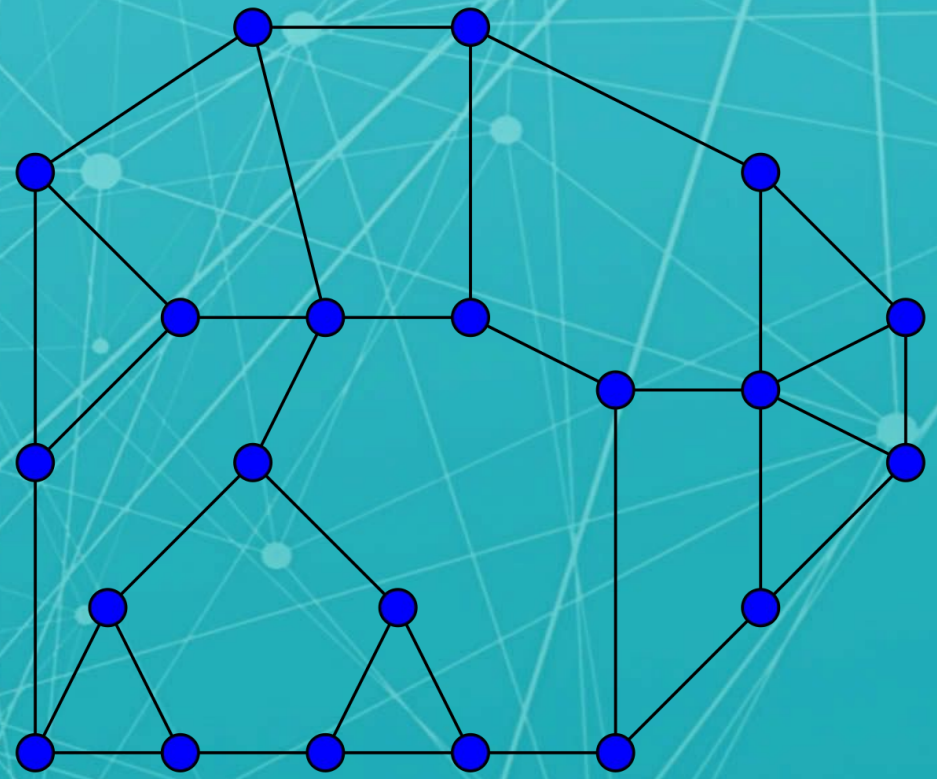
# Алгоритмы работы с графами с использованием MapReduce

РТУ МИРЭА

Москва, 2020

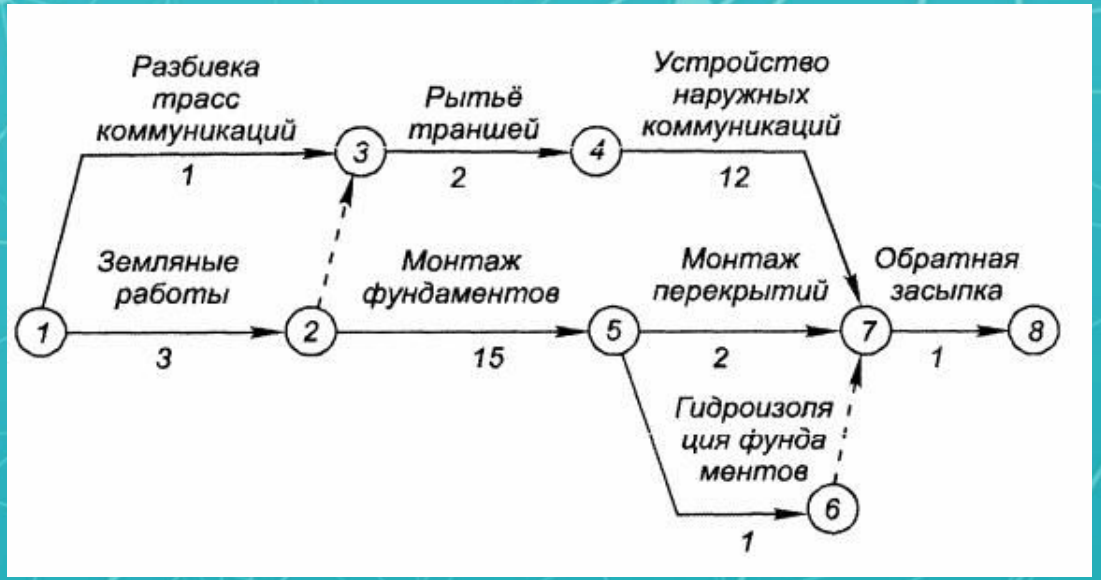
# ГРАФ

- С их помощью часто моделируют
  - библиографические сети
  - сети белок-белковых взаимодействий
  - Социальные сети
  - Структура дорог/жд/метро и т.д.
- G = (V,E), где
  - V представляет собой множество вершин (nodes)
  - E представляет собой множество ребер (edges/links)
  - Ребра и вершины могут содержать дополнительную информацию
- Различные типы графов
  - Ориентированные и неориентированные
  - С циклами и без



# Задачи и проблемы на графах

- Поиск кратчайшего пути
  - Роутинг трафика
  - Навигация маршрута
- Поиск минимального остовного дерева
  - Телекоммуникационные компании
- Поиск максимального потока (Max Flow)
  - Структура компьютеров и серверов Интернет
- Bipartite matching
  - Соискатели и работодатели
- Поиск “особенных” вершин и/или групп вершин графа
  - Коммьюнити пользователей
- PageRank



# Графы и MapReduce

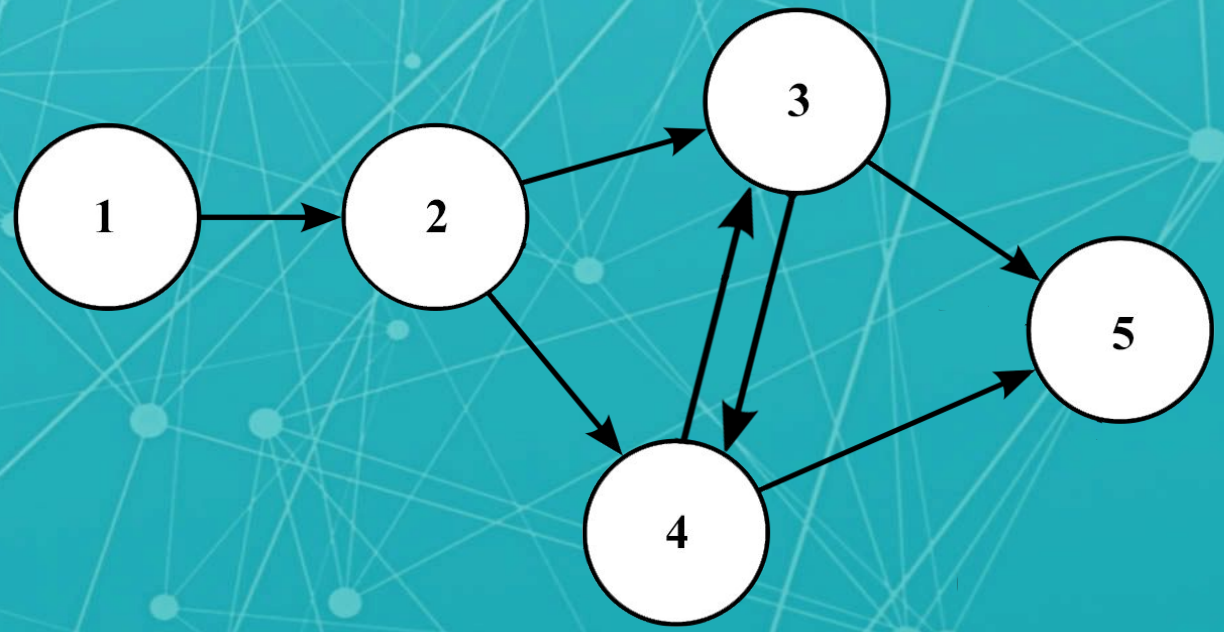
- Большой класс алгоритмов на графах включает
  - Выполнение вычислений на каждой ноде
  - Обход графа
- Ключевые вопросы
  - Как представить граф на MapReduce?
  - Как обходить граф на MapReduce?

# Матрица смежности

Граф представляется как матрица M размером n x n

- n = |V|
- $M_{ij}$ = 1 означает наличие ребра между i и j

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |



# Списки смежности

- Берем матрицу смежности и убираем все нули

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

1: 2

2: 3, 4

3: 4, 5

4: 3, 5

5:

# Достоинства и недостатки

## Матрицы смежности

- \+
  - – Удобство математических вычислений
  - – Перемещение по строкам и столбцами соответствует переходу по входящим и исходящим ссылкам
- \-
  - – Матрица разреженная, множество лишних нулей
  - – Расходуется много лишнего места

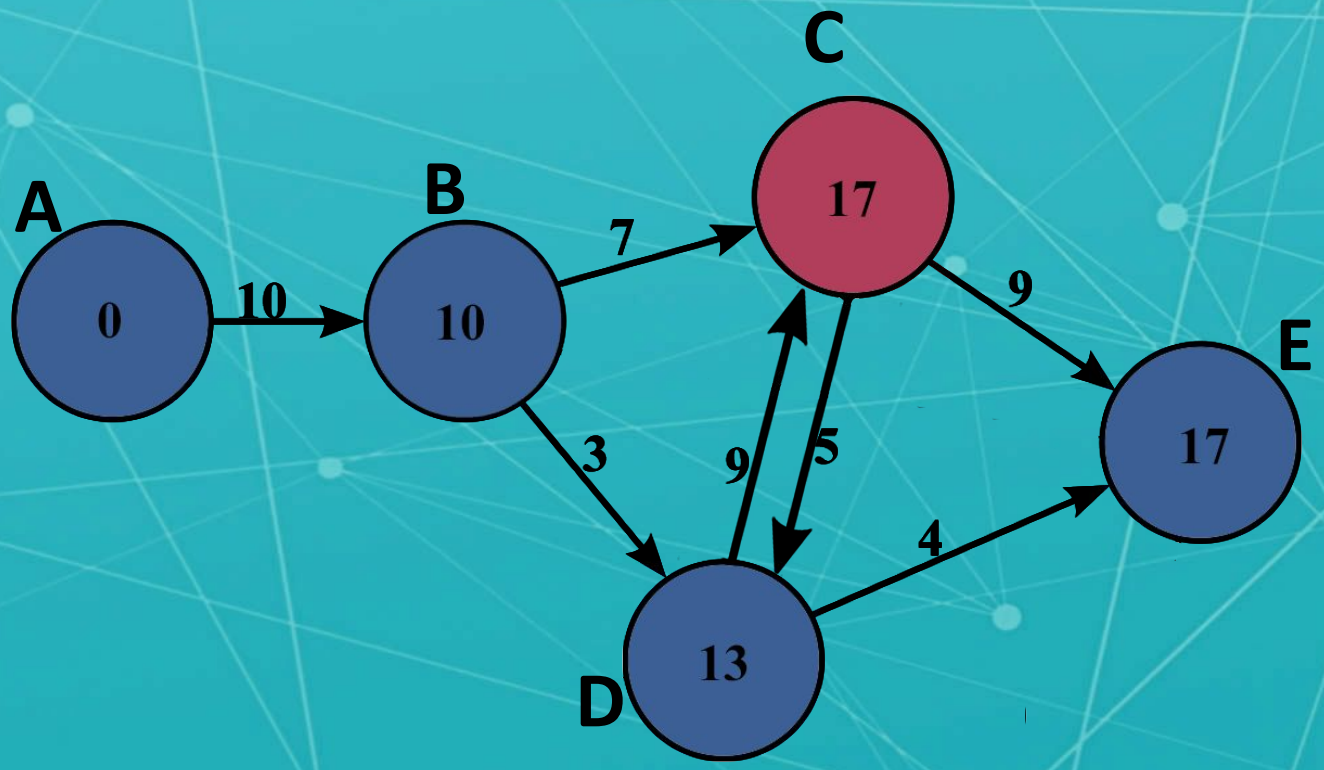
## Списки смежности

- \+
  - – Намного более компактная реализация
  - – Легко найти все исходящие ссылки для ноды
- \-
  - – Намного сложнее подсчитать входящие ссылки

# Задача поиска кратчайшего пути

- Найти кратчайший путь от исходной вершины до заданной (или несколько заданных)
- Также, кратчайший может означать с наименьшим общим весом всех ребер (Single-Source Shortest Path)
- Способы такого обхода:
  - Алгоритм Дейкстры
  - MapReduce: параллельный поиск в ширину (Breadth-First Search)

# Задача поиска кратчайшего пути
# . Алгоритм Дейкстры

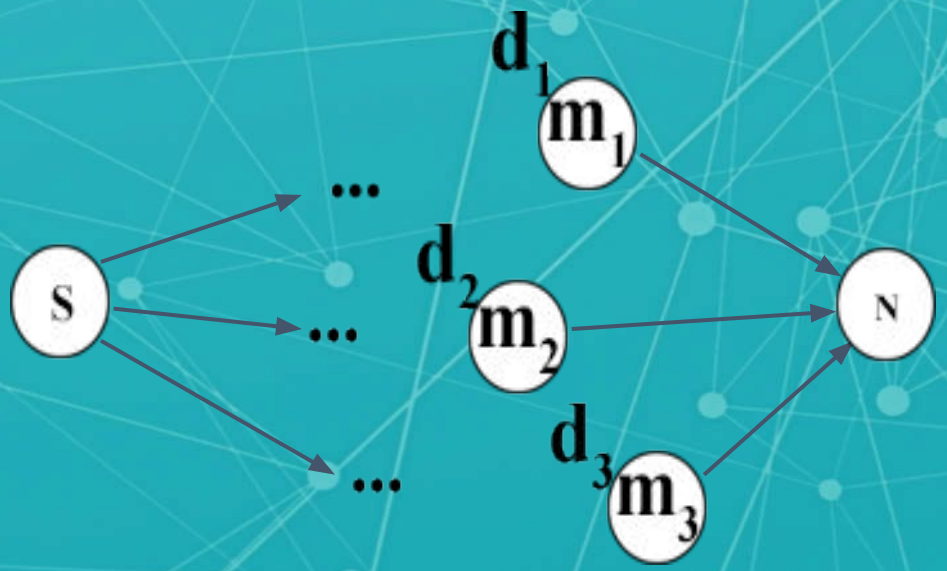



```
Dijkstra(G,w, s)
    d[s] ← 0
    for all vertex v ∈V do
        d[v] ← ∞
    Q ← {V }
    while Q = Ø do
        u ←ExtractMin(Q)
        for all vertex v ∈u.AdjacencyList do
            if d[v] > d[u] + w(u, v) then
                d[v] ← d[u] + w(u, v)
```

# Поиск кратчайшего пути

- Рассмотрим простой случай, когда вес всех ребер одинаков и равен единице
- Интуитивно:
  - Определим: в вершину b можно попасть из вершины a только если b есть в списке соседей a, т.е. DistanceTo(b) = 1
  - Для всех вершин n, достижимых из других множеств M:

$$DistanceTo(n) = 1 + \min(DistanceTo(m), m \in M)$$

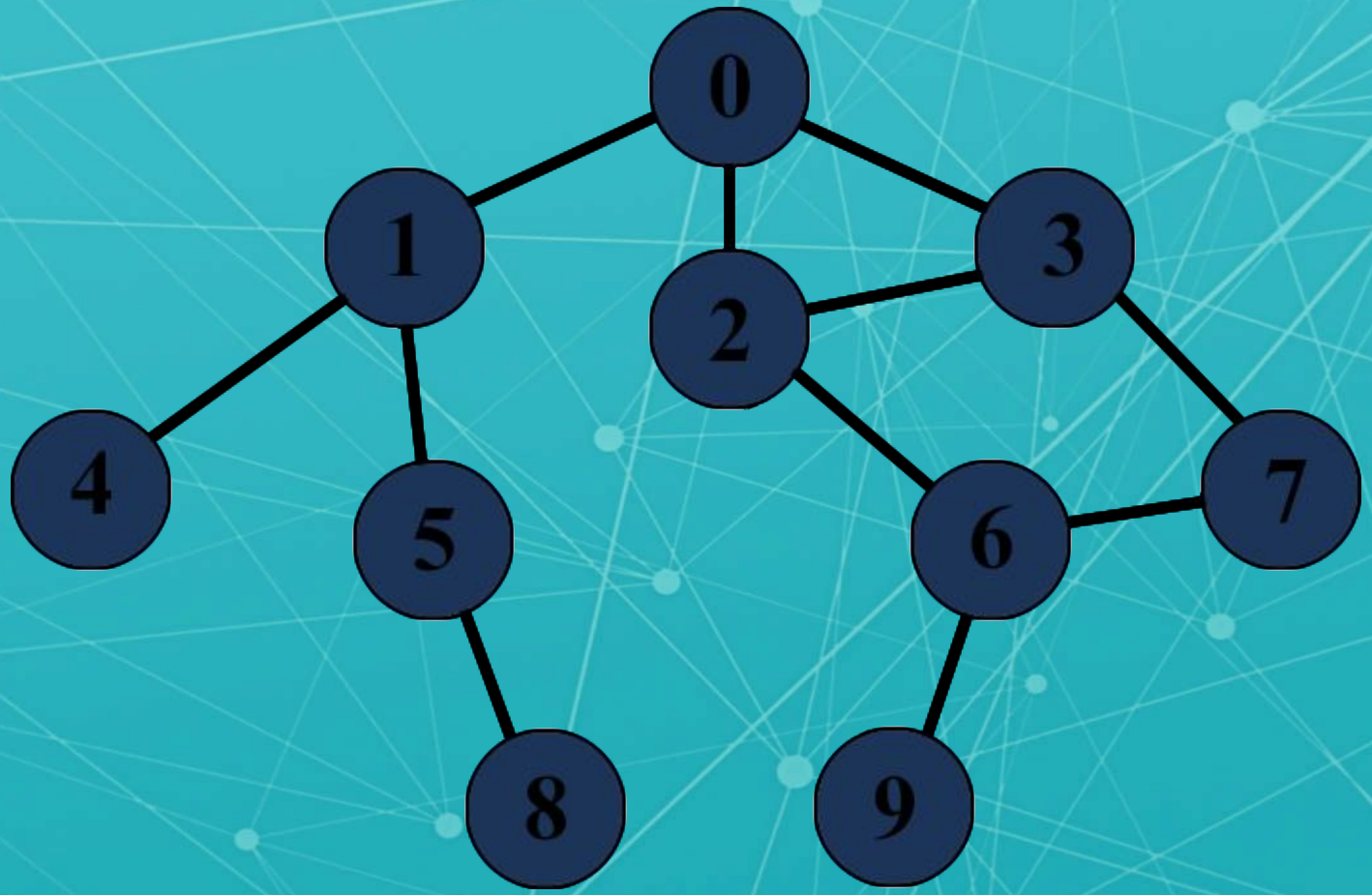


# Алгоритм breadth-first search

```
BFS(start_node, goal_node) {
 for(all nodes i) visited[i] = false; // изначально список посещённых узлов пуст
 queue.push(start_node);              // начиная с узла-источника
 visited[start_node] = true;
 while(! queue.empty() ) {            // пока очередь не пуста
  node = queue.pop();                 // извлечь первый элемент в очереди
  if(node == goal_node) {
   return true;                       // проверить, не является ли текущий узел целевым
  }
  foreach(child in expand(node)) {    // все преемники текущего узла, ...
   if(visited[child] == false) {      // ... которые ещё не были посещены ...
    queue.push(child);                // ... добавить в конец очереди...
    visited[child] = true;            // ... и пометить как посещённые
   }
  }
 }
 return false;                        // Целевой узел недостижим
}
```

# Параллельный BFS

- Представление данных:
  - Key: вершина n
  - Value: d (расстояние от начала), adjacency list (вершины, доступные из n)
  - Инициализация: для всех вершин, кроме начальной, d = ∞
- Mapper:
  - ∀ m ∈ adjacency list: emit (m, d + 1)
- Sort/Shuffle
  - Сгруппировать расстояния по достижимым вершинам
- Reducer:
  - Выбрать путь с минимальным расстоянием для каждой достижимой вершины
  - Дополнительные проверки для отслеживания актуального пути


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

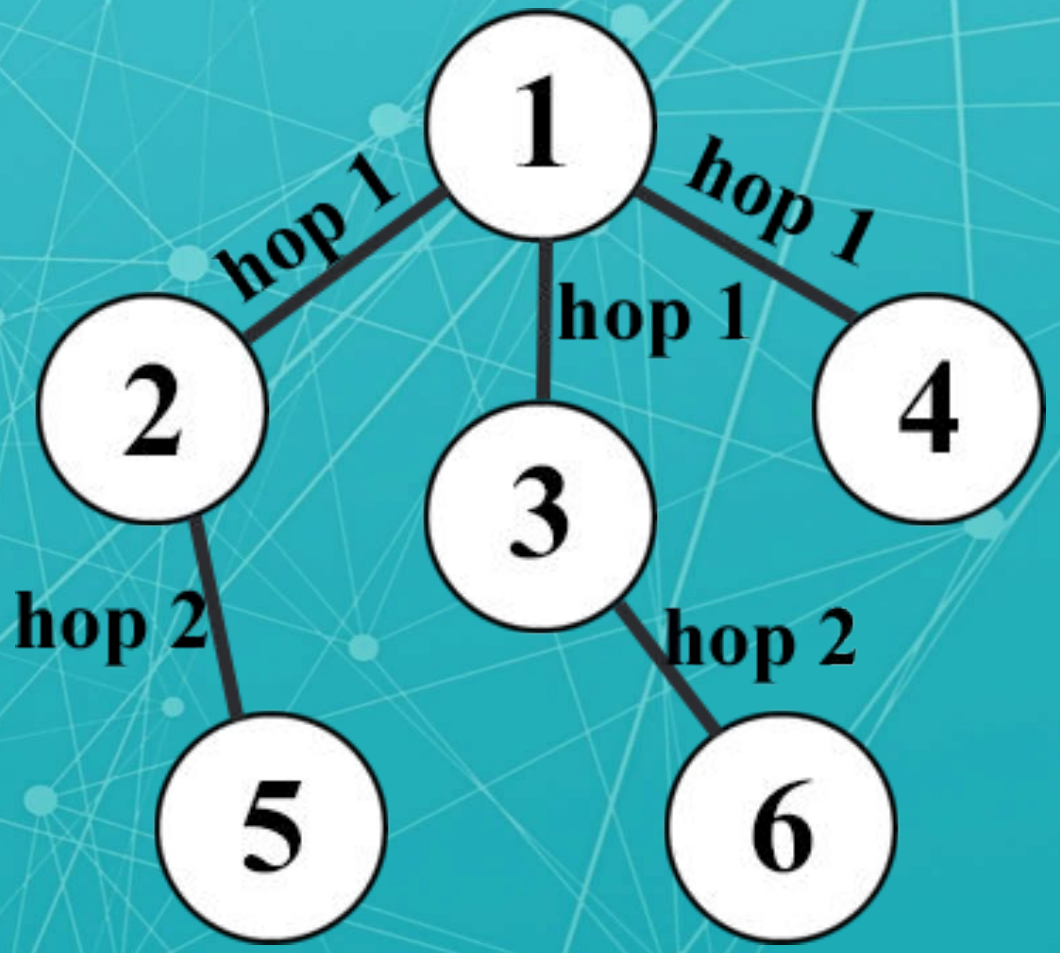
# Параллельный BFS

```
1: class Mapper
2:     method Map(nid n, node N)
3:         d ← N.Distance
4:         Emit(nid n, N)                          ▷ Pass along graph structure
5:         for all nodeid m ∈ N.AdjacencyList do
6:             Emit(nid m, d + 1)                  ▷ Emit distances to reachable nodes

1: class Reducer
2:     method Reduce(nid m, [d1, d2, ...])
3:         d_min ← ∞
4:         M ← ∅
5:         for all d ∈ counts [d1, d2, ...] do
6:             if IsNode(d) then
7:                 M ← d                           ▷ Recover graph structure
8:             else if d < d_min then              ▷ Look for shorter distance
9:                 d_min ← d
10:        M.Distance ← d_min                      ▷ Update shortest distance
11:        Emit(nid m, node M)
```

# BFS: итерации

• Каждая итерация задачи MapReduce смещает границу продвижения по графу (frontier) на один “hop”
  – Последующие операции включают все больше и больше посещенных вершин, т.к. граница (frontier) расширяется
  – Множество итераций требуется для обхода всего графа
• Сохранение структуры графа
  – Проблема: что делать со списком смежных вершин (adjacency list)?
  – Решение: Mapper также пишет (n, adjacency list)



# BFS: критерий завершения

- Как много итераций нужно для завершения параллельного BFS?
- Когда первый раз посетили искомую вершину, значит найден самый короткий путь?
- Ответ на вопрос
  - Равно диаметру графа (наиболее удаленные друг от друга вершины)
- Практическая реализация
  - Внешняя программа-драйвер для проверки оставшихся вершин с дистанцией ∞
  - Можно использовать счетчики из Hadoop MapReduce

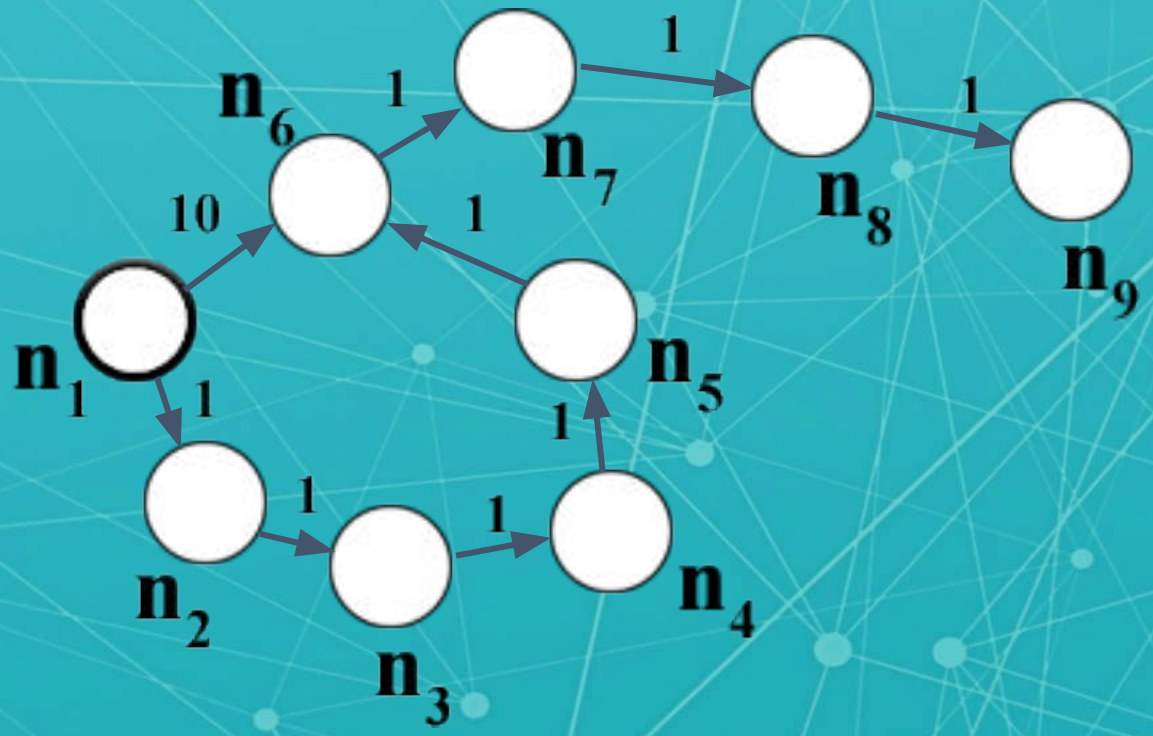
# BFS vs Дейкстра

- Алгоритм Дейкстры более эффективен
  - На каждом шаге используются вершины только из пути с минимальным весом
  - Нужна дополнительная структура данных (priority queue)
- MapReduce обходит все пути графа параллельно
  - Много лишней работы (brute-force подход)
  - Полезная часть выполняется только на текущей границе обхода

# BFS: Weighted Edges

- Добавим положительный вес каждому ребру
- Простая доработка: добавим вес w для каждого ребра в список смежных вершин
  - В mapper, emit (m, d + $w_p$) вместо (m, d + 1) для каждой вершины m

# BFS Weighted: сложности



# BFS Weighted: критерий завершения

Как много итераций нужно для завершения параллельного BFS (взвешенный граф)?

- В худшем случае: N – 1
- В реальном мире ~ диаметру графа
- Практическая реализация
  - Итерации завершаются, когда минимальный путь у каждой вершины больше не меняется
  - Для этого можно также использовать счетчики в MapReduce

# Графы и MapReduce

- Большое количество алгоритмов на графах включает в себя:
  - Выполнение вычислений, зависимых от особенностей ребер и вершин
  - Вычисления, основанные на обходе графа
- Основной алгоритм:
  - Представлять графы в виде списка смежности
  - Производить локальные вычисления на маппере
  - Передавать промежуточные вычисления по исходящих ребрам, где ключом будет целевая вершина
  - Выполнять агрегацию на редьюсере по данным из входящих вершин
  - Повторять итерации до выполнения критерия сходимости, который контролируется внешним драйвером
  - Передавать структуру графа между итерациями

# PageRank

- Модель блуждающего веб-серфера
  – Пользователь начинает серфинг на случайной веб-странице
  – Пользователь произвольно кликает по ссылкам, тем самым перемещаясь от страницы к странице
- PageRank
  – Характеризует кол-во времени, которое пользователь провел на данной странице
  – Математически – это распределение вероятностей посещения страниц
- PageRank определяет понятие важности страницы
  – Соответствует человеческой интуиции?
  – Одна из тысячи фич, которая используется в веб-поиске

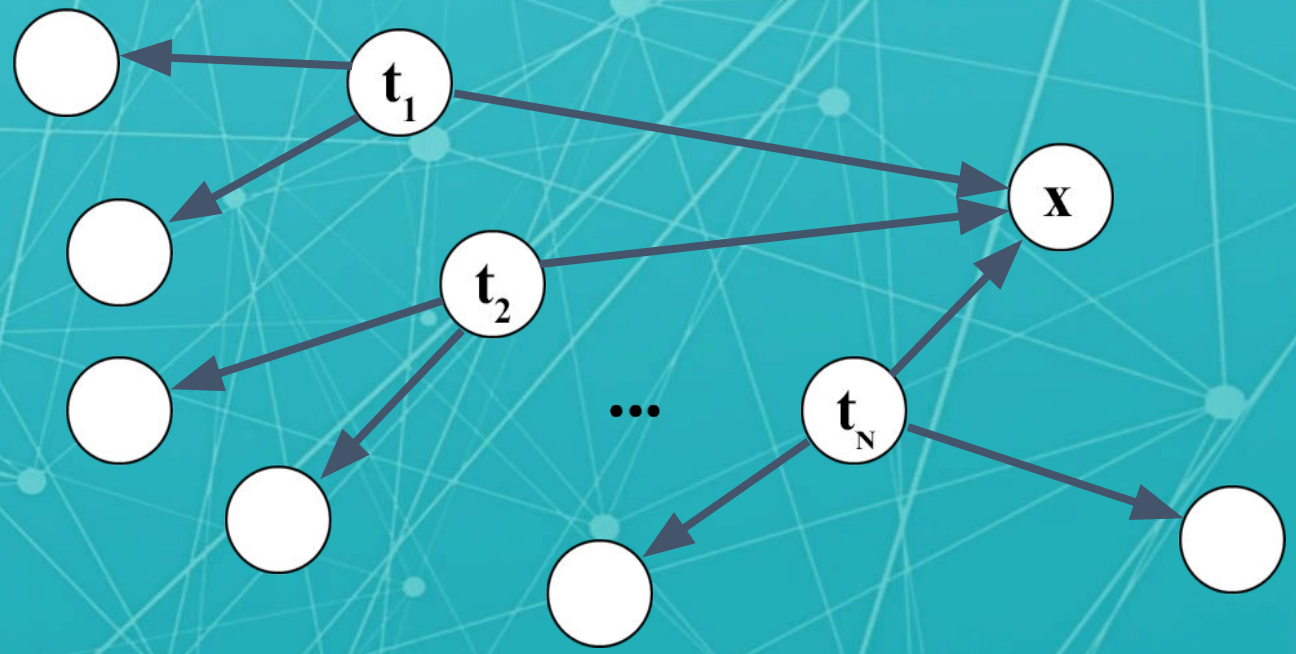
# Определение

Дана страница x, на которую указывают ссылки t1…tn, где

– C(t) степень out-degree для t

– α вероятность случайного перемещения (random jump)

– N общее число вершин в графе




$$PR(x) = \alpha \left(\frac{1}{N}\right) + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} \frac{PR(t_i)}{C(t_i)}$$

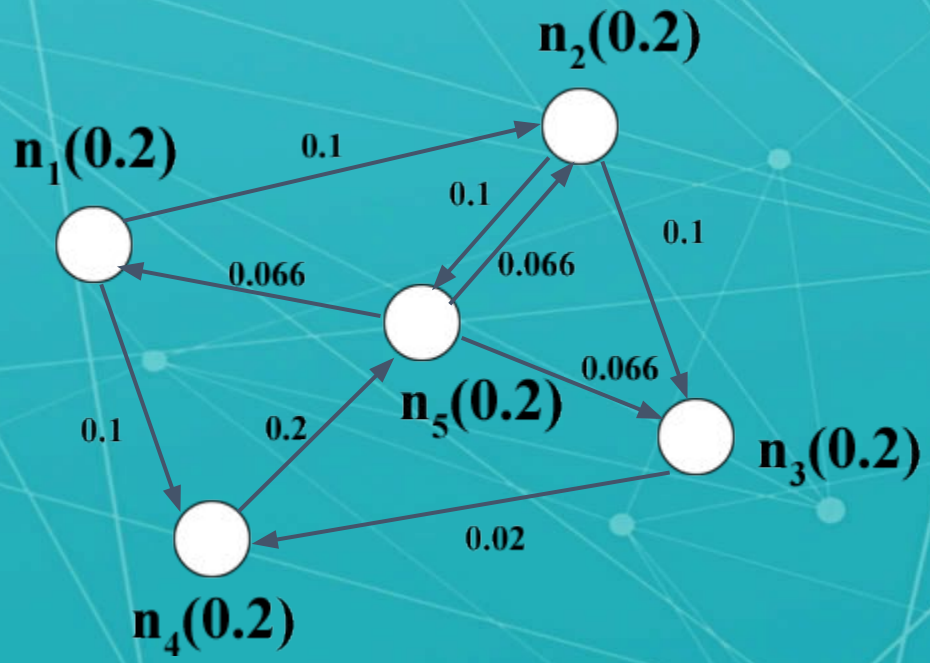
# Вычисление PageRank без PageRank

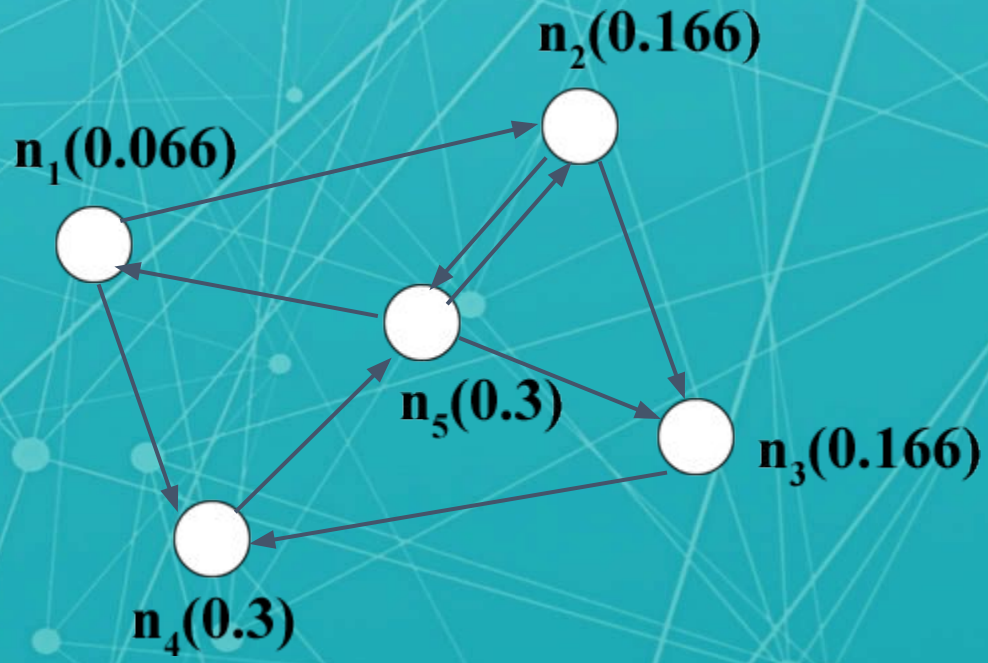
- PageRank может быть рассчитан итеративно
- Примерный алгоритм:
  - Начать с некоторыми заданными значения PRi
  - Каждая страница распределяет PRi “кредит” всем страниц, на которые с нее есть ссылки
  - Каждая страница добавляет весь полученный “кредит” от страниц, которые на нее ссылаются, для подсчета PRi+1
  - Продолжить итерации пока значения не сойдутся

# Упрощения для PageRank

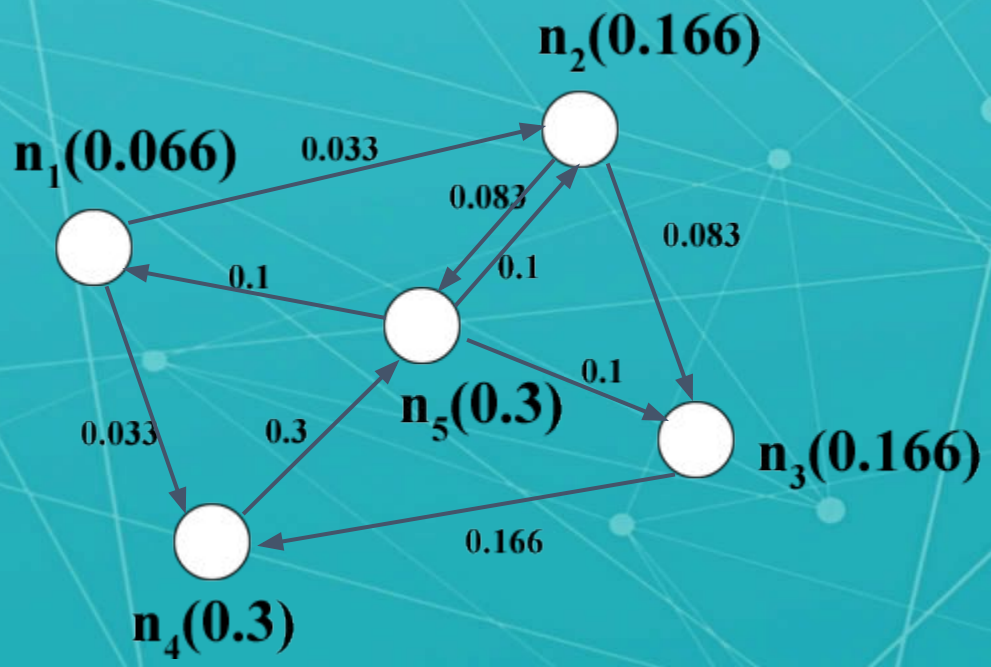
- Случайный переход и “подвисшие” вершины
  - Нет фактора случайного перехода (random jump)
  - Нет “подвисших” вершин
- Затем, добавим сложностей
  - Зачем нужен случайный переход?
  - Откуда появляются “подвисшие” вершины?

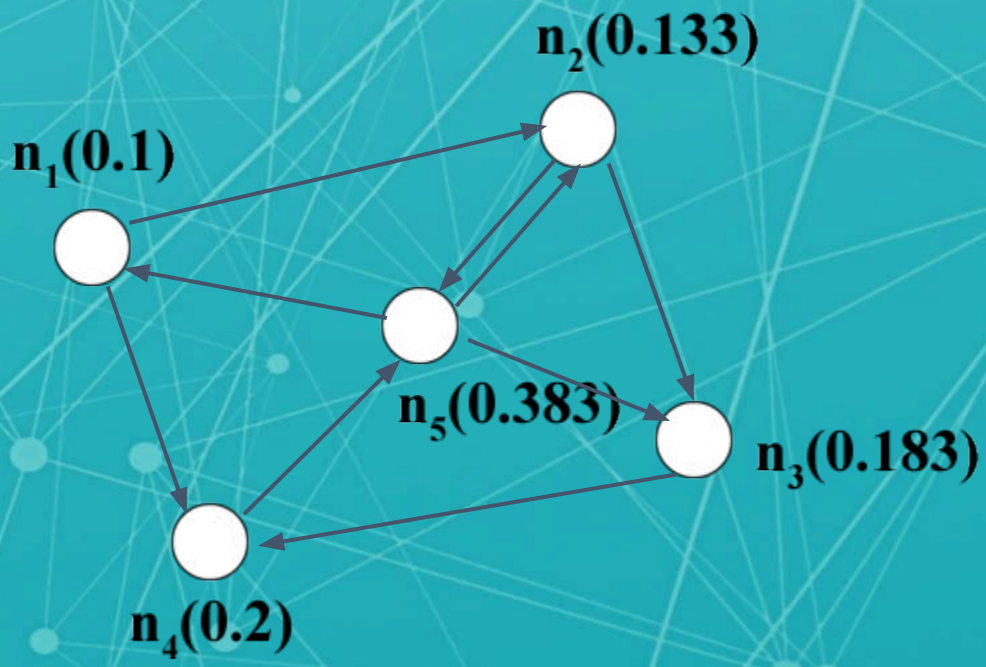
# Итерация 1


$n_2(0.2)$
$n_1(0.2)$
0.1
0.1
0.1
0.066
0.066
0.066
$n_5(0.2)$
0.1
0.2
$n_3(0.2)$
0.02
$n_4(0.2)$

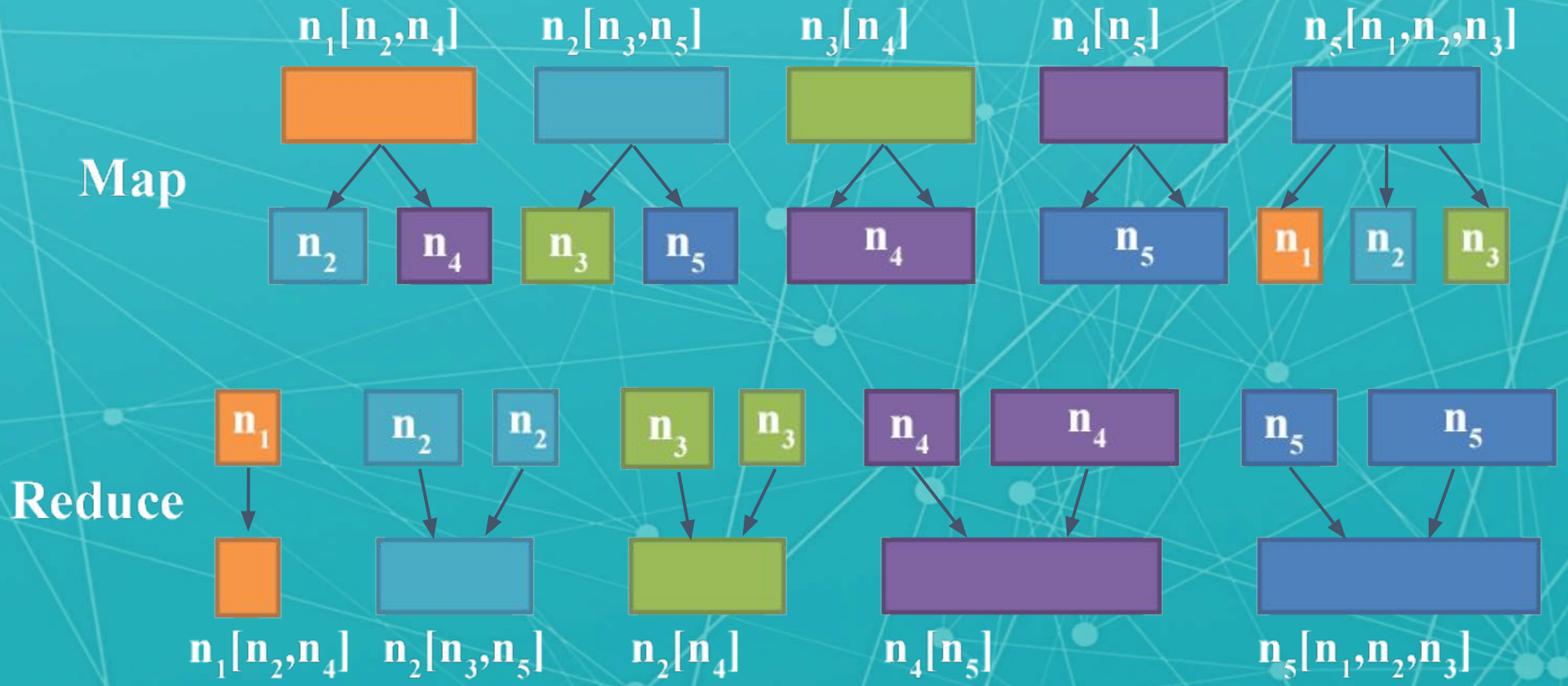

$n_2(0.166)$
$n_1(0.066)$
$n_5(0.3)$
$n_3(0.166)$
$n_4(0.3)$

# Итерация 2


$n_2(0.166)$
$n_1(0.066)$
0.033
0.083
0.1
0.1
0.083
0.1
0.033
0.3
$n_5(0.3)$
$n_3(0.166)$
0.166
$n_4(0.3)$


$n_2(0.133)$
$n_1(0.1)$
$n_5(0.383)$
$n_3(0.183)$
$n_4(0.2)$

# PageRank на MapReduce



# Псевдокод на MapReduce

```
1: class Mapper
2:     method Map(nid n, node N)
3:         p ← N.PageRank/|N.AdjacencyList|
4:         Emit(nid n, N)                          ▷ Pass along graph structure
5:         for all nodeid m ∈ N.AdjacencyList do
6:             Emit(nid m, p)                      ▷ Pass PageRank mass to neighbors

1: class Reducer
2:     method Reduce(nid m, [p1, p2, ...])
3:         M ← ∅
4:         for all p ∈ counts [p1, p2, ...] do
5:             if IsNode(p) then
6:                 M ← p                           ▷ Recover graph structure
7:             else
8:                 s ← s + p                       ▷ Sum incoming PageRank contributions
9:         M.PageRank ← s
10:        Emit(nid m, node M)
```

# Полный PageRank

- Две дополнительные сложности
  - Как правильно обрабатывать “подвешенные” вершины?
  - Как правильно определить фактор случайного перехода (random jump)?
- Решение :
  - Второй проход для перераспределения “оставшегося” PageRank и учитывания фактор случайного перехода:

$$p' = \alpha\left(\frac{1}{N}\right) + (1-\alpha)\left(\frac{m}{N} + p\right)$$

  - p – значение PageRank полученное “до”, p' – обновленное значение PageRank
  - N - число вершин графа
  - m – “оставшийся” PageRank

# Критерии сходимости PageRank

- Продолжать итерации пока значения PageRank не перестанет изменяться
- Фиксированное число итераций

# Демонстрация