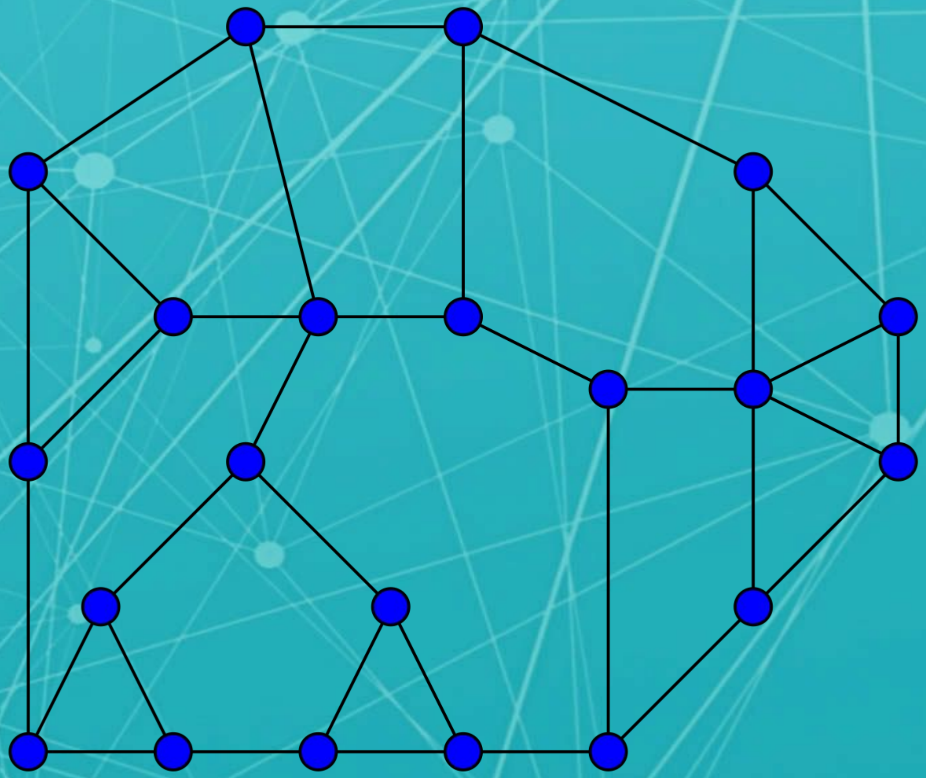
Алгоритмы работы с графами с использованием MapReduce

РТУ МИРЭА

Москва, 2020

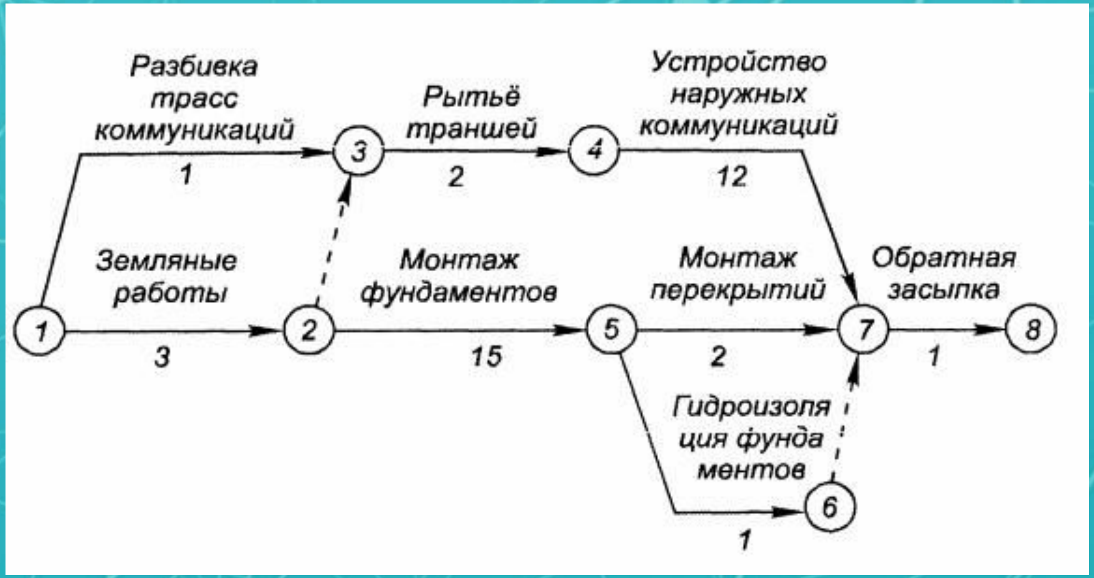
ГРАФ

- С их помощью часто моделируют
  - – библиографические сети
  - – сети белок-белковых взаимодействий
  - – Социальные сети
  - – Структура дорог/жд/метро и т.д.
- G = (V,E), где
  - – V представляет собой множество вершин (nodes)
  - – E представляет собой множество ребер (edges/links)
  - – Ребра и вершины могут содержать дополнительную информацию
- Различные типы графов
  - – Ориентированные и неориентированные
  - – С циклами и без



Задачи и проблемы на графах

- Поиск кратчайшего пути
  - – Роутинг трафика
  - – Навигация маршрута
- Поиск минимального остовного дерева
  - – Телекоммуникационные компании
- Поиск максимального потока (Max Flow)
  - – Структура компьютеров и серверов Интернет
- Bipartite matching
  - – Соискатели и работодатели
- Поиск “особенных” вершин и/или групп вершин графа
  - – Коммьюнити пользователей
- PageRank



Графы и MapReduce

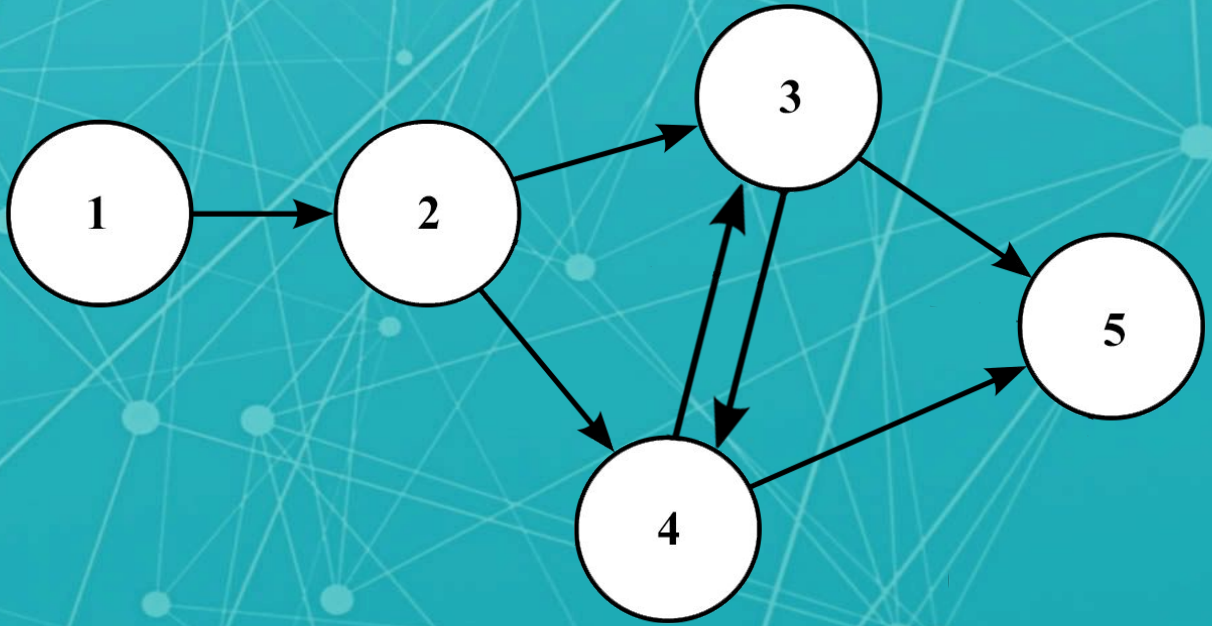
- Большой класс алгоритмов на графах включает
  - Выполнение вычислений на каждой ноде
  - Обход графа
- Ключевые вопросы
  - Как представить граф на MapReduce?
  - Как обходить граф на MapReduce?

Матрица смежности

Граф представляется как матрица M размером n x n

- $n = |V|$
- $M_{ij} = 1$ означает наличие ребра между i и j

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	1
5	0	0	0	0	0



Списки смежности

- Берем матрицу смежности и убираем все нули

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	1
5	0	0	0	0	0

1: 2

2: 3, 4

3: 4, 5

4: 3, 5

5:

Достоинства и недостатки

Матрицы смежности

- +
  - Удобство математических вычислений
  - Перемещение по строкам и столбцами соответствует переходу по входящим и исходящим ссылкам
- -
  - Матрица разреженная, множество лишних нулей
  - Расходуется много лишнего места

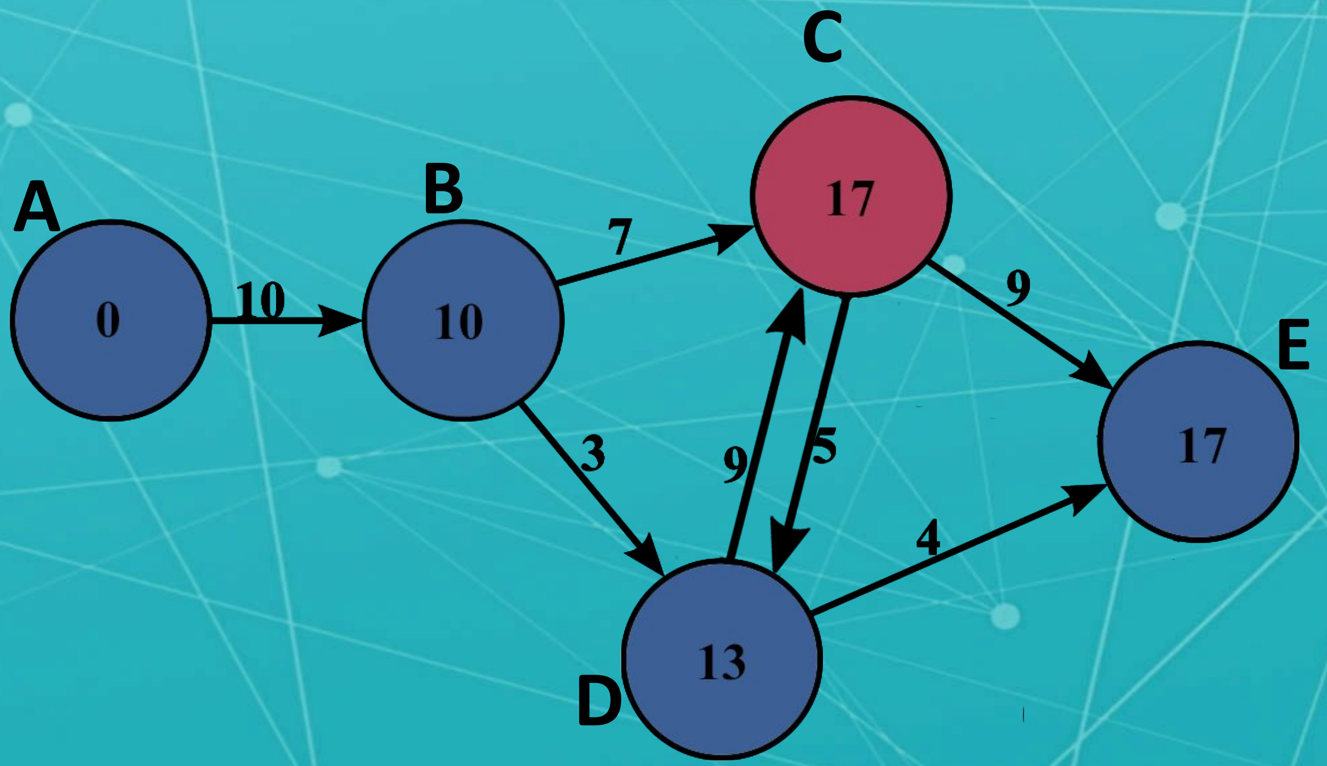
Списки смежности

- +
  - Намного более компактная реализация
  - Легко найти все исходящие ссылки для ноды
- -
  - Намного сложнее подсчитать входящие ссылки

Задача поиска кратчайшего пути

- Найти кратчайший путь от исходной вершины до заданной (или несколько заданных)
- Также, кратчайший может означать с наименьшим общим весом всех ребер (Single-Source Shortest Path)
- Способы такого обхода:
  - Алгоритм Дейкстры
  - MapReduce: параллельный поиск в ширину (Breadth-First Search)

Задача поиска кратчайшего пути . Алгоритм Дейкстры

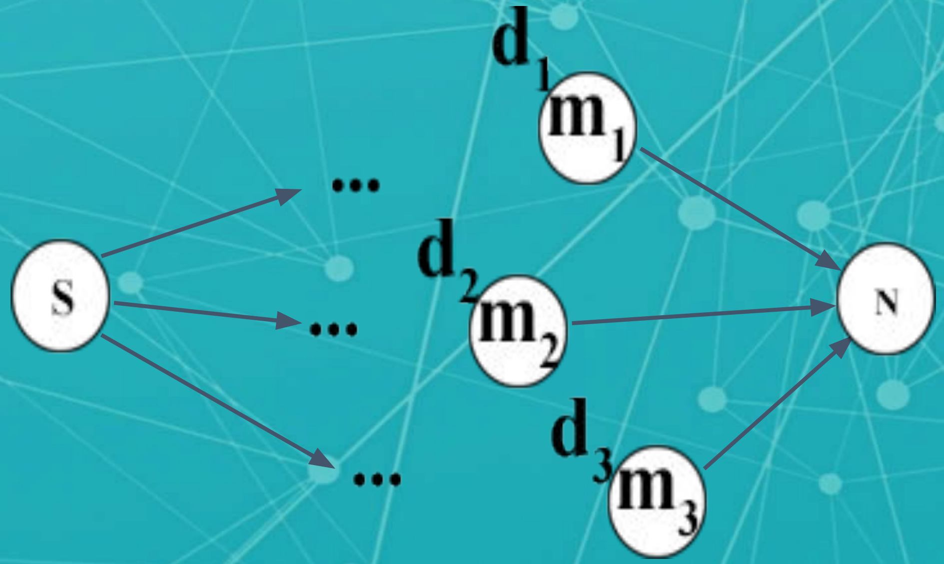



```
Dijkstra(G,w, s)
    d[s] ← 0
    for all vertex v ∈ V do
        d[v] ← ∞
    Q ← {V }
    while Q = Ø do
        u ←ExtractMin(Q)
        for all vertex v ∈ u.AdjacencyList do
            if d[v] > d[u] + w(u, v) then
                d[v] ← d[u] + w(u, v)
```

Поиск кратчайшего пути

- Рассмотрим простой случай, когда вес всех ребер одинаков и равен единице
- Интуитивно:
  - Определим: в вершину b можно попасть из вершины a только если b есть в списке соседей a, т.е. DistanceTo(b) = 1
  - Для всех вершин n, достижимых из других множеств M:

DistanceTo(n) = 1 + min(DistanceTo(m), m ∈ M)

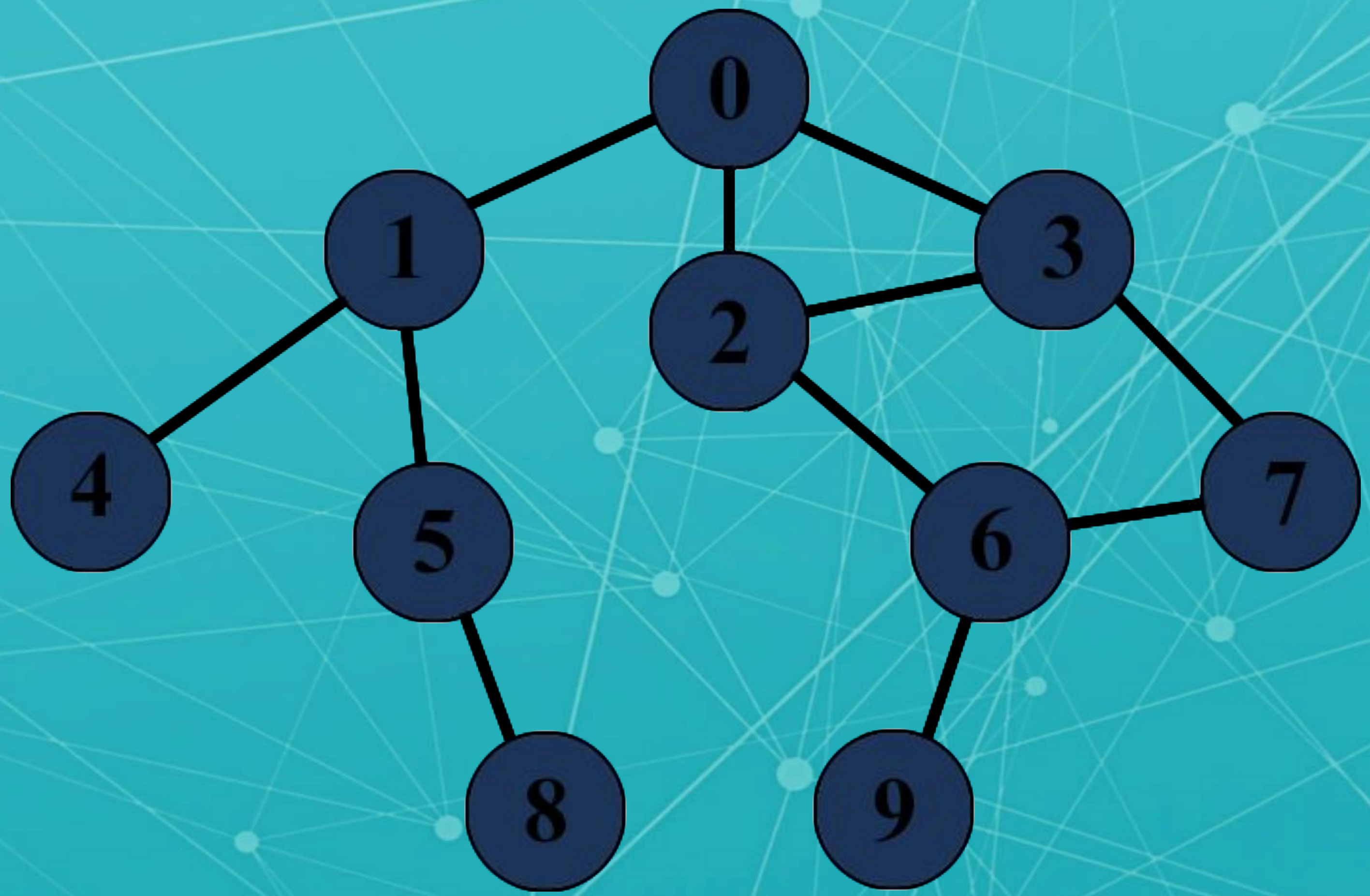


Алгоритм breadth-first search

```
BFS(start_node, goal_node) {
 for(all nodes i) visited[i] = false; // изначально список посещённых узлов пуст
 queue.push(start_node);              // начиная с узла-источника
 visited[start_node] = true;
 while(! queue.empty() ) {            // пока очередь не пуста
  node = queue.pop();                 // извлечь первый элемент в очереди
  if(node == goal_node) {
   return true;                       // проверить, не является ли текущий узел целевым
  }
  foreach(child in expand(node)) {    // все преемники текущего узла, ...
   if(visited[child] == false) {      // ... которые ещё не были посещены ...
    queue.push(child);                // ... добавить в конец очереди...
    visited[child] = true;            // ... и пометить как посещённые
   }
  }
 }
 return false;                        // Целевой узел недостижим
}
```

Параллельный BFS

- Представление данных:
  – Key: вершина n
  – Value: d (расстояние от начала), adjacency list (вершины, доступные из n)
  – Инициализация: для всех вершин, кроме начальной, $d = \infty$
- Mapper:
  – $\forall m \in$ adjacency list: emit $(m, d + 1)$
- Sort/Shuffle
  – Сгруппировать расстояния по достижимым вершинам
- Reducer:
  – Выбрать путь с минимальным расстоянием для каждой достижимой вершины
  – Дополнительные проверки для отслеживания актуального пути


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Параллельный BFS

```
class Mapper
    method Map(nid n, node N)
        d ← N.Distance
        Emit(nid n, N)                                  ▷ Pass along graph structure
        for all nodeid m ∈ N.AdjacencyList do
            Emit(nid m, d + 1)                          ▷ Emit distances to reachable nodes

class Reducer
    method Reduce(nid m, [d_1, d_2, ...])
        d_min ← ∞
        M ← ∅
        for all d ∈ counts [d_1, d_2, ...] do
            if IsNode(d) then
                M ← d                                   ▷ Recover graph structure
            else if d < d_min then                      ▷ Look for shorter distance
                d_min ← d
        M.Distance ← d_min                              ▷ Update shortest distance
        Emit(nid m, node M)
```

BFS: итерации

• Каждая итерация задачи MapReduce смещает границу продвижения по графу (frontier) на один “hop”

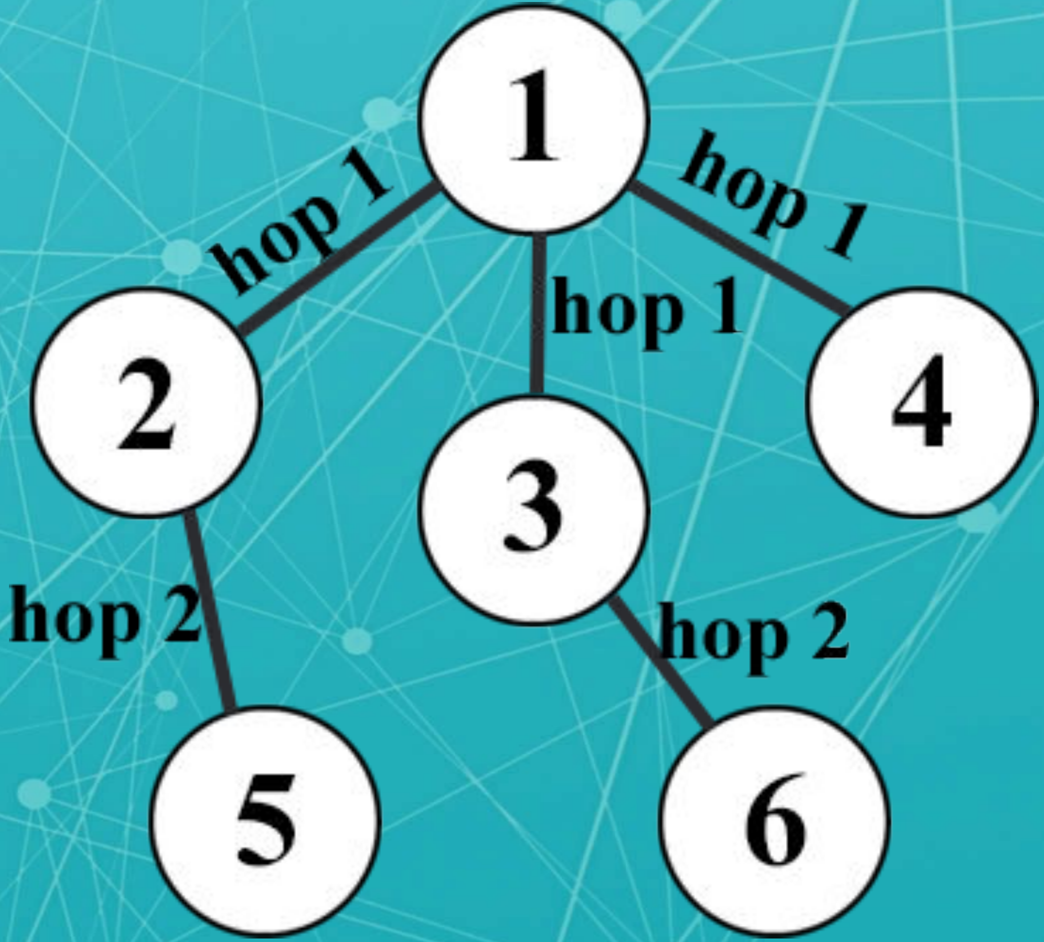
– Последующие операции включают все больше и больше посещенных вершин, т.к. граница (frontier) расширяется

– Множество итераций требуется для обхода всего графа

• Сохранение структуры графа

– Проблема: что делать со списком смежных вершин (adjacency list)?

– Решение: Mapper также пишет (n, adjacency list)



BFS: критерий завершения

- Как много итераций нужно для завершения параллельного BFS?
- Когда первый раз посетили искомую вершину, значит найден самый короткий путь?
- Ответ на вопрос
  - Равно диаметру графа (наиболее удаленные друг от друга вершины)
- Практическая реализация
  - Внешняя программа-драйвер для проверки оставшихся вершин с дистанцией ∞
  - Можно использовать счетчики из Hadoop MapReduce

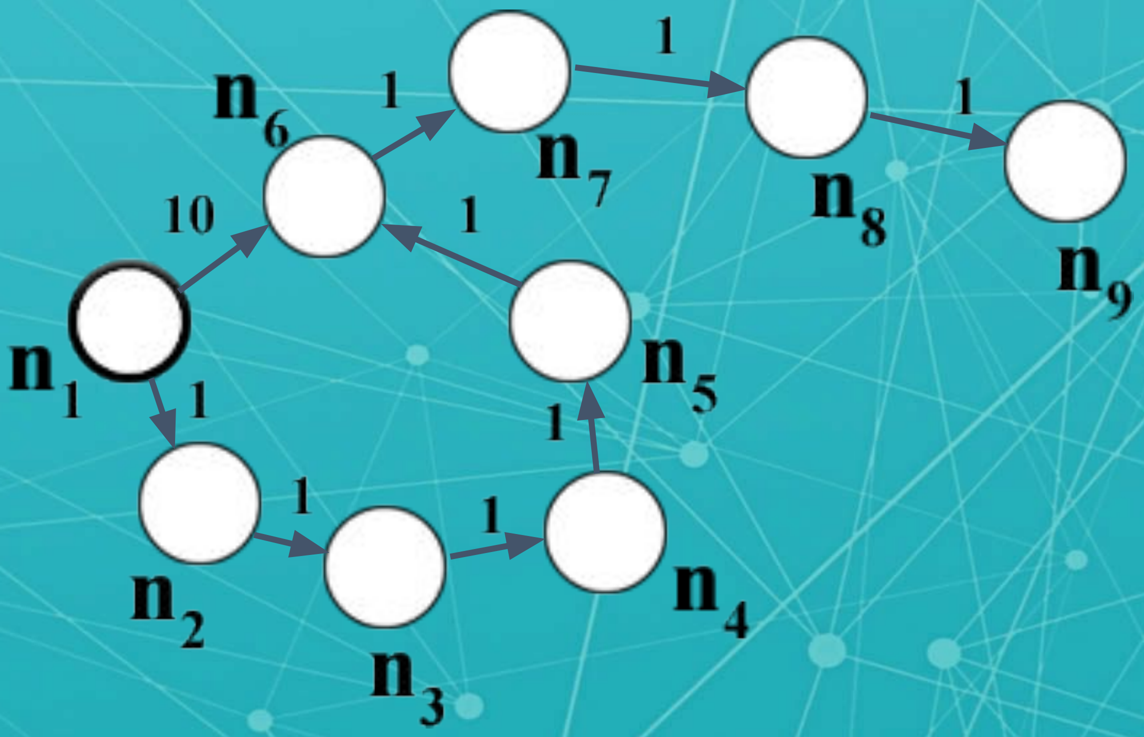
BFS vs Дейкстра

- Алгоритм Дейкстры более эффективен
  - На каждом шаге используются вершины только из пути с минимальным весом
  - Нужна дополнительная структура данных (priority queue)
- MapReduce обходит все пути графа параллельно
  - Много лишней работы (brute-force подход)
  - Полезная часть выполняется только на текущей границе обхода

BFS: Weighted Edges

- Добавим положительный вес каждому ребру
- Простая доработка: добавим вес w для каждого ребра в список смежных вершин
  - В mapper, emit $(m, d + w_p)$ вместо $(m, d + 1)$ для каждой вершины m

BFS Weighted: сложности



BFS Weighted: критерий завершения

Как много итераций нужно для завершения параллельного BFS (взвешенный граф)?

- В худшем случае: N – 1
- В реальном мире ~ диаметру графа
- Практическая реализация
  - Итерации завершаются, когда минимальный путь у каждой вершины больше не меняется
  - Для этого можно также использовать счетчики в MapReduce

Графы и MapReduce

- Большое количество алгоритмов на графах включает в себя:
  - Выполнение вычислений, зависимых от особенностей ребер и вершин
  - Вычисления, основанные на обходе графа
- Основной алгоритм:
  - Представлять графы в виде списка смежности
  - Производить локальные вычисления на маппере
  - Передавать промежуточные вычисления по исходящих ребрам, где ключом будет целевая вершина
  - Выполнять агрегацию на редьюсере по данным из входящих вершин
  - Повторять итерации до выполнения критерия сходимости, который контролируется внешним драйвером
  - Передавать структуру графа между итерациями

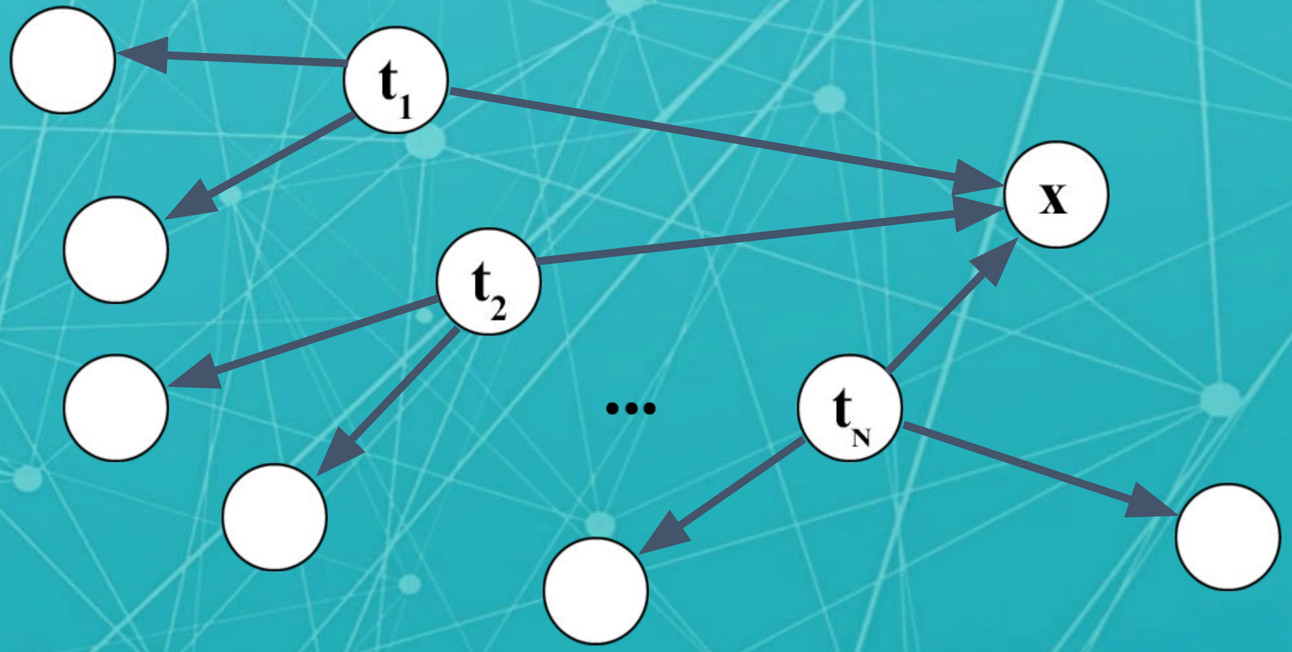
PageRank

- Модель блуждающего веб-серфера
  - – Пользователь начинает серфинг на случайной веб-странице
  - – Пользователь произвольно кликает по ссылкам, тем самым перемещаясь от страницы к странице
- PageRank
  - – Характеризует кол-во времени, которое пользователь провел на данной странице
  - – Математически – это распределение вероятностей посещения страниц
- PageRank определяет понятие важности страницы
  - – Соответствует человеческой интуиции?
  - – Одна из тысячи фич, которая используется в веб-поиске

Определение

Дана страница x, на которую указывают ссылки t1…tn, где

- C(t) степень out-degree для t
- α вероятность случайного перемещения (random jump)
- N общее число вершин в графе



$$PR(x) = \alpha\left(\frac{1}{N}\right) + (1-\alpha)\sum_{i=1}^{n}\frac{PR(t_i)}{C(t_i)}$$

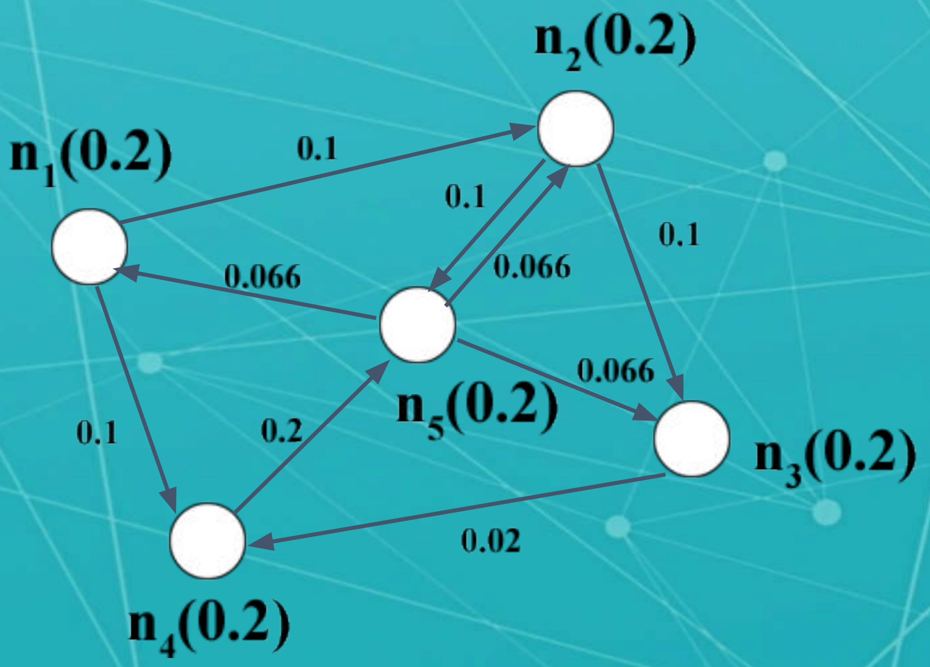
Вычисление PageRank без PageRank

- PageRank может быть рассчитан итеративно
- Примерный алгоритм:
    - Начать с некоторыми заданными значения PRi
    - Каждая страница распределяет PRi “кредит” всем страниц, на которые с нее есть ссылки
    - Каждая страница добавляет весь полученный “кредит” от страниц, которые на нее ссылаются, для подсчета PRi+1
    - Продолжить итерации пока значения не сойдутся

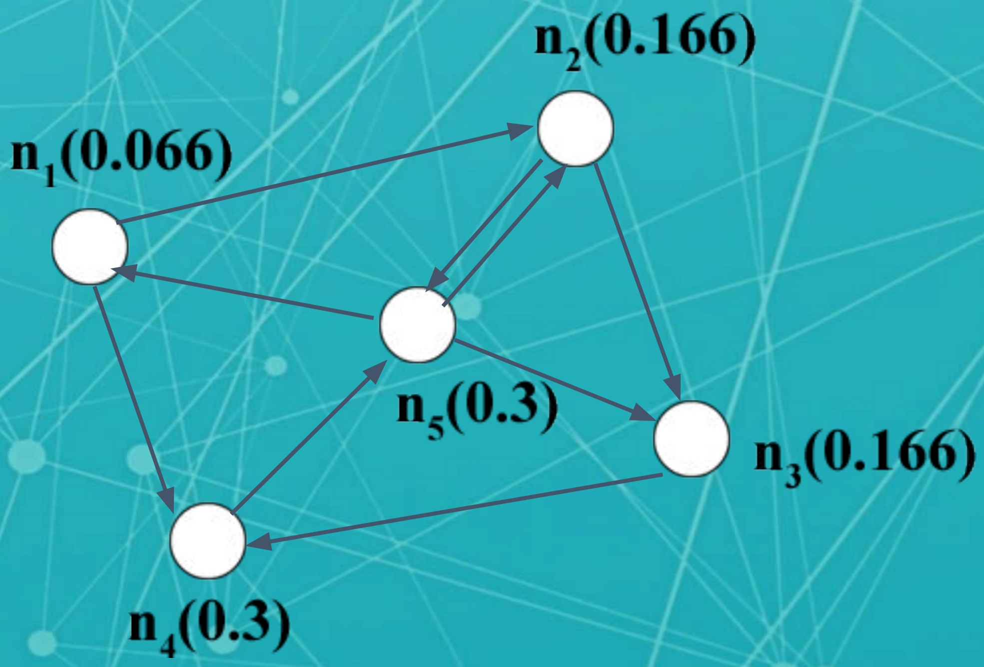
Упрощения для PageRank

- Случайный переход и “подвисшие” вершины
  - Нет фактора случайного перехода (random jump)
  - Нет “подвисших” вершин
- Затем, добавим сложностей
  - Зачем нужен случайный переход?
  - Откуда появляются “подвисшие” вершины?

Итерация 1

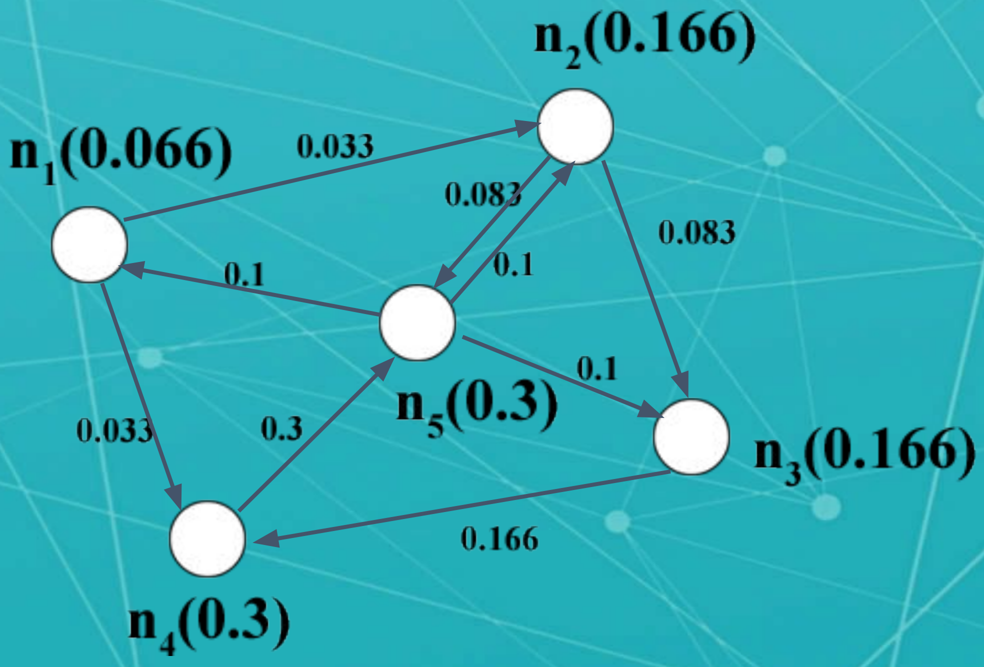


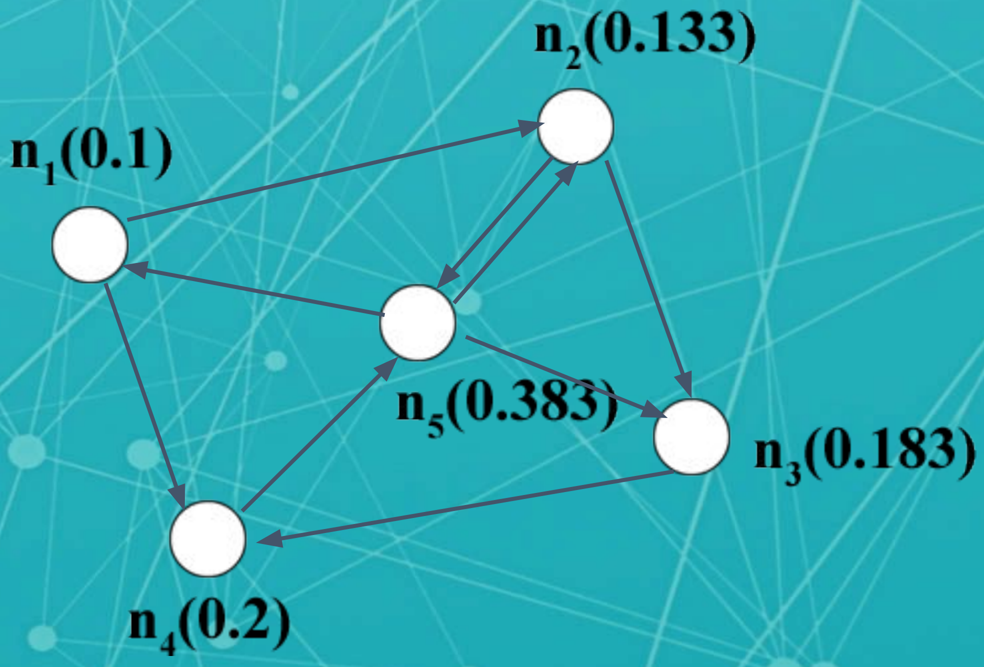
n1(0.2)
n2(0.2)
n3(0.2)
n4(0.2)
n5(0.2)
0.1
0.1
0.066
0.1
0.066
0.066
0.1
0.2
0.02



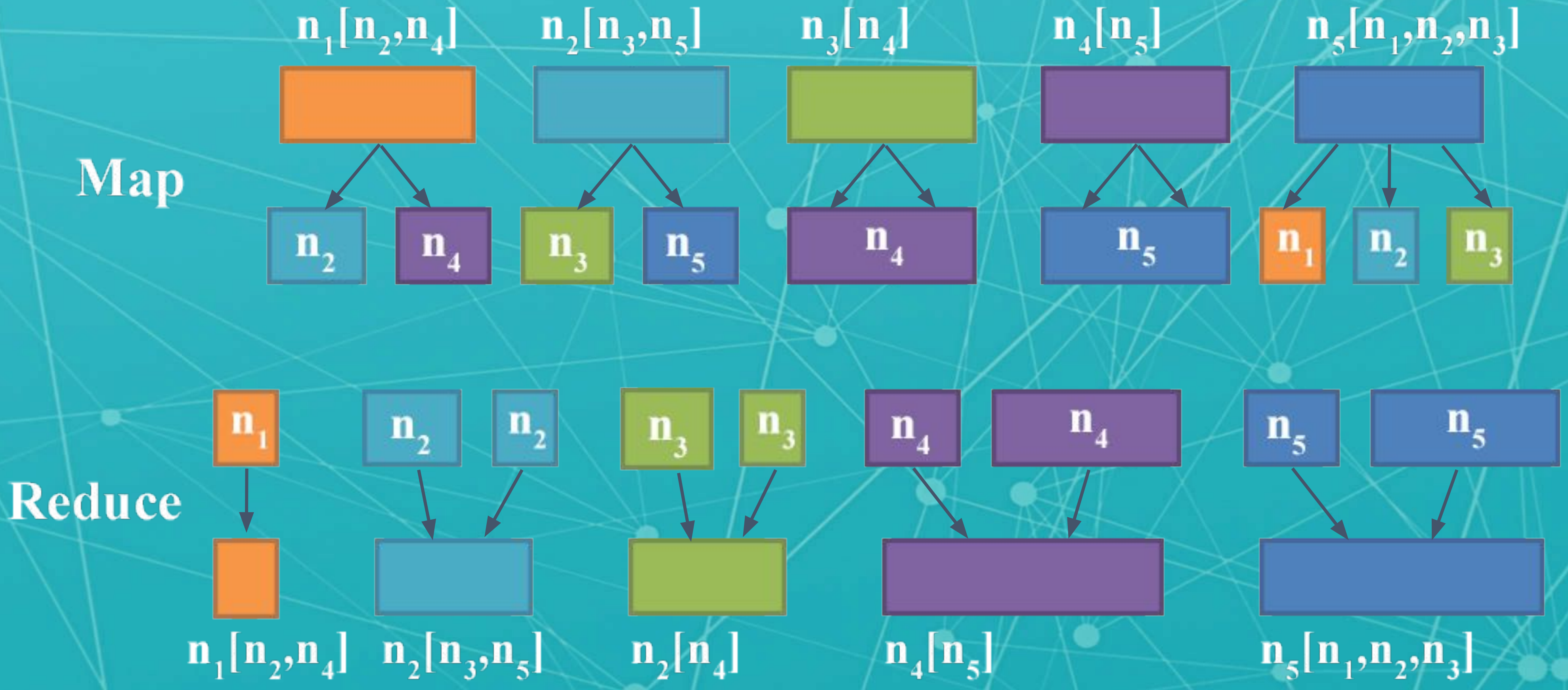
n1(0.066)
n2(0.166)
n3(0.166)
n4(0.3)
n5(0.3)

Итерация 2


n1(0.066)
n2(0.166)
n3(0.166)
n4(0.3)
n5(0.3)
0.033
0.083
0.1
0.083
0.1
0.1
0.033
0.3
0.166


n1(0.1)
n2(0.133)
n3(0.183)
n4(0.2)
n5(0.383)

PageRank на MapReduce



Псевдокод на MapReduce

```
class Mapper
    method Map(nid n, node N)
        p ← N.PageRank/|N.AdjacencyList|
        Emit(nid n, N)                                  ▷ Pass along graph structure
        for all nodeid m ∈ N.AdjacencyList do
            Emit(nid m, p)                              ▷ Pass PageRank mass to neighbors

class Reducer
    method Reduce(nid m, [p1, p2, . . .])
        M ← ∅
        for all p ∈ counts [p1, p2, . . .] do
            if IsNode(p) then
                M ← p                                   ▷ Recover graph structure
            else
                s ← s + p                               ▷ Sum incoming PageRank contributions
        M.PageRank ← s
        Emit(nid m, node M)
```

Полный PageRank

- Две дополнительные сложности
  - Как правильно обрабатывать “подвешенные” вершины?
  - Как правильно определить фактор случайного перехода (random jump)?
- Решение :
  - Второй проход для перераспределения “оставшегося” PageRank и учитывания фактор случайного перехода:

$$p' = \alpha \left(\frac{1}{N}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{m}{N} + p\right)$$

  - p – значение PageRank полученное “до”, p' – обновленное значение PageRank
  - N - число вершин графа
  - m – “оставшийся” PageRank

Критерии сходимости PageRank

- Продолжать итерации пока значения PageRank не перестанет изменяться
- Фиксированное число итераций

Демонстраци
я