

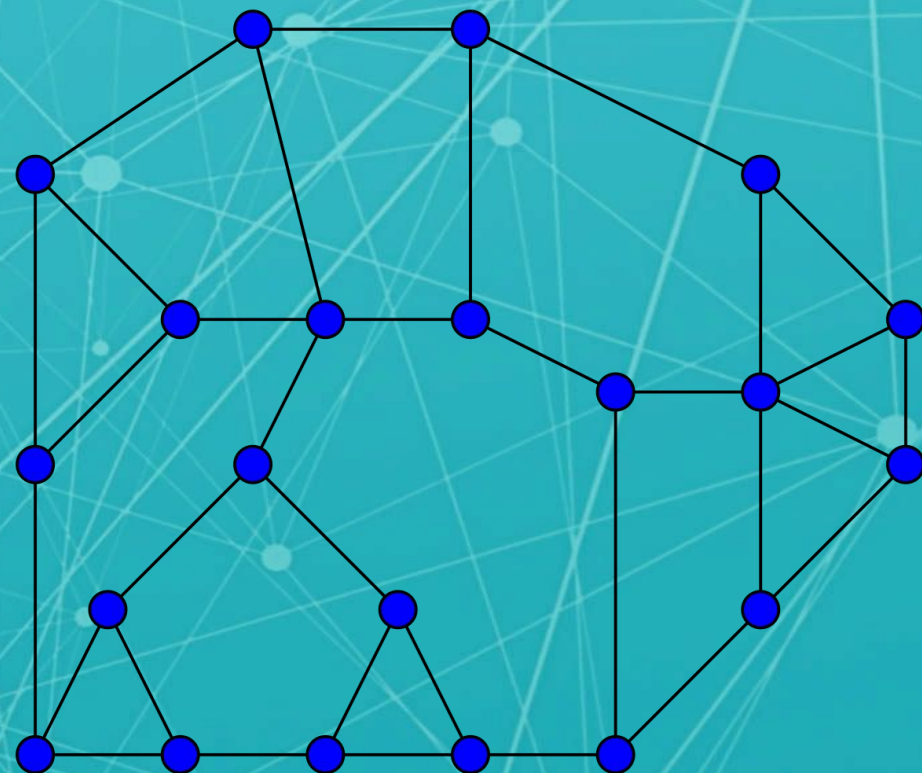
# Алгоритмы работы с графами с использованием MapReduce

РТУ МИРЭА

Москва, 2020

# ГРАФ

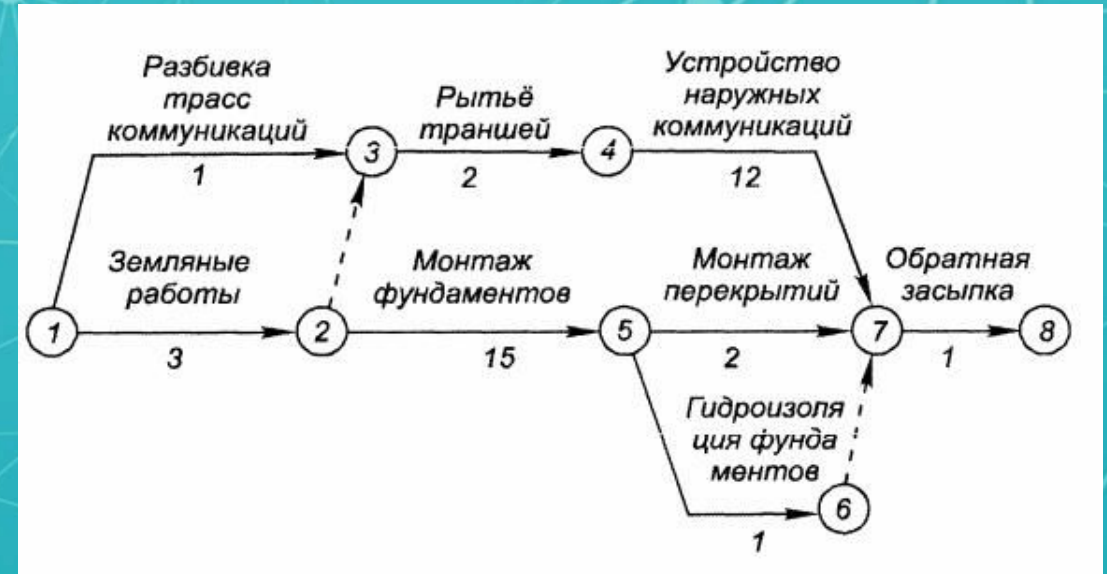
- С их помощью часто моделируют
  - библиографические сети
  - сети белок-белковых взаимодействий
  - Социальные сети
  - Структура дорог/жд/метро и т.д.
- $G = (V, E)$ , где
  - $V$  представляет собой множество вершин (nodes)
  - $E$  представляет собой множество ребер (edges/links)
    - Ребра и вершины могут содержать дополнительную информацию
- Различные типы графов
  - Ориентированные и неориентированные
  - С циклами и без





# Задачи и проблемы на графах

- Поиск кратчайшего пути
  - Роутинг трафика
  - Навигация маршрута
- Поиск минимального остовного дерева
  - Телекоммуникационные компании
- Поиск максимального потока (Max Flow)
  - Структура компьютеров и серверов Интернет
- Bipartite matching
  - Соискатели и работодатели
- Поиск “особенных” вершин и/или групп вершин графа
  - Комьюнити пользователей
- PageRank



# Графы и MapReduce

- Большой класс алгоритмов на графах включает
  - Выполнение вычислений на каждой ноде
  - Обход графа
- Ключевые вопросы
  - Как представить граф на MapReduce?
  - Как обходить граф на MapReduce?



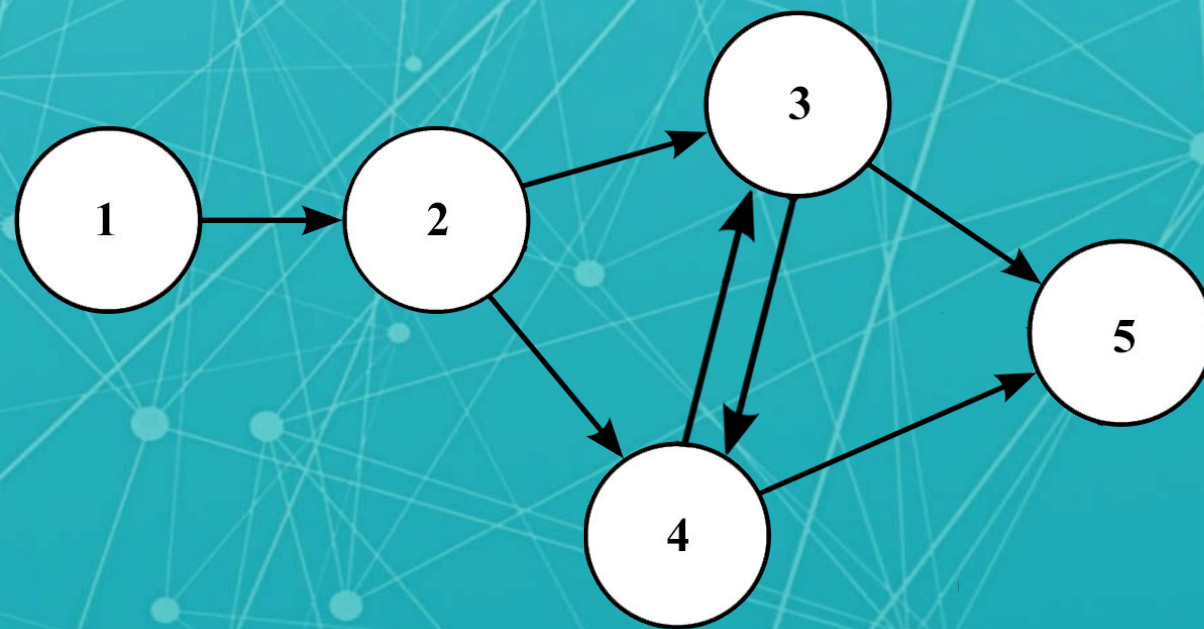
# Матрица смежности

Граф представляется как матрица  $M$  размером  $n \times n$

–  $n = |V|$

–  $M_{ij} = 1$  означает наличие ребра между  $i$  и  $j$

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	1
5	0	0	0	0	0



# Списки смежности

- Берем матрицу смежности и убираем все нули

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	1
4	0	0	1	0	1
5	0	0	0	0	0



1: 2

2: 3, 4

3: 4, 5

4: 3, 5

5:



# Достоинства и недостатки

## Матрицы смежности

- +
  - Удобство математических вычислений
  - Перемещение по строкам и столбцами соответствует переходу по входящим и исходящим ссылкам
- -
  - Матрица разреженная, множество лишних нулей
  - Расходуется много лишнего места

## Списки смежности

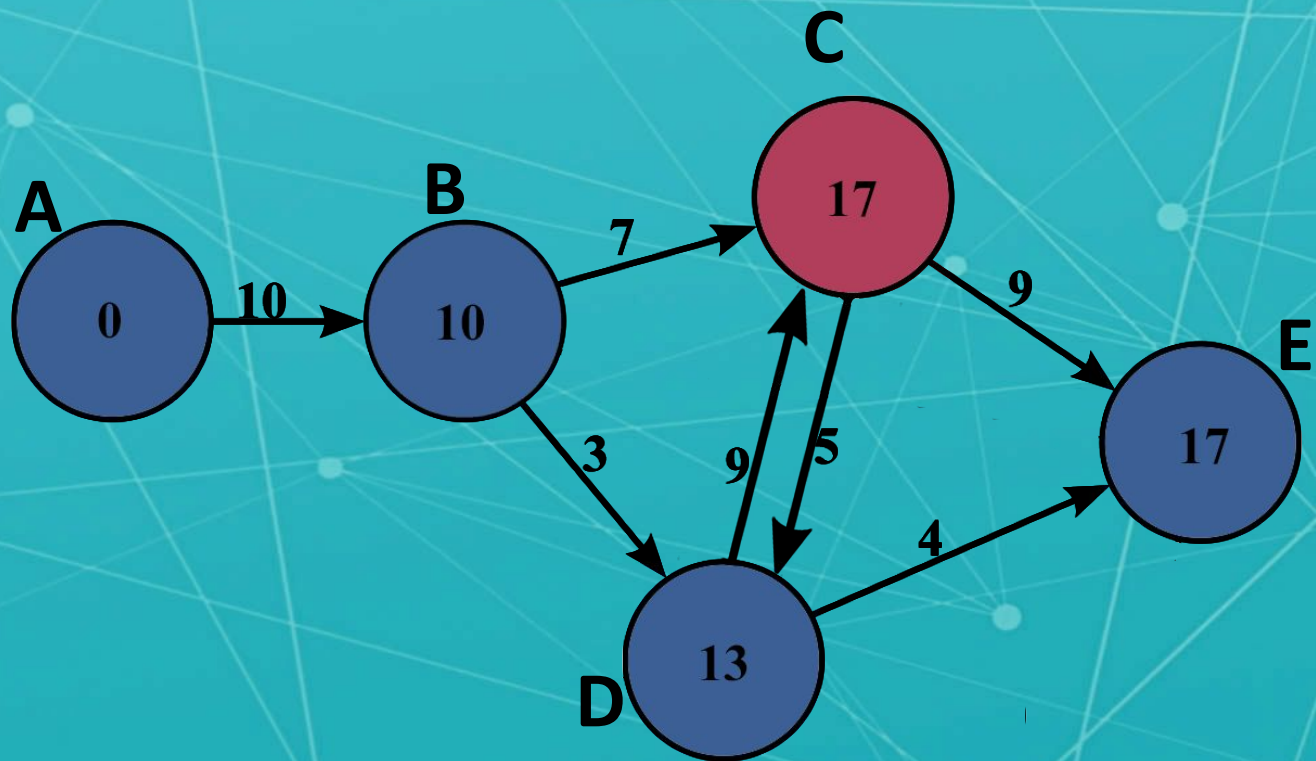
- +
  - Намного более компактная реализация
  - Легко найти все исходящие ссылки для ноды
- -
  - Намного сложнее подсчитать входящие ссылки

# Задача поиска кратчайшего пути

- Найти кратчайший путь от исходной вершины до заданной (или несколько заданных)
- Также, кратчайший может означать с наименьшим общим весом всех ребер (Single-Source Shortest Path)
- Способы такого обхода:
  - Алгоритм Дейкстры
  - MapReduce: параллельный поиск в ширину (Breadth-First Search)



# Задача поиска кратчайшего пути . Алгоритм Дейкстры

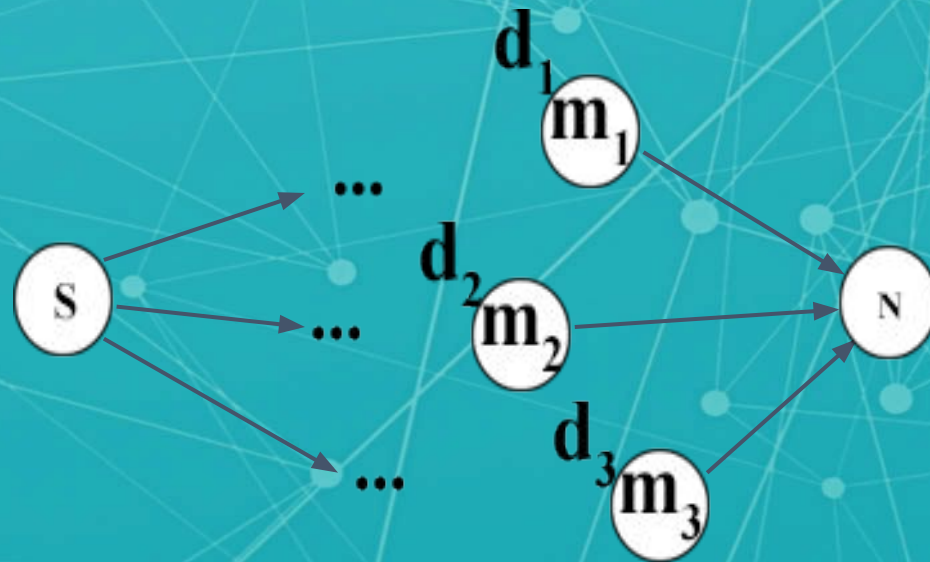


```
Dijkstra(G,w, s)
d[s] ← 0
for all vertex v ∈ V do
    d[v] ← ∞
Q ← {V}
while Q ≠ ∅ do
    u ← ExtractMin(Q)
    for all vertex v ∈ u.AdjacencList do
        if d[v] > d[u] + w(u, v) then
            d[v] ← d[u] + w(u, v)
```

# Поиск кратчайшего

## ПУТИ

- Рассмотрим простой случай, когда вес всех ребер одинаков и равен единице
- Интуитивно:
  - Определим: в вершину  $b$  можно попасть из вершины  $a$  только если  $b$  есть в списке соседей  $a$ , т.е.  $\text{DistanceTo}(b) = 1$
  - Для всех вершин  $n$ , достижимых из других множеств  $M$ :  
$$\text{DistanceTo}(n) = 1 + \min(\text{DistanceTo}(m), m \in M)$$





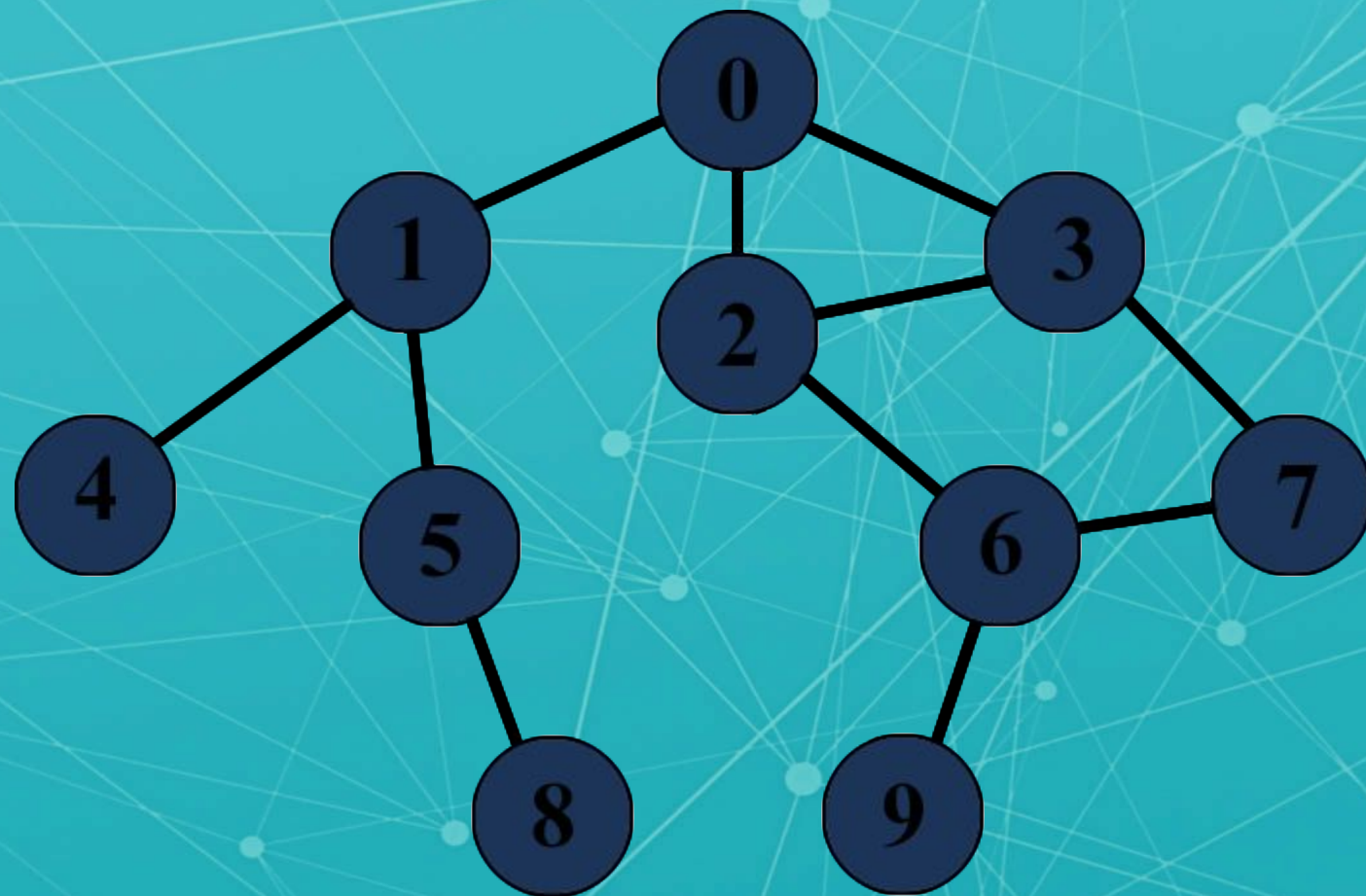
# Алгоритм breadth-first search

```
BFS(start_node, goal_node) {
  for(all nodes i) visited[i] = false; // изначально список посещённых узлов пуст
  queue.push(start_node);              // начиная с узла-источника
  visited[start_node] = true;
  while(! queue.empty() ) {           // пока очередь не пуста
    node = queue.pop();                // извлечь первый элемент в очереди
    if(node == goal_node) {           // проверить, не является ли текущий узел целевым
      return true;
    }
    foreach(child in expand(node)) {   // все преемники текущего узла, ...
      if(visited[child] == false) {   // ... которые ещё не были посещены ...
        queue.push(child);           // ... добавить в конец очереди...
        visited[child] = true;       // ... и пометить как посещённые
      }
    }
  }
  return false;                       // Целевой узел недостижим
}
```

# Параллельный BFS

- Представление данных:
  - Key: вершина  $n$
  - Value:  $d$  (расстояние от начала), adjacency list (вершины, доступные из  $n$ )
  - Инициализация: для всех вершин, кроме начальной,  $d = \infty$
- Mapper:
  - $\forall m \in \text{adjacency list: emit } (m, d + 1)$
- Sort/Shuffle
  - Сгруппировать расстояния по достижимым вершинам
- Reducer:
  - Выбрать путь с минимальным расстоянием для каждой достижимой вершины
  - Дополнительные проверки для отслеживания актуального пути





# Параллельный BFS

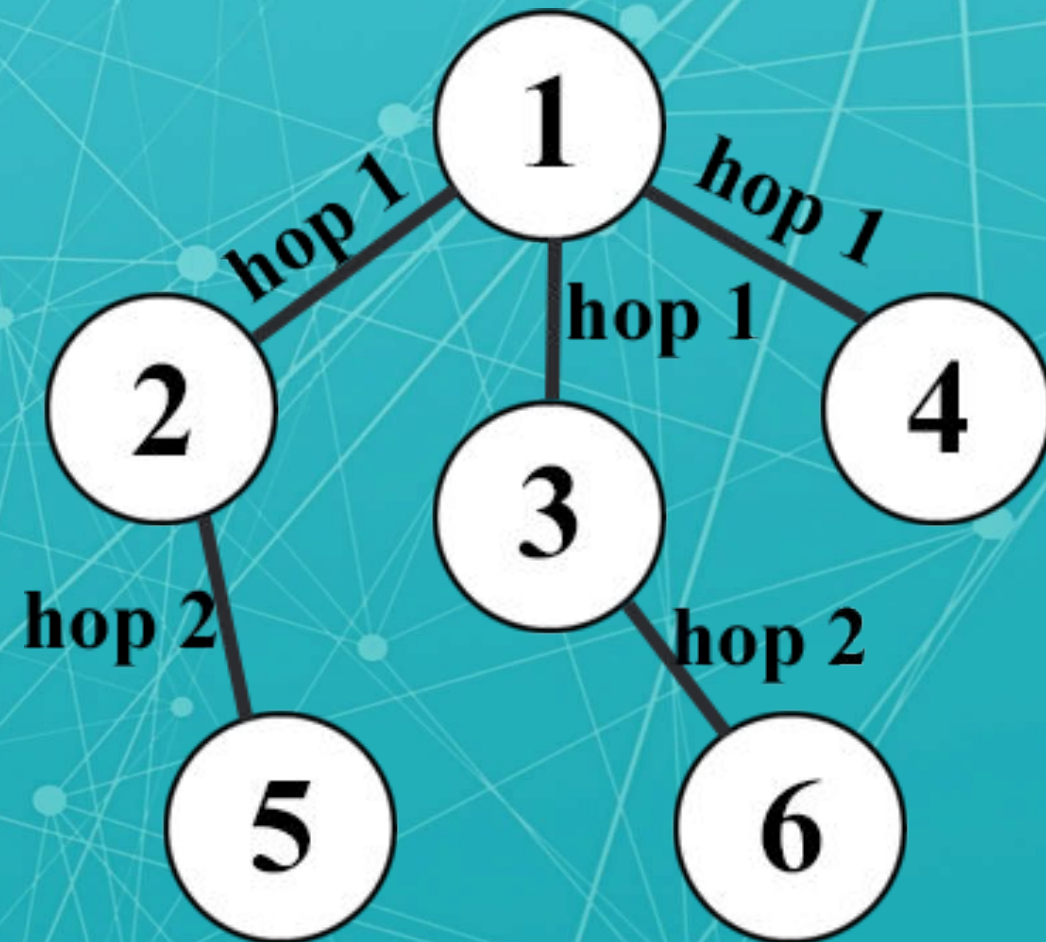
```
1: class MAPPER
2:   method MAP(nid  $n$ , node  $N$ )
3:      $d \leftarrow N.DISTANCE$ 
4:     EMIT(nid  $n$ ,  $N$ )                                ▷ Pass along graph structure
5:     for all nodeid  $m \in N.ADJACENCYLIST$  do
6:       EMIT(nid  $m$ ,  $d + 1$ )                          ▷ Emit distances to reachable nodes

1: class REDUCER
2:   method REDUCE(nid  $m$ , [ $d_1, d_2, \dots$ ])
3:      $d_{min} \leftarrow \infty$ 
4:      $M \leftarrow \emptyset$ 
5:     for all  $d \in \text{counts } [d_1, d_2, \dots]$  do
6:       if ISNODE( $d$ ) then
7:          $M \leftarrow d$                                 ▷ Recover graph structure
8:         else if  $d < d_{min}$  then                       ▷ Look for shorter distance
9:            $d_{min} \leftarrow d$ 
10:     $M.DISTANCE \leftarrow d_{min}$                        ▷ Update shortest distance
11:    EMIT(nid  $m$ , node  $M$ )
```



# BFS: итерации

- Каждая итерация задачи MapReduce смещает границу продвижения по графу (frontier) на один “hop”
  - Последующие операции включают все больше и больше посещенных вершин, т.к. граница (frontier) расширяется
  - Множество итераций требуется для обхода всего графа
- Сохранение структуры графа
  - Проблема: что делать со списком смежных вершин (adjacency list)?
  - Решение: Mapper также пишет (n, adjacency list)



# BFS: критерий завершения

- Как много итераций нужно для завершения параллельного BFS?
- Когда первый раз посетили искомую вершину, значит найден самый короткий путь?
- Ответ на вопрос
  - Равно диаметру графа (наиболее удаленные друг от друга вершины)
- Практическая реализация
  - Внешняя программа-драйвер для проверки оставшихся вершин с дистанцией  $\infty$
  - Можно использовать счетчики из Hadoop MapReduce



# BFS vs Дейкстра

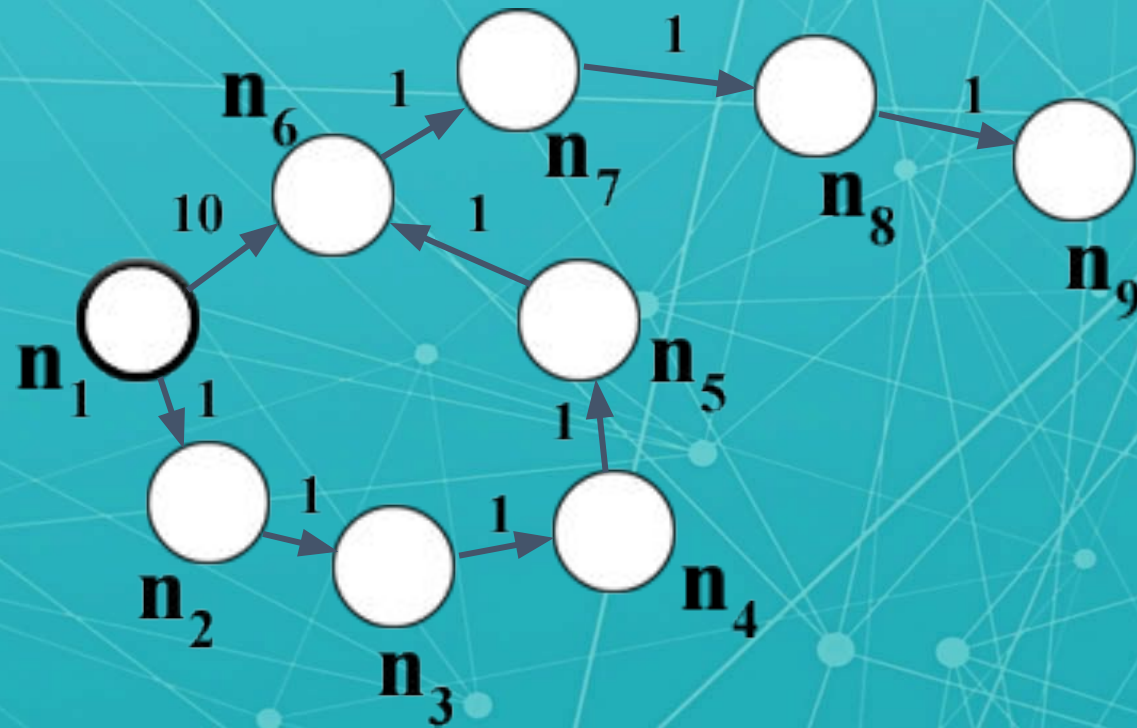
- Алгоритм Дейкстры более эффективен
  - На каждом шаге используются вершины только из пути с минимальным весом
  - Нужна дополнительная структура данных (priority queue)
- MapReduce обходит все пути графа параллельно
  - Много лишней работы (brute-force подход)
  - Полезная часть выполняется только на текущей границе обхода

# BFS: Weighted Edges

- Добавим положительный вес каждому ребру
- Простая доработка: добавим вес  $w$  для каждого ребра в список смежных вершин
  - В mapper, emit  $(m, d + w_p)$  вместо  $(m, d + 1)$  для каждой вершины  $m$



# BFS Weighted: СЛОЖНОСТИ



# BFS Weighted: критерий завершения

Как много итераций нужно для завершения параллельного BFS (взвешенный граф)?

- В худшем случае:  $N - 1$
- В реальном мире  $\sim$  диаметру графа
- Практическая реализация
  - Итерации завершаются, когда минимальный путь у каждой вершины больше не меняется
  - Для этого можно также использовать счетчики в MapReduce



# Графы и MapReduce

- Большое количество алгоритмов на графах включает в себя:
  - Выполнение вычислений, зависящих от особенностей ребер и вершин
  - Вычисления, основанные на обходе графа
- Основной алгоритм:
  - Представлять графы в виде списка смежности
  - Производить локальные вычисления на маппере
  - Передавать промежуточные вычисления по исходящим ребрам, где ключом будет целевая вершина
  - Выполнять агрегацию на редьюсере по данным из входящих вершин
  - Повторять итерации до выполнения критерия сходимости, который контролируется внешним драйвером
  - Передавать структуру графа между итерациями

# PageRank

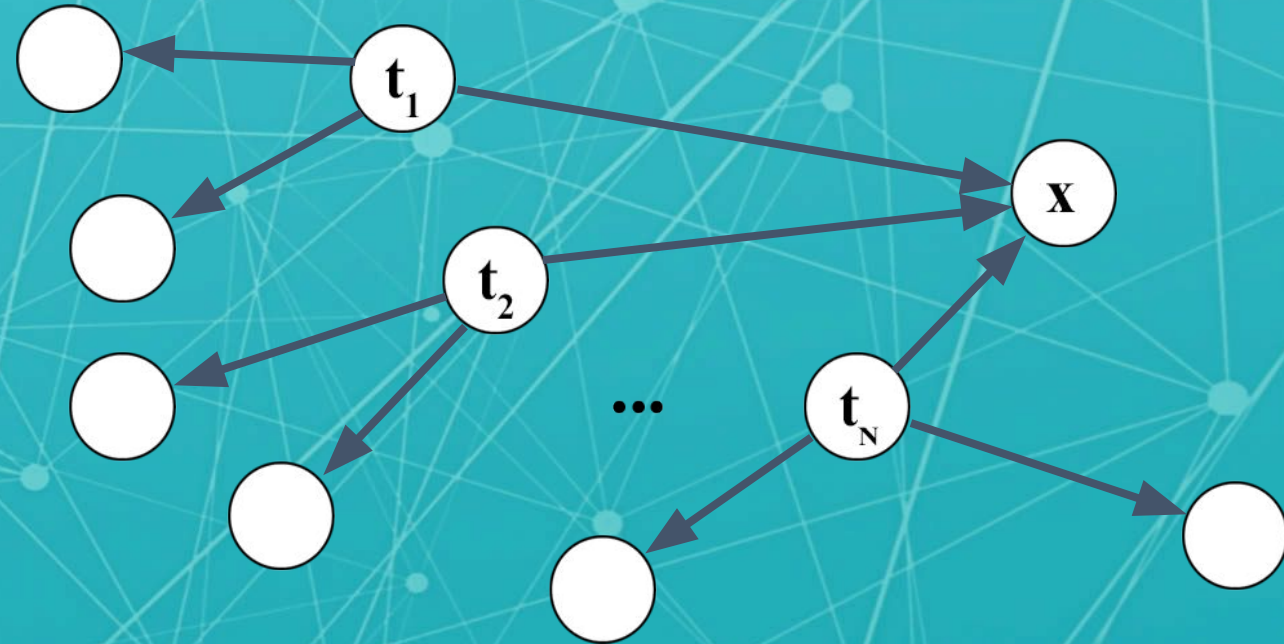
- Модель блуждающего веб-серфера
  - Пользователь начинает серфинг на случайной веб-странице
  - Пользователь произвольно кликает по ссылкам, тем самым перемещаясь от страницы к странице
- PageRank
  - Характеризует кол-во времени, которое пользователь провел на данной странице
  - Математически – это распределение вероятностей посещения страниц
- PageRank определяет понятие важности страницы
  - Соответствует человеческой интуиции?
  - Одна из тысячи фиш, которая используется в веб-поиске



# Определение

Дана страница  $x$ , на которую указывают ссылки  $t_1 \dots t_n$ , где

- $C(t)$  степень out-degree для  $t$
- $\alpha$  вероятность случайного перемещения (random jump)
- $N$  общее число вершин в графе



$$PR(x) = \alpha \left( \frac{1}{N} \right) + (1 - \alpha) \sum_{i=1}^n \frac{PR(t_i)}{C(t_i)}$$

# Вычисление PageRank без PageRank

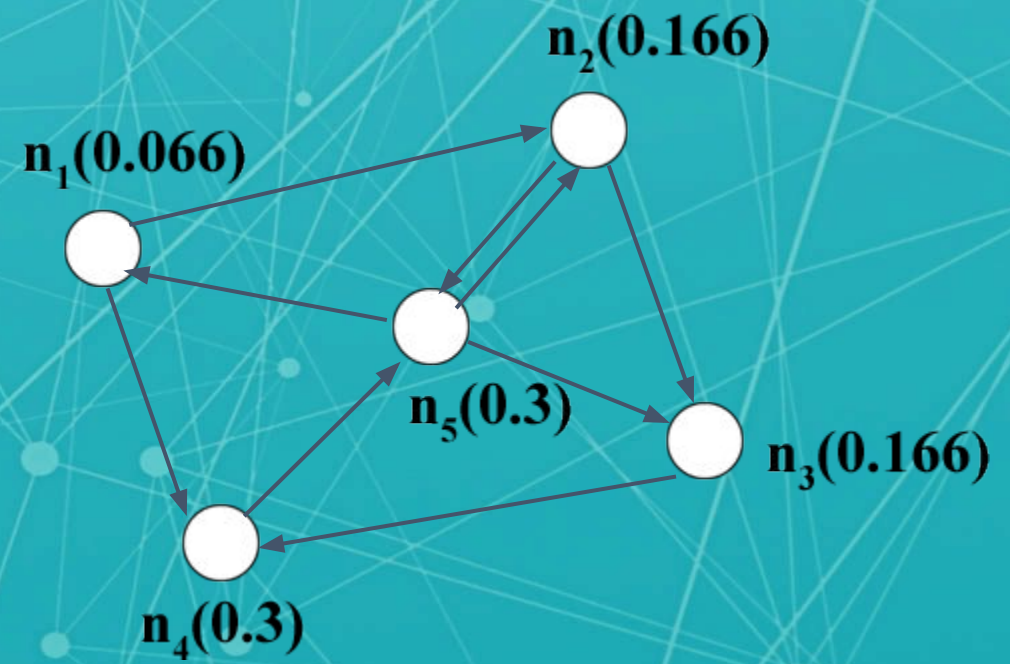
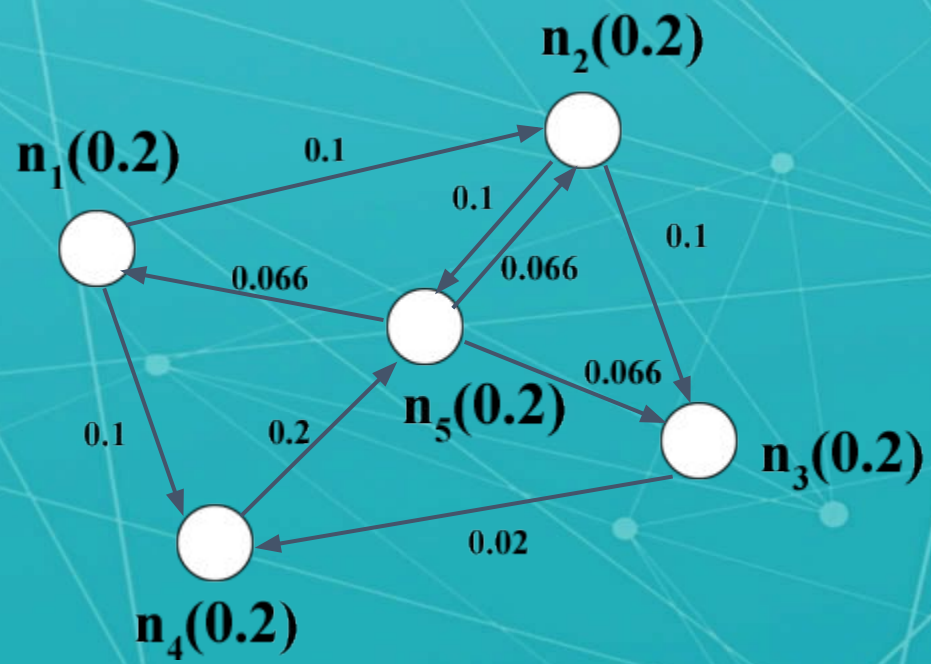
- PageRank может быть рассчитан итеративно
- Примерный алгоритм:
  - Начать с некоторыми заданными значения  $PR_i$
  - Каждая страница распределяет  $PR_i$  “кредит” всем страниц, на которые с нее есть ссылки
  - Каждая страница добавляет весь полученный “кредит” от страниц, которые на нее ссылаются, для подсчета  $PR_{i+1}$
  - Продолжить итерации пока значения не сойдутся



# Упрощения для PageRank

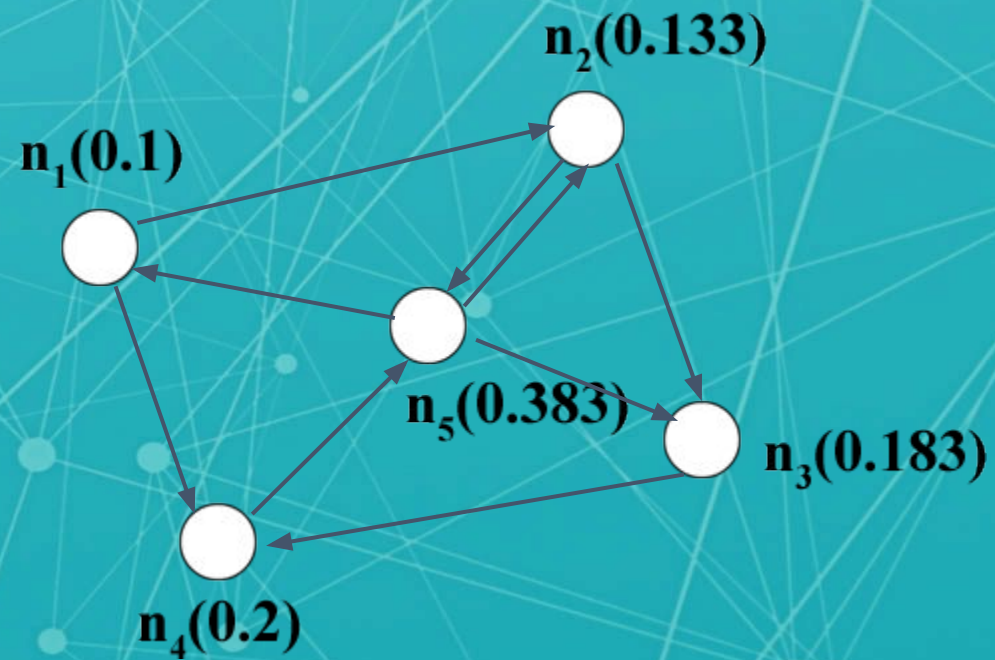
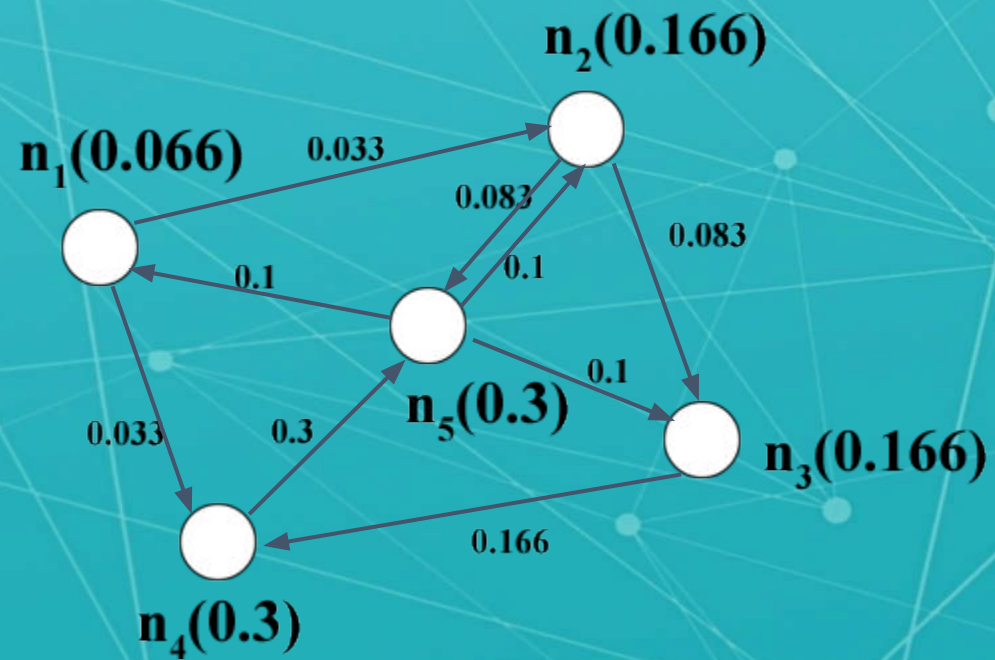
- Случайный переход и “подвисшие” вершины
  - Нет фактора случайного перехода (random jump)
  - Нет “подвисших” вершин
- Затем, добавим сложностей
  - Зачем нужен случайный переход?
  - Откуда появляются “подвисшие” вершины?

# Итерация 1



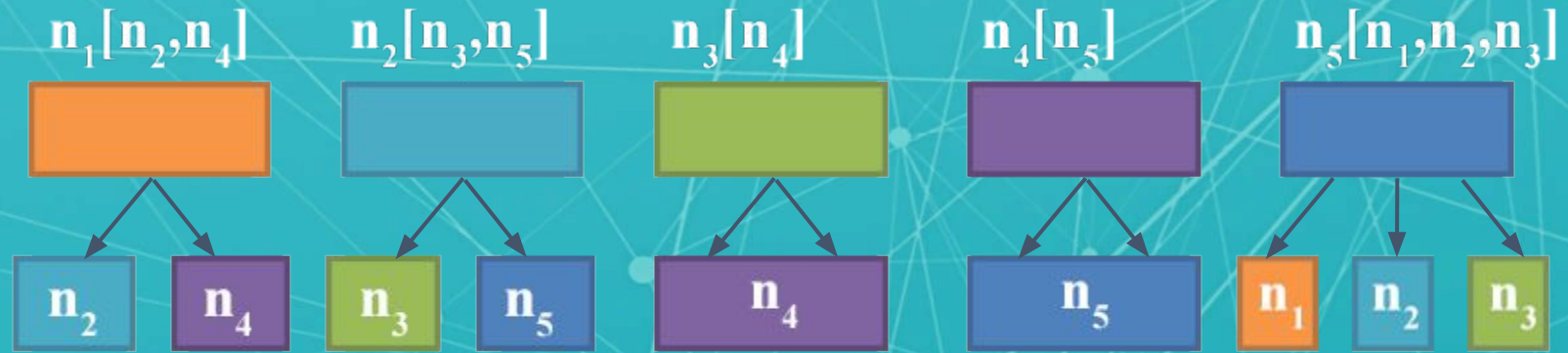


# Итерация 2

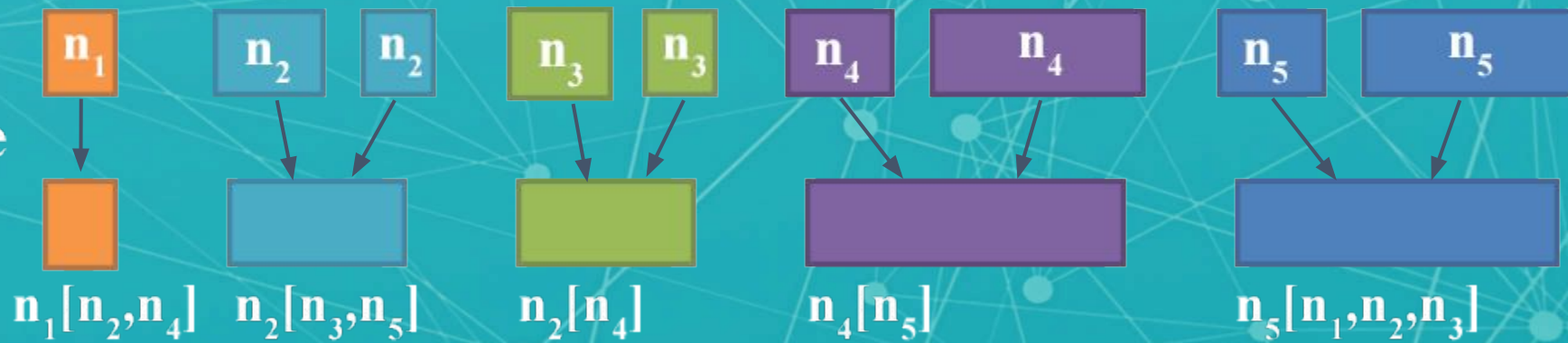


# PageRank на MapReduce

Map



Reduce





# Псевдокод на MapReduce

```
1: class MAPPER
2:   method MAP(nid  $n$ , node  $N$ )
3:      $p \leftarrow N.PAGERANK / |N.ADJACENCYLIST|$ 
4:     EMIT(nid  $n$ ,  $N$ ) ▷ Pass along graph structure
5:     for all nodeid  $m \in N.ADJACENCYLIST$  do
6:       EMIT(nid  $m$ ,  $p$ ) ▷ Pass PageRank mass to neighbors

1: class REDUCER
2:   method REDUCE(nid  $m$ , [ $p_1, p_2, \dots$ ])
3:      $M \leftarrow \emptyset$ 
4:     for all  $p \in$  counts [ $p_1, p_2, \dots$ ] do
5:       if ISNODE( $p$ ) then
6:          $M \leftarrow p$  ▷ Recover graph structure
7:       else
8:          $s \leftarrow s + p$  ▷ Sum incoming PageRank contributions
9:      $M.PAGERANK \leftarrow s$ 
10:    EMIT(nid  $m$ , node  $M$ )
```

# Полный PageRank

- Две дополнительные сложности
  - Как правильно обрабатывать “подвешенные” вершины?
  - Как правильно определить фактор случайного перехода (random jump)?
- Решение :
  - Второй проход для перераспределения “оставшегося” PageRank и учета фактор случайного перехода:

$$p' = \alpha \left( \frac{1}{N} \right) + (1 - \alpha) \left( \frac{m}{N} + p \right)$$

- $p$  – значение PageRank полученное “до”,  $p'$  – обновленное значение PageRank
- $N$  - число вершин графа
- $m$  – “оставшийся” PageRank



# Критерии сходимости PageRank

- Продолжать итерации пока значения PageRank не перестанет изменяться
- Фиксированное число итераций

# Демонстраци я

