

Первообразная и интеграл

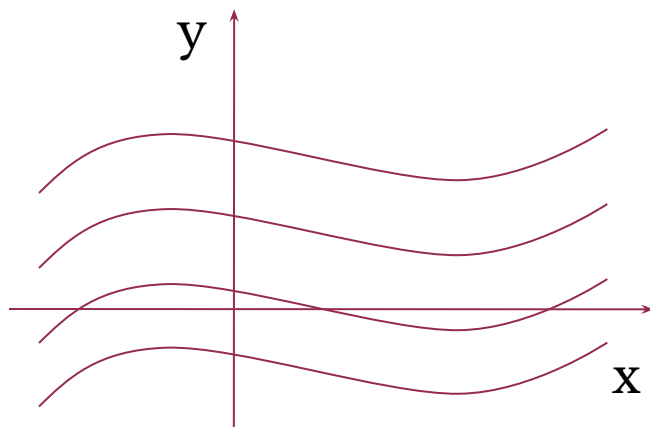
Первообразная

- Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.
- Пример:
Первообразной для функции $f(x)=x$ на всей числовой оси является $F(x)=x^2/2$, поскольку $(x^2/2)'=x$.

Основное свойство первообразных

- Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то и функция $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Геометрическая интерпретация



- Графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси y .

Неопределенный интеграл

- Совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$ называется ее **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad ,$$

где C – произвольная постоянная.

Правила интегрирования

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx, c = const$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, a \neq 0$$

Определенный интеграл

- В декартовой прямоугольной системе координат XOY фигура, ограниченная осью OX , прямыми $x=a$, $x=b$ ($a < b$) и графиком непрерывной неотрицательной на отрезке $[a;b]$ функции $y=f(x)$, называется криволинейной трапецией

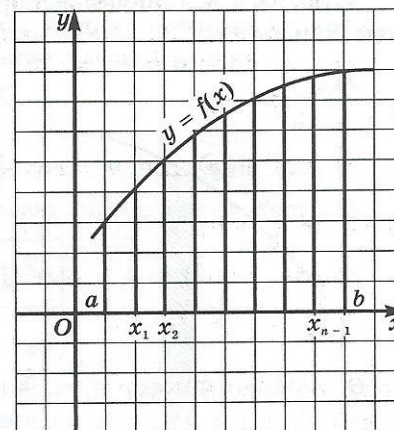


Рис. 224

Определенный интеграл

- Вычислим площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частей. Проведем через полученные точки прямые, параллельные оси OY . Заданная криволинейная трапеция разобьется на n частей. Площадь всей трапеции приближенно равна сумме площадей столбиков.

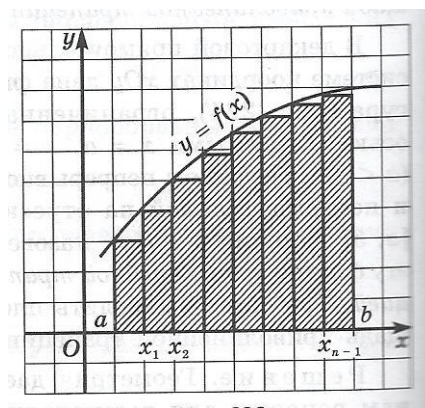
$$S_n = f(x_0) \cdot \Delta x_0 + f(x_1) \cdot \Delta x_1 + \dots + f(x_{n-1}) \cdot \Delta x_{n-1}$$

$$S \approx S_n$$

по определению $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, его называют

определенным интегралом от функции

$y=f(x)$ по отрезку $[a;b]$ и обозначают так: $\int_a^b f(x)dx$



Связь между определенным интегралом и первообразной (Формула Ньютона - Лейбница)

- Для непрерывной функции

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b dx = b - a$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Основные свойства определенного интеграла

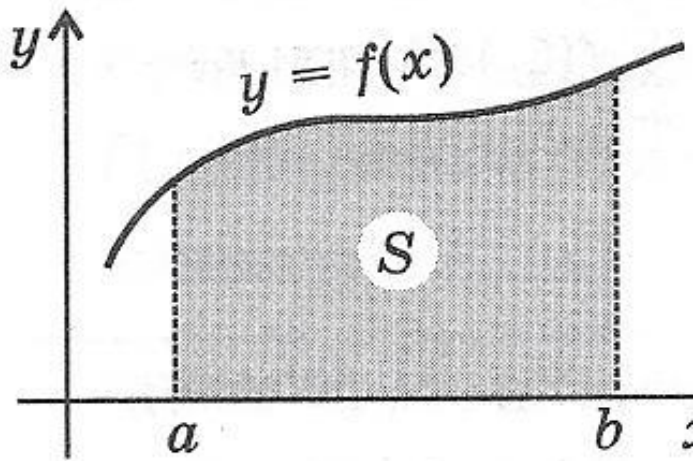
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx, c - const$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

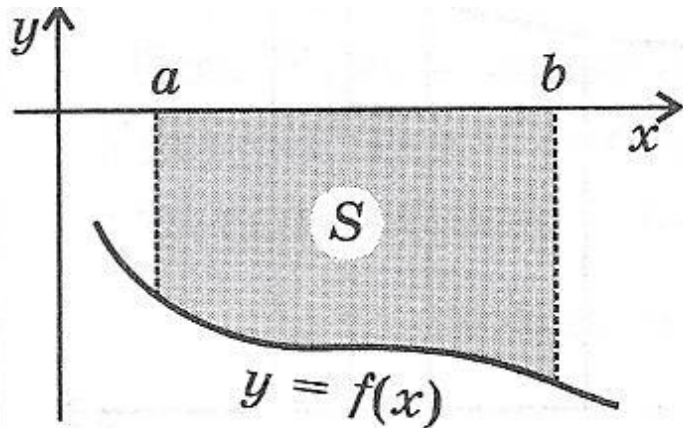
- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x=a$ и $x=b$:



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

- Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, осью x и прямыми $x=a$ и $x=b$:

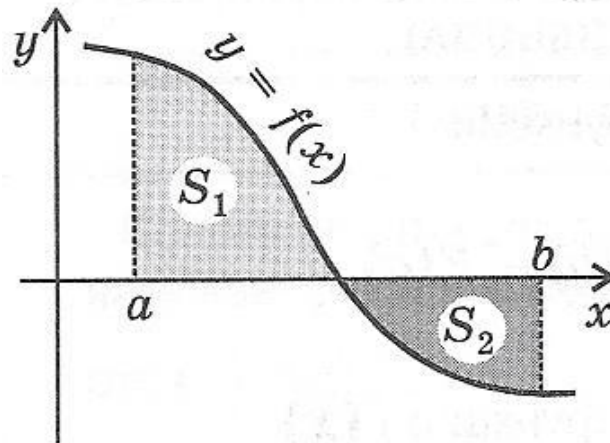


$$S = -\int_a^b f(x) dx$$

Геометрический смысл определенного интеграла

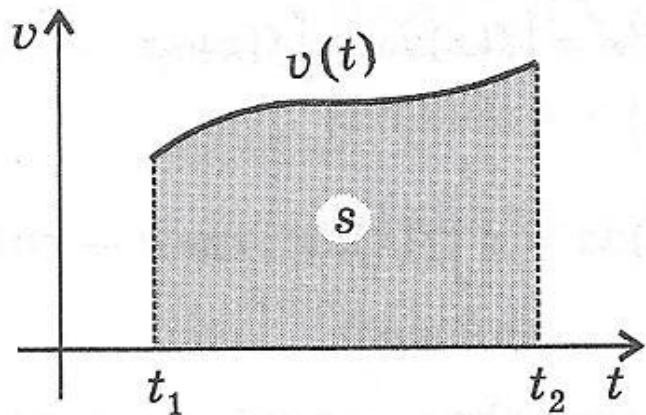
- **Замечание:** Если функция изменяет знак на промежутке $[a;b]$, то

$$S_1 - S_2 = \int_a^b f(x) dx$$



Физический смысл определенного интеграла

- При прямолинейном движении перемещение S численно равно площади криволинейной трапеции под графиком зависимости скорости v от времени t :



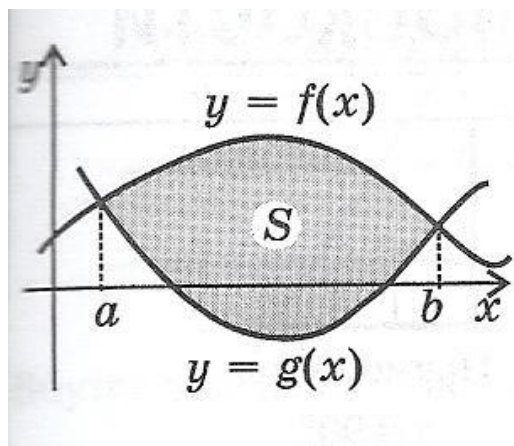
$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Вычисление площадей и объемов

с помощью определенного интеграла

Площадь фигуры,

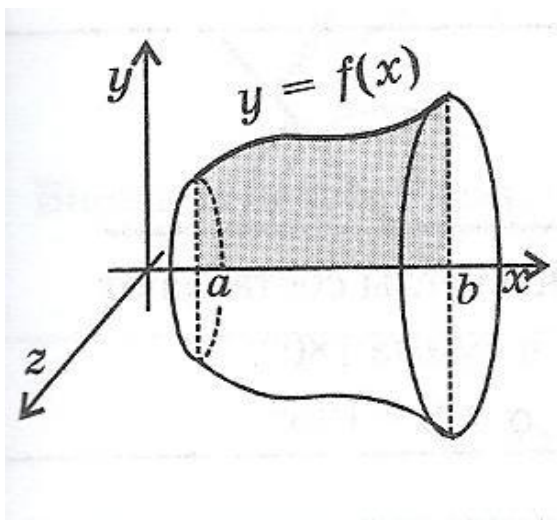
- Ограниченной графиками непрерывных функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ таких, что $f(x) \geq g(x)$ для любого x из $[a;b]$, где a и b – абсциссы точек пересечения графиков функций:



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Объем тела,

- полученного в результате вращения вокруг оси X криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$:



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$