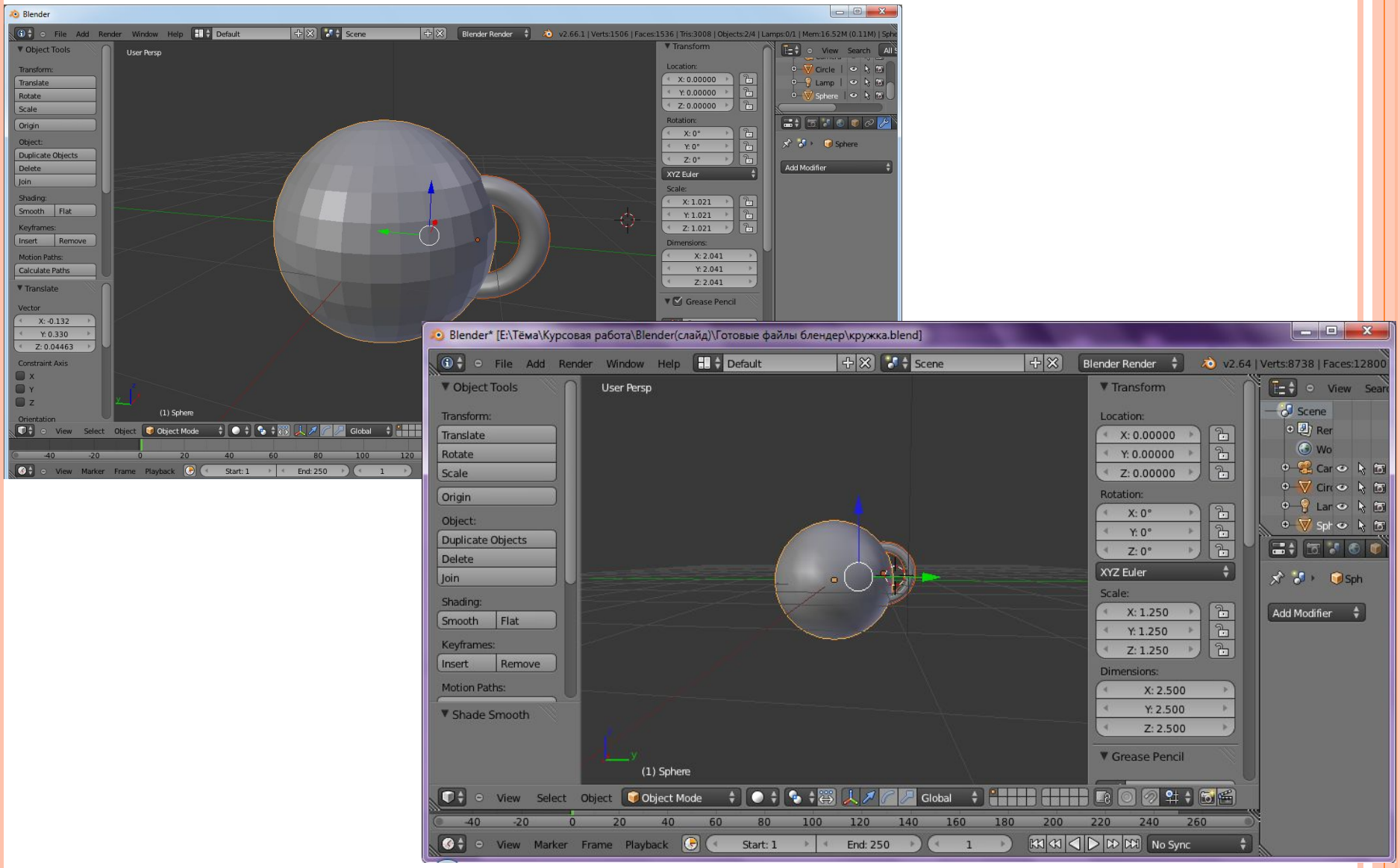
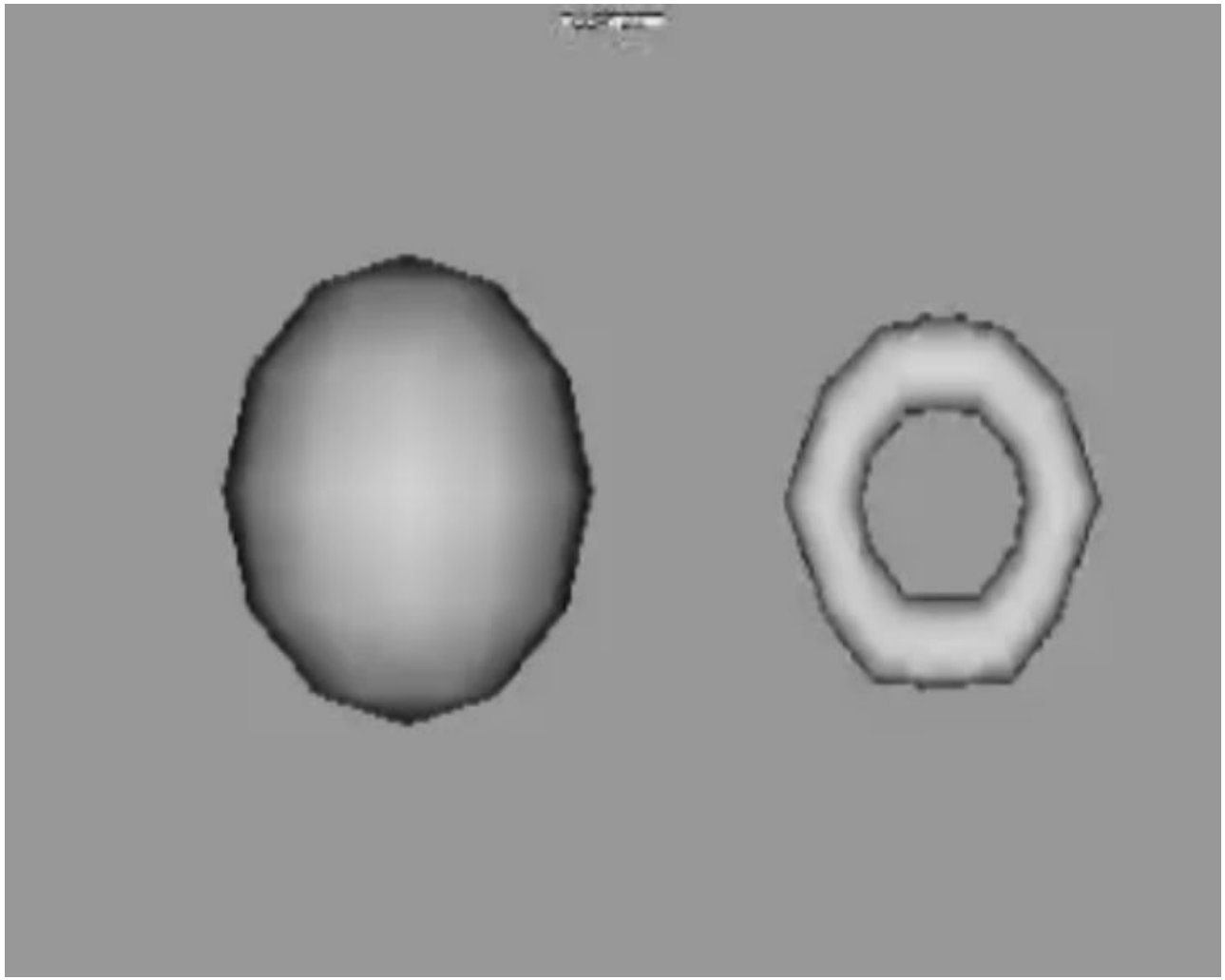
В итоге получаем «тор». Сглаживаем объект



Откорректировали параметры модификатора screw для получения ручки. Добавил меш UV Sphere



Объединяем объекты. Сглаживание конечного объекта



Анимация операции склейки