Тема 1.
Теория процентов

Вопрос 1. **Финансовые операции в рыночной экономике**

Процентная ставка (interest rate — r)

$$r = \frac{FV - PV}{PV},$$

где PV — настоящая стоимость;
FV — будущая стоимость.

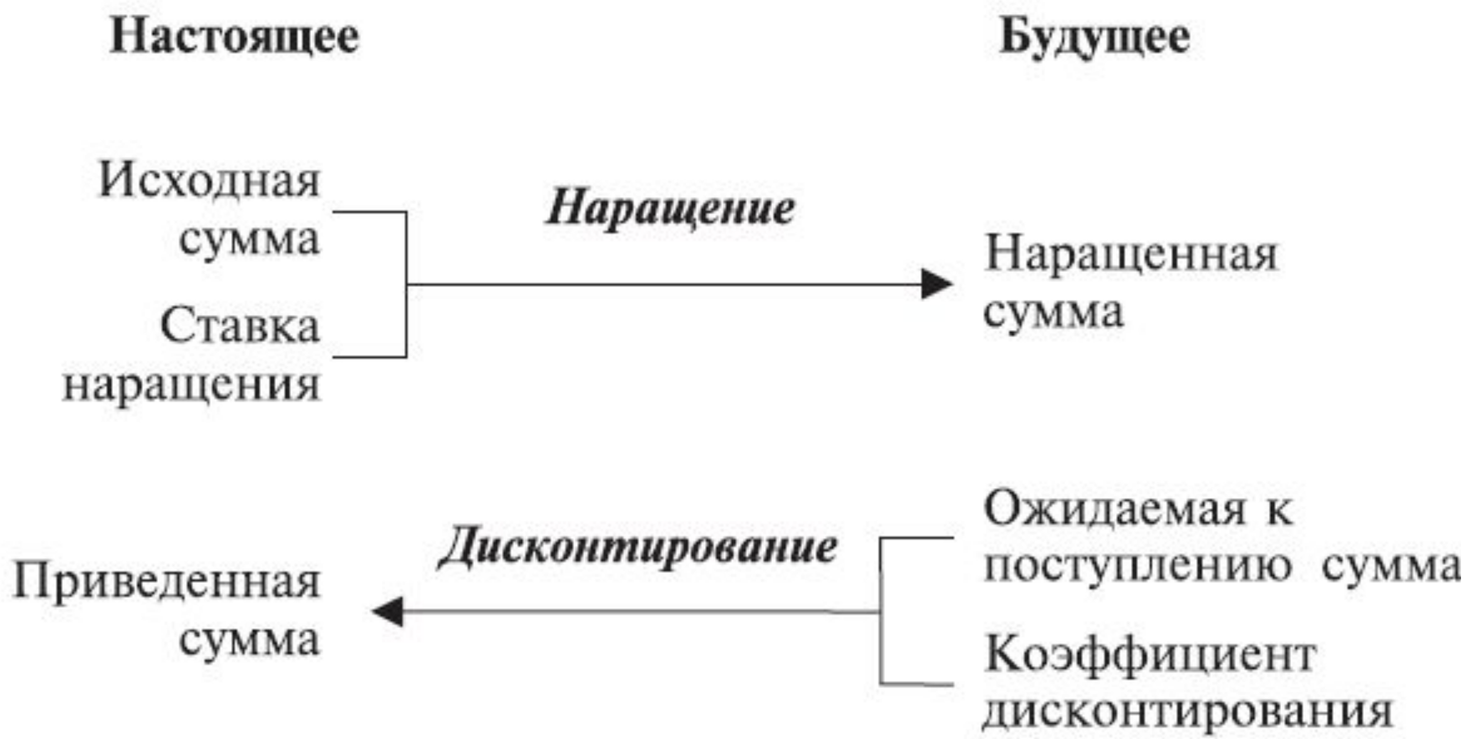
Учетная ставка (discount rate — d)

$$d = \frac{FV - PV}{FV}.$$

Дисконт-фактор: $$v = \frac{PV}{FV}$$

Индекс роста: $$B = \frac{FV}{PV}$$

В любой простейшей финансовой сделке всегда присутству ют три величины, две из которых заданы, а одна является искомой



Логика финансовых операций

Вопрос 2. Простые проценты

Наращение простыми процентами:

$$FV = PV + PV \cdot r \cdot n = PV \cdot (1 + r \cdot n),$$

где n — число периодов;
r — ставка процентов.

Величину (1+r·n) называют ***множителем (коэффициентом) наращения***

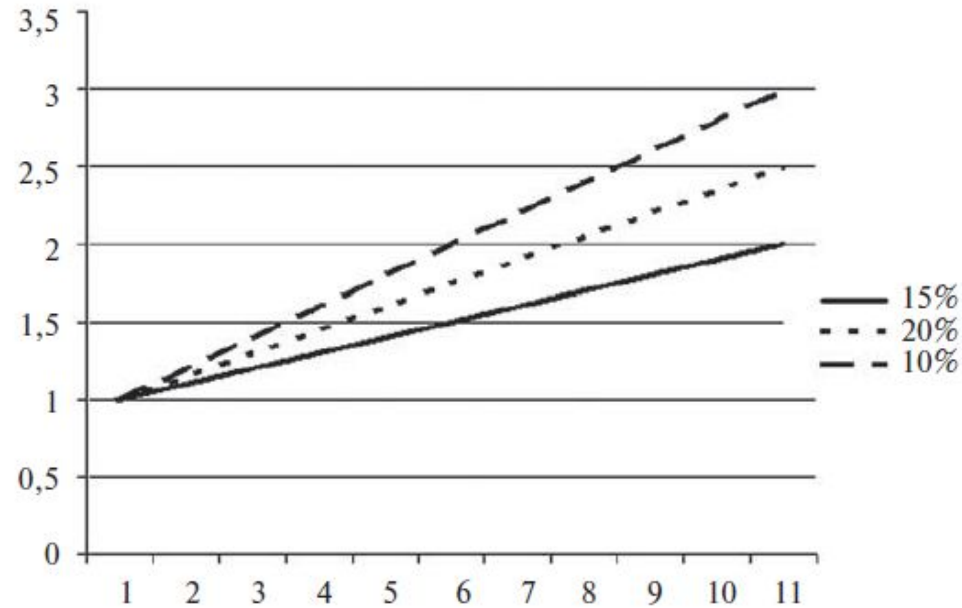


График наращения по простым процентам

В случае, если продолжительность операции не равна целому числу лет n, наращение по простым процентам определяется по формуле:

$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{t}{T} r\right),$$

где t — продолжительность финансовой операции в днях;
T — временная база — количество дней в году.

Если общий срок операции захватывает два календарных года и надо делить проценты между ними, то

$$I = I_1 + I_2 = PV \cdot n_1 \cdot r + PV \cdot n_2 \cdot r,$$

где I — проценты за весь срок финансовой операции;
n_1 и n_2 — части срока, приходящиеся на каждый календарный год.

Переменная ставка:

$$FV = PV(1 + n_1 r_2 + n_1 r_2 + \ldots + n_m r_m) = PV\left(1 + \sum_{t}^{m} n_t r_t\right).$$

Таким образом, если время финансовой операции выражено в днях, то расчет простых процентов может быть произведен одним из трех возможных способов:

- точный процент с точным числом дней, обозначаемый условно как **365/365,** или **ACT/ACT**, или «английская практика расчета». Этот способ применяется коммерческими банками многих стран, например, в Великобритании, в Португалии, США;
- обыкновенные проценты с точным числом дней, обозначаемые как **365/360,** или **ACT/360** (t — точное, $T = 360$), или «французская практика расчета». Этот способ имеет распространение во Франции, Бельгии, Испании, Швейцарии;
- обыкновенные проценты с приближенным числом дней, обозначаемые как **360/360** (t — приблизительное, считается, что в месяце 30 дней, $T = 360$). Этот способ часто называют «германская практика расчета». Он принят в практике коммерческих банков Германии, Швеции, Дании.

- Если сумма, на которую начисляются проценты изменяет свою величину, то $I = \sum PV_j n_j r_j$,

где PV_j — остаток средств на счете в момент j после очередного поступления или списания средств;

n_j — срок хранения денег (в годах) до нового изменения остатка средств на счете.

$$I = \sum PV_j n_j r_j = \frac{\sum PV_j \cdot t_j}{100} : \frac{T}{r}.$$

Как и прежде T — временная база начисления процентов (365, 366 или 360), t_j — срок в днях между последовательными изменениями остатков на счете.

Величину $\frac{\sum PV_j \cdot t_j}{100}$ называют процентным числом (interest number).

А делитель, равный отношению принятого числа дней в году к процентной ставке, — **дивизором** (interest divisor) или процентным (постоянным) делителем. Численно дивизор равен такому количеству рублей, с которого при данной процентной ставке получается 1 руб. дохода в день.

$$D' = \frac{T}{r}$$

РЕШЕНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОЦЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

Дата	Движение средств	Остаток (PVj)	Срок (tj)	Процентное число
05.фев	12	12	155	18,6
10.июл	−4	8	102	8,16
20.окт	8	16	72	11,52
31.дек		16		
Итого				38,28
Сумма процентов за весь срок равна			1,888	
Сумма на счете на конец года			17,888	

$$FV = 16 \cdot (1+0{,}5 \cdot 0{,}24+0{,}25 \cdot 0{,}27+0{,}25 \cdot 0{,}3+0{,}25 \cdot 0{,}33+0{,}25 \cdot 0{,}36) = \\ = 22{,}96 \text{ тыс. руб.}$$

Такую же наращенную сумму можно получить, если простые проценты начисляются за полтора года по ставке

$$r' = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}24 + 0{,}25 \cdot 0{,}27 + 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}33 + 0{,}25 \cdot 0{,}36}{1{,}5} = 0{,}29.$$

Действительно, $FV = 16 \cdot (1+1{,}5 \cdot 0{,}29) = 22{,}96$ тыс. руб.

Дисконтирование

$$PV = \frac{FV}{1 + n \cdot r}$$

Дробь $1/(1 + n \cdot r)$ называют *дисконтным* или *дисконтирующим* множителем. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга в окончательной его сумме.

Формула дисконтирования по простой учетной ставке имеет вид: $PV = FV \cdot (1 - n \cdot d)$.

Дисконтный множитель здесь равен $(1 - nd)$.

$$FV = \frac{PV}{1 - nd}$$

Определение срока финансовой операции и процентной ставки

- Если срок определяется в годах

$$n = \frac{FV - PV}{PV \cdot r} \quad \text{или} \quad n = \frac{FV - PV}{FV \cdot d}$$

- Если срок определяется в днях

$$t = \frac{FV - PV}{PV \cdot r} \cdot T \quad \text{или} \quad t = \frac{FV - PV}{FV \cdot d} \cdot T$$

- Определение %

$$r = \frac{FV - PV}{PV \cdot n} \quad \text{или} \quad r = \frac{FV - PV}{PV \cdot t} \cdot T$$

$$d = \frac{FV - PV}{FV \cdot n} \quad \text{или} \quad d = \frac{FV - PV}{FV \cdot t} \cdot T.$$

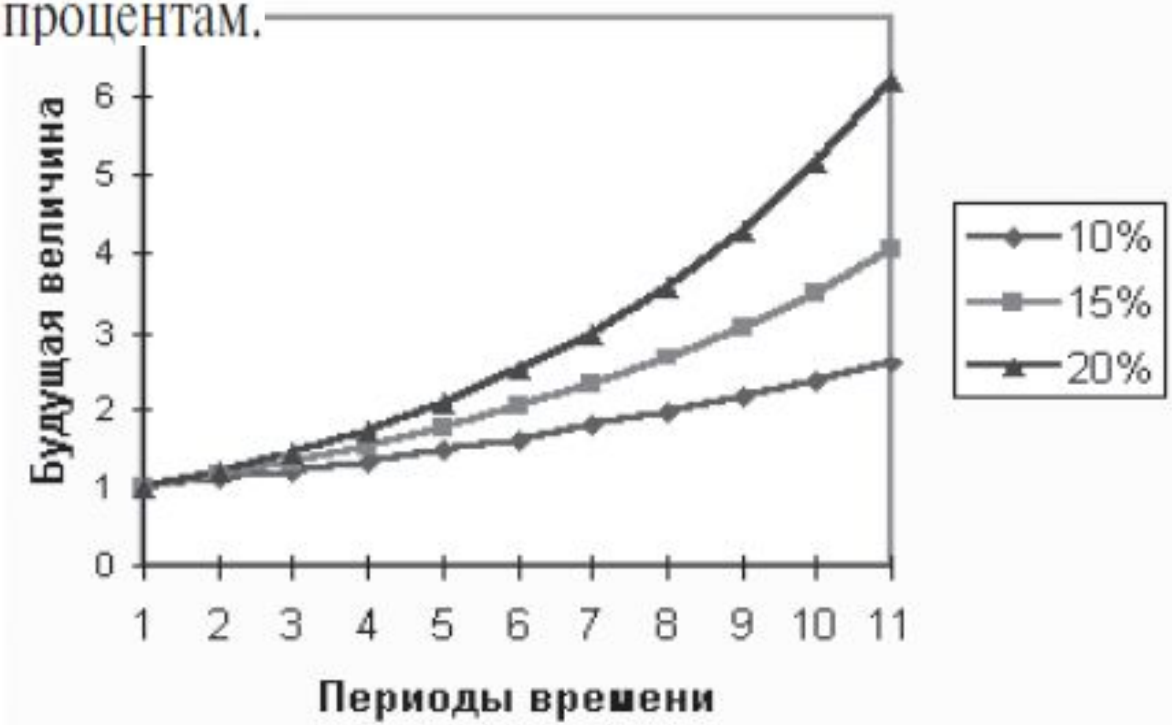
Вопрос 3. Сложные проценты

$$FV = PV \cdot (1 + r)^n$$

Сложные проценты, начисляемые за количество периодов n в целом, таковы:

$$R = FV - PV = PV \cdot ((1 + r)^n - 1).$$

Величину $(1 + r)^n = FM1(r, n)$ называют **множителем наращения** по сложным процентам.



$$FV = PV \cdot \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \cdot m},$$

где r — годовая процентная ставка;
m — число периодов начисления в году;
n — количество лет.

$$FV = PV \cdot (1 + r_1)^{n_1} \cdot (1 + r_2)^{n_2} \ \ldots . (1 + r_k)^{n_k}$$

$$FV_n = PV \prod_{i=1}^{k} (1 + r_i)^{n_i}$$

где $r_1, r_2, \ldots r_k$ — последовательность значений ставок;
$n_1, n_2, \ldots n_k$ — периоды, в течение которых «работают» соответствующие ставки.

Начисление процентов при дробном числе периодов начисления

$$FV = PV \cdot (1+r)^n$$

$$FV = PV \cdot (1+r)^a (1+b \cdot r),$$

где $n = a + b$ – срок ссуды,

a – целое число лет,

b – дробная часть года

Формулы удвоения

- Удвоение по простым процентам: $n = \frac{1}{r}$

- Удвоение по сложным процентам: $n = \frac{ln2}{\ln(1+r)}$

  «Правило 72» - нужно разделить 72 на ставку процента, выраженную целым числом. Это правило достаточно хорошо срабатывает при ставке от 3 до 18%

Чтобы узнать, когда ваш капитал утроится — нужно число 114 разделить на процентную ставку.

Эффективная ставка

$$(1+r)^n = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}$$

$$EPR = \left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1,$$

где r — номинальная ставка;

m — число периодов начисления в году.

Дисконтирование по сложной процентной ставке

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^n} = FV \cdot FM2(r, n),$$

где FV — доход, планируемый к получению через n лет;
PV — текущая (встречающиеся синонимы: приведенная, современная, сегодняшняя) стоимость, т.е. оценка величины FV с позиции текущего момента;
r — процентная ставка.

Множитель $\frac{1}{(1+r)^n}$ называется множителем

дисконтирования, показывает «сегодняшнюю» цену одной денежной единицы будущего, т.е. чему с позиции текущего момента равна одна денежная единица (например, один рубль), циркулирующая в сфере бизнеса n периодов спустя от момента расчета, при заданной процентной ставке (доходности) r.

При дисконтировании решается задача нахождения такой величины капитала PV, которая через n лет при наращении по сложным процентам по ставке r будет равна FV.

Разность D между FV и PV называется дисконтом:

$$D = FV - PV = FV - \frac{FV}{(1+r)^n} = FV \cdot (1-(1+r)^{-n})$$

Дисконтирование по сложной учетной ставке

$$PV = FV \cdot (1-d)^n,$$ где $(1-d)^n$ — дисконтный множитель.

Когда дисконтирование производится не один, а несколько раз в году, формула преобразуется:

$$PV = FV_n \cdot \left(1 - \frac{d^m}{m}\right)^{mn},$$

где n — число лет;
m — количество осуществлений операции дисконтирования в год.

Если срок, за который осуществляется дисконтирование, не равен целому числу лет, то при определении стоимости учтенного капитала используют либо сложную учетную ставку, либо смешанную схему (применяется сложная ставка для целого числа лет и простая – для дробной части года).

$$PV = FV_n (1-d)^w (1-fd),$$

где w — целое число периодов дисконтирования по сложной учетной ставке;
f — дробная часть периода;
$n = w + f$.

Определение срока ссуды при использовании сложной учетной ставки

$$n = \frac{\ln \frac{PV}{FV}}{\ln(1-d)} \qquad r = \sqrt[n]{\frac{FV}{PV}}$$

Определение эффективной учетной ставки

Эффективная годовая учетная ставка обеспечивает тот же результат, что и дисконтирование несколько раз в году по номинальной учетной ставке, деленной на число периодов дисконтирования.

Эффективная учетная ставка определяется и как ставка, обеспечивающая переход от исходной суммы к учтенной при однократном дисконтировании за базовый период (например, за год), т.е. не используется явным образом номинальная учетная ставка. Формулы определения эффективной годовой процентной ставки имеют вид:

$$d_{ef} = 1 - \left(1 - \frac{d^m}{m}\right)^m, \qquad d_{ef} = 1 - \left(\frac{P}{F_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Непрерывные проценты

$$FV = PV \cdot e^{\delta \cdot n},$$

где e — основание натурального логарифма (≈2,71828...),
$e^{\delta \cdot n}$ — множитель наращения непрерывных процентов.

$$PV = FV \cdot e^{-\delta \cdot n} = \frac{FV}{e^{\delta \cdot n}},$$

где $1/e^{\delta \cdot n}$ дисконтный множитель по силе роста.

Вопрос 4. Учет инфляции в принятии финансовых решений

- индекс инфляции *Iи = (1 + α)*.
- через n лет индекс инфляции Iи = $(1 + \alpha)^n$.
- Iи = $(1 + \alpha)^{n_a} * (1 + n_b\alpha)$, где $n = n_a + n_b$, n_a — целое число лет, n_b — оставшаяся нецелая часть года.
- Iи = $(1 + \alpha_m)^m$.

Формула Фишера

r_α: $r_\alpha = r + \alpha + r \cdot \alpha$

($\alpha + r \cdot \alpha$) является величиной, которую необходимо прибавить к реальной ставке доходности для компенсации инфляционных потерь. Эта величина называется *инфляционной премией*.

- $r_c = (1 + r_{c\alpha})/(1 + \alpha) - 1$
- $r_{c\alpha}$ — ставка сложного ссудного процента, учитывающая инфляцию;
- Формула имеет следующий экономический смысл:
- 1) если $r_{c\alpha} = \alpha$, т. е. доходность и уровень инфляции равны, то $r_c = 0$ и наращения не происходит и доход поглощается инфляцией;
- 2) если $r_{c\alpha} < \alpha$, то $r_c < 0$ и операция приносит убытки;
- 3) если $r_{c\alpha} > \alpha$, то $r_c > 0$ и происходит реальный рост вложенного капитала.