ЛЕКЦИЯ 2

1. Определение определенного интеграла
2. Свойства определенного интеграла
3. Формула Ньютона-Лейбница
4. Несобственные интегралы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

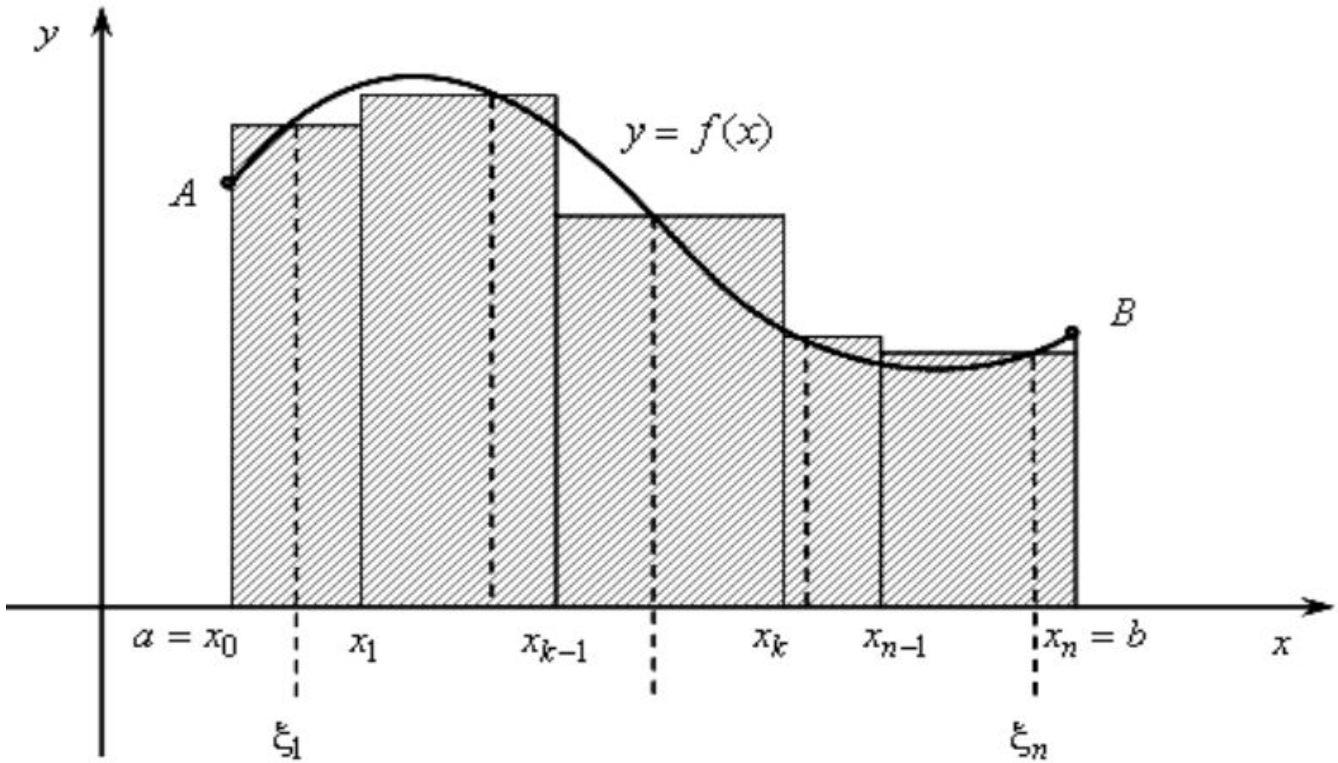
Обозначения и терминология

- Пусть $y = f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$. Предположим, что $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на *частичные* отрезки точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Геометрическая иллюстрация



Определение интегральной суммы

- Пусть $y = f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$. Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Определение определенного интеграла

- Пусть $y = f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$. Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Обозначение определенного интеграла

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке $y = f(x)$. Предположим, $[a, b]$ что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$f(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$$f(x)$$

Замечания к определению определенного интеграла

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Кусочно-непрерывные функции

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Теорема о существовании определенного интеграла

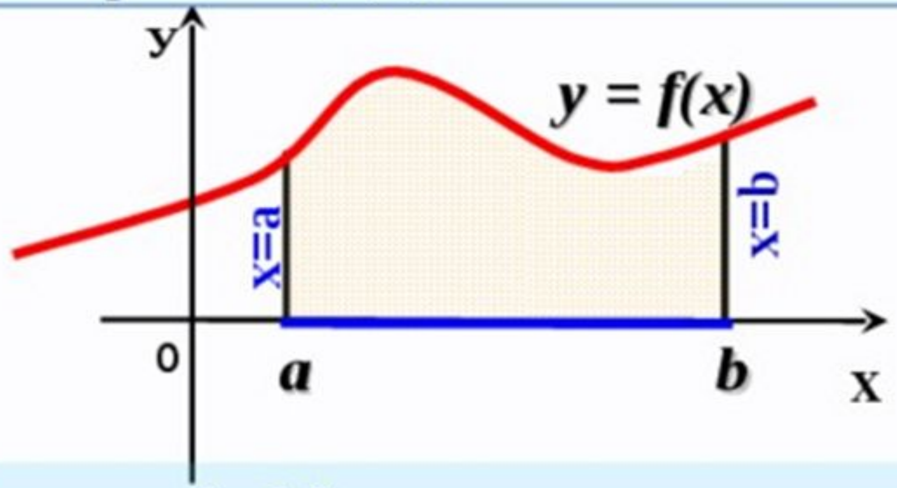
- Пусть $y = f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$. Предположим, что $\int_a^b f(x)dx$ для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке $y = f(x)$ произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Криволинейная трапеция

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке [a;b] знака функции f(x), прямыми x=a, x=b и отрезком [a;b].



Отрезок **[a;b]** называют ***основанием*** этой криволинейной трапеции

Геометрический смысл определенного интеграла

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

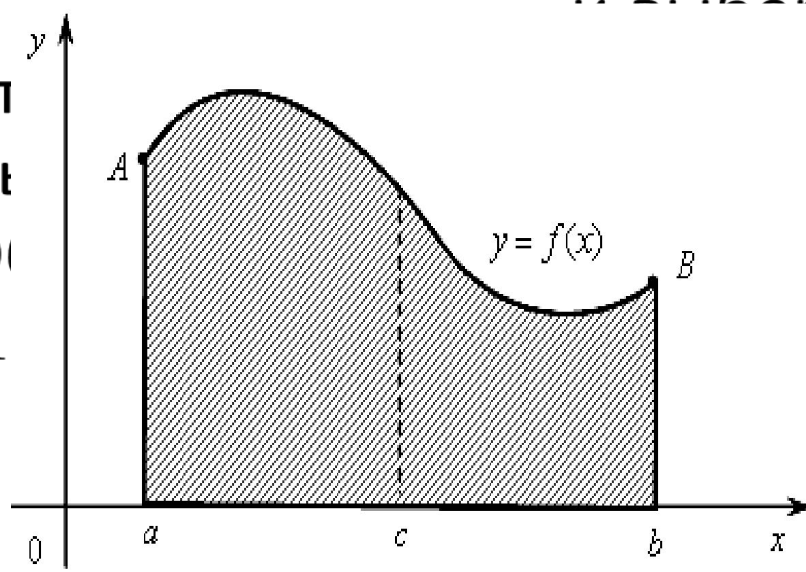
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Геометрическая иллюстрация свойства 3

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом част точке произвольн для всех $k = 1, \ldots, n$. О - x_{k-1} и $\sigma_n = f(\xi_1$ $)\Delta x_n =$



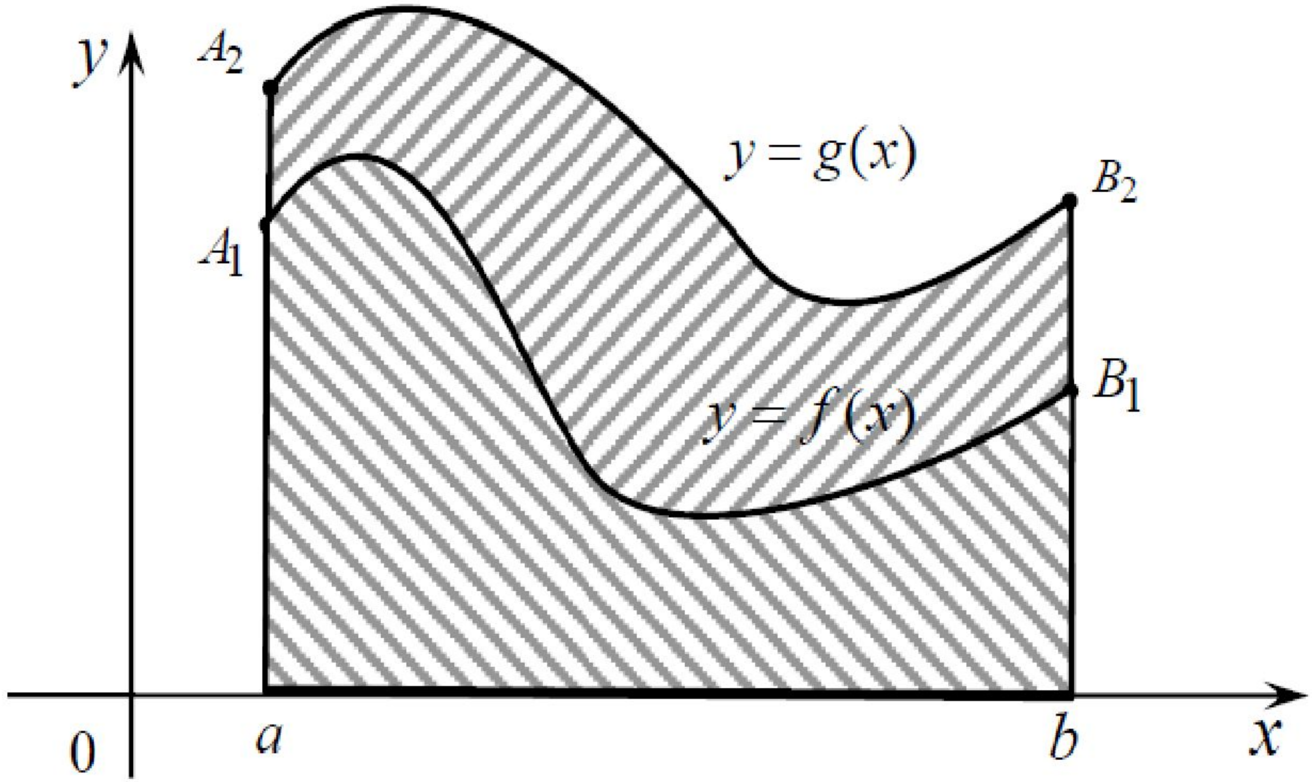
- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Геометрическая интерпретация свойства 4

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех .
Раз ки
точ
каж
про
$k =$



Следствия из свойства 4

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

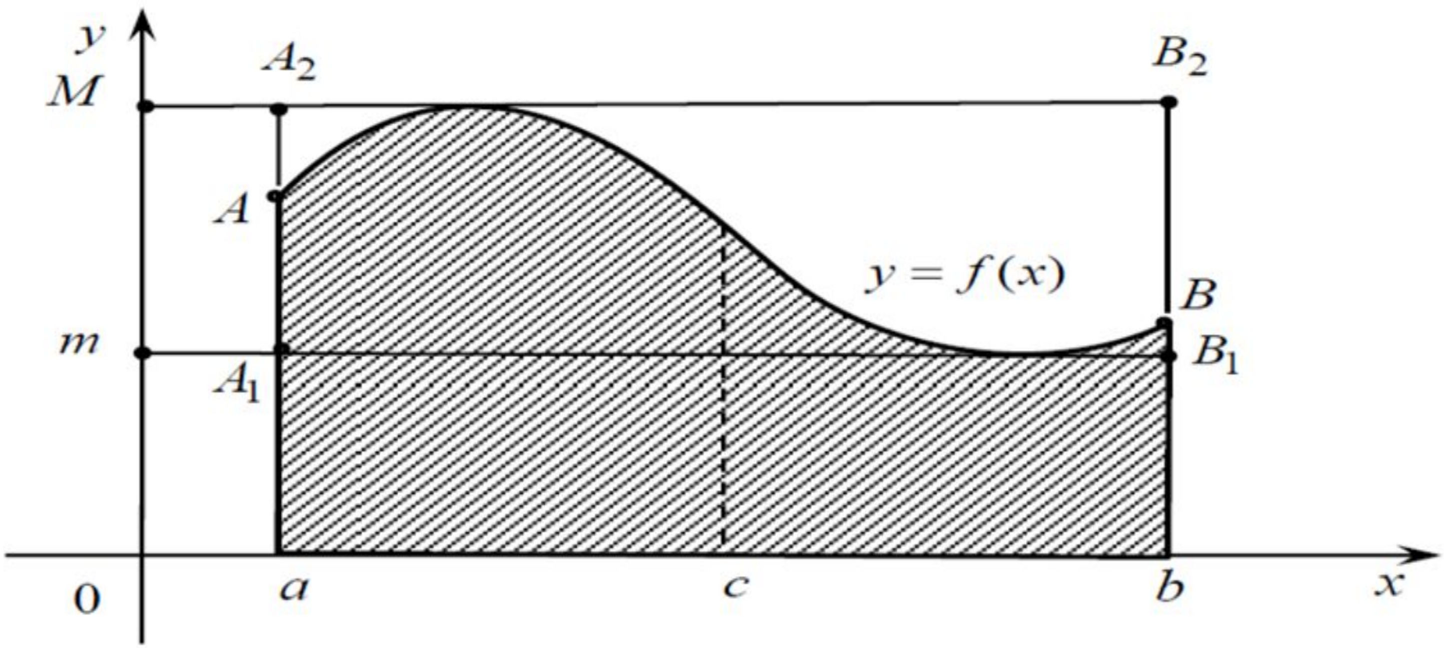
Теорема об оценке определенного интеграла

Если $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Геометрическая интерпретация теоремы

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на



Теорема о среднем

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

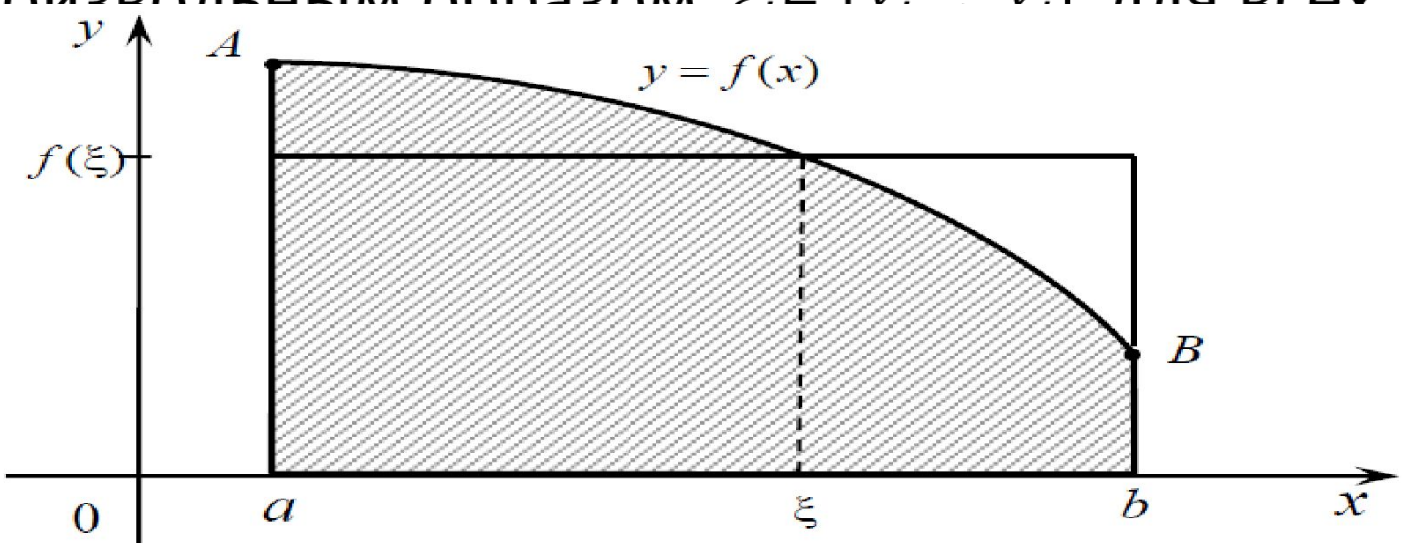
- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Геометрическая интерпретация теоремы о среднем

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех k =



- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Интегралы с верхним переменным пределом

- Пусть $y=f(x)$ – функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$. Предположим, что $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ для всех . Разобьем отрезок $[a,b]$ на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k=1,\dots,n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

Теорема о производной интеграла с верхним переменным пределом (теорема Берроу)

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

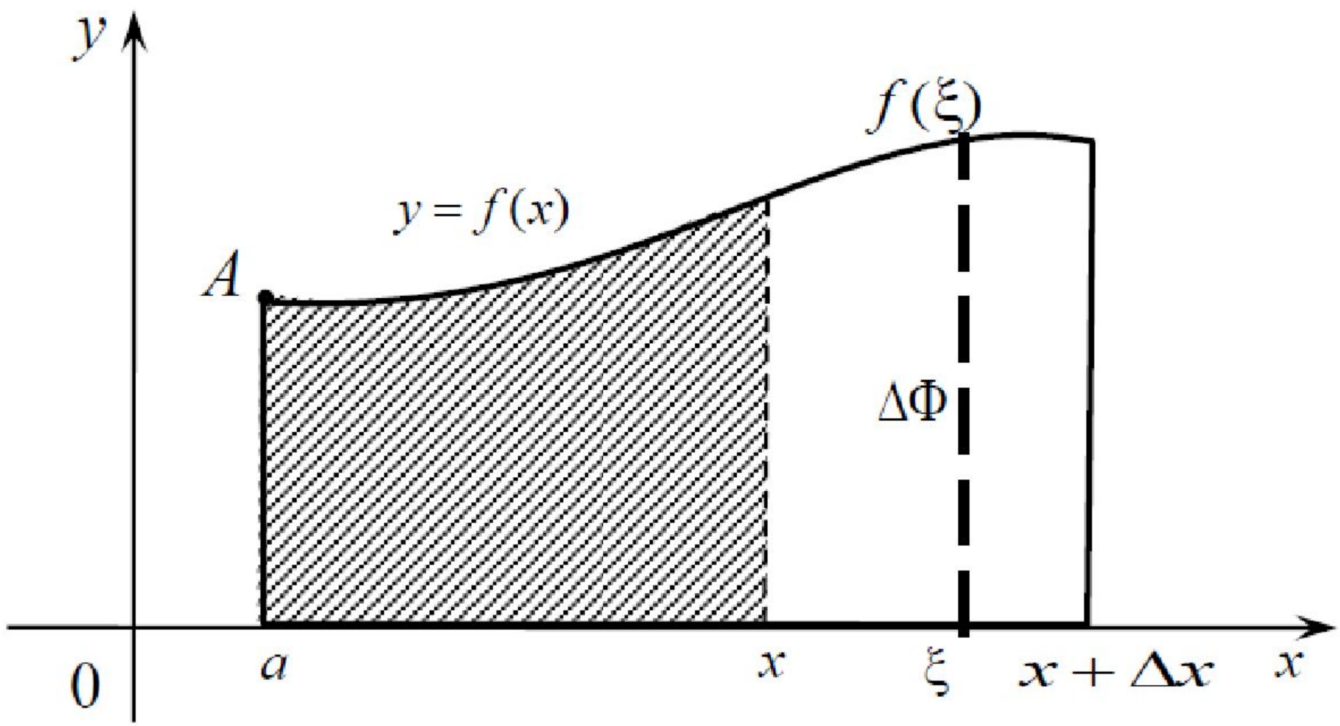
$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \\ = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Доказательство

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$



y
$f(\xi)$
$y = f(x)$
A
$\Delta\Phi$
0
a
x
ξ
$x + \Delta x$
x

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Замечание

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Формула Ньютона - Лейбница

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Доказательство

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$x = a$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 = F(a) + C$$

$C = -F(a)$

$$\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$$

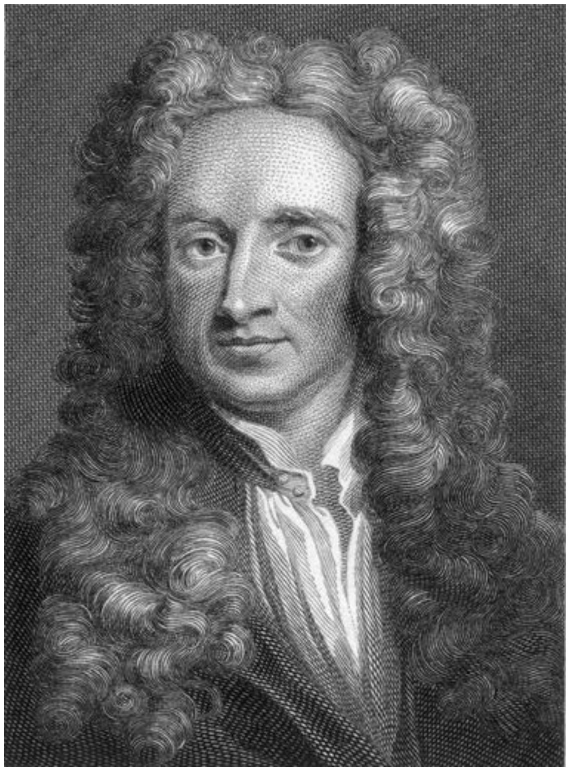
$x = b$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Значение формулы Ньютона - Лейбница

Формула Ньютона – Лейбница – это одна из немногих формул, объединяющих различные разделы математики воедино. Если бы не было формулы Ньютона – Лейбница, то неопределенные интегралы не нашли бы приложения, а определенные интегралы нельзя было бы вычислить аналитически. Именно эта формула делает интегральное исчисление важнейшим инструментом для математического моделирования процессов.

Ньютон и Лейбниц – гении науки



Исаак Ньютон
(4.01.1643-31.03.1727)

Готфрид Вильгельм
Лейбниц
(1.07.1646-14.11.1716)

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Интегрирование по частям

Для вычисления определенного интеграла используются формулы интегрирования по частям и замены переменной. Эти формулы похожи на соответствующие формулы для неопределенного интегрирования, но имеют свою специфику.

Формула для интегрирования по частям:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Интегрирование подстановкой

Замена переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

где $x = \varphi(t)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной *t* на отрезке $\alpha \le t \le \beta$,

$a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$.

Примеры

1) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = tg(\pi/4) - tg(\pi/6) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

2) $\int\limits_{0}^{4} \sqrt{2x+1}dx = \frac{(2x+1)^{3/2}}{2 \cdot 3/2}\Bigg|_{0}^{4} = \frac{\sqrt{9^3}}{3} - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

3) $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x;\ dv = e^{-x}dx \\ du = dx; v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x}\Big|_{0}^{1} + \int\limits_{0}^{1} e^{-x}dx =$

$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_{0}^{1} = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}$

Примеры

4)

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} \ln x = t;\ dt = \dfrac{dx}{x};\ x = 1 \quad t = 0 \\ \hfill x = e \quad t = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 t\,dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение несобственных интегралов

Несобственными называют интегралы с бесконечными пределами интегрирования и/или интегралы от неограниченных функций.

Обозначение: $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Для вычисления несобственных интегралов формула Ньютона–Лейбница не применима.

Вычисление несобственных интегралов 1-го рода (с бесконечными пределами интегрирования)

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

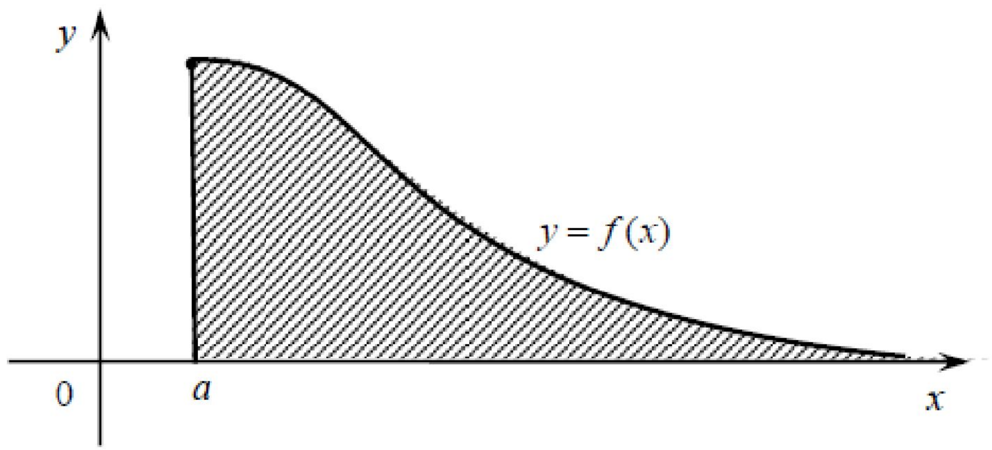
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

Если эти пределы существуют и конечны, то соответствующий несобственный интеграл называется *сходящимся*, если же - не существует или бесконечен, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Геометрический смысл несобственного интеграла 1-го рода

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произво... всех $k = 1, \dots,$ ... $_{-1}$ и $\sigma_n =$ ... $=$



Пример 1

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на ка

п

k

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Пример 2

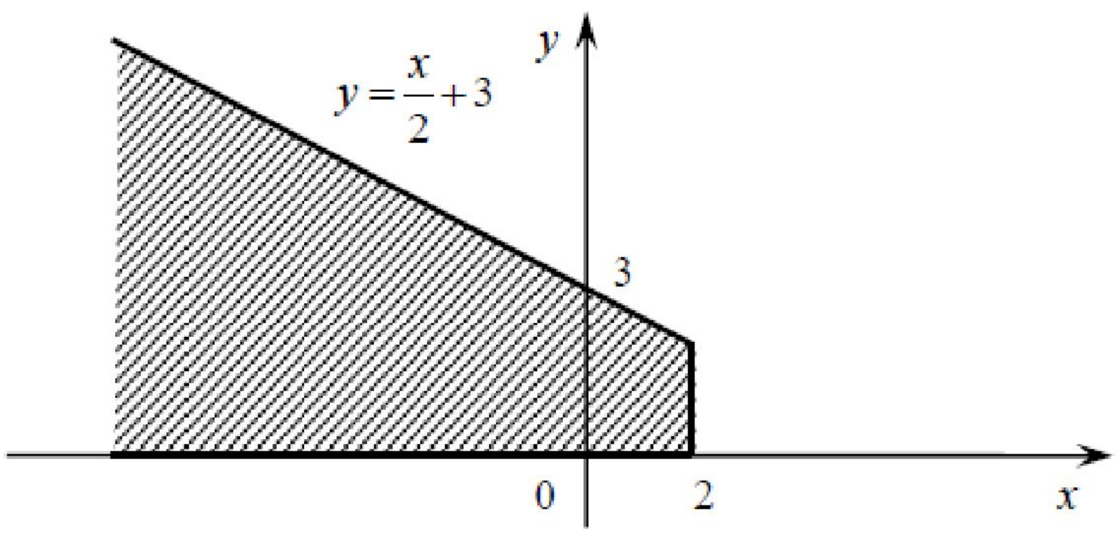
- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на

$$\int_{-\infty}^{2}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{2}\left(\frac{x}{2}+3\right)dx=\lim_{a\to-\infty}\left.\left(\frac{x^2}{4}+3x\right)\right|_{a}^{2}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2^2}{4}+6-\frac{a^2}{4}-6a\right)=-\infty.$$

$$=\sum_{k=1}f(\xi_k)\Delta x_k$$

Неограниченная трапеция



Важный пример

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке

. Предположим, что для всех .

Решение:

При $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} +\infty (\alpha < 1), \\ \dfrac{1}{\alpha - 1} (\alpha > 1). \end{cases}$$

При $\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\ln |x| \Big|_1^b \right) = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty .$$

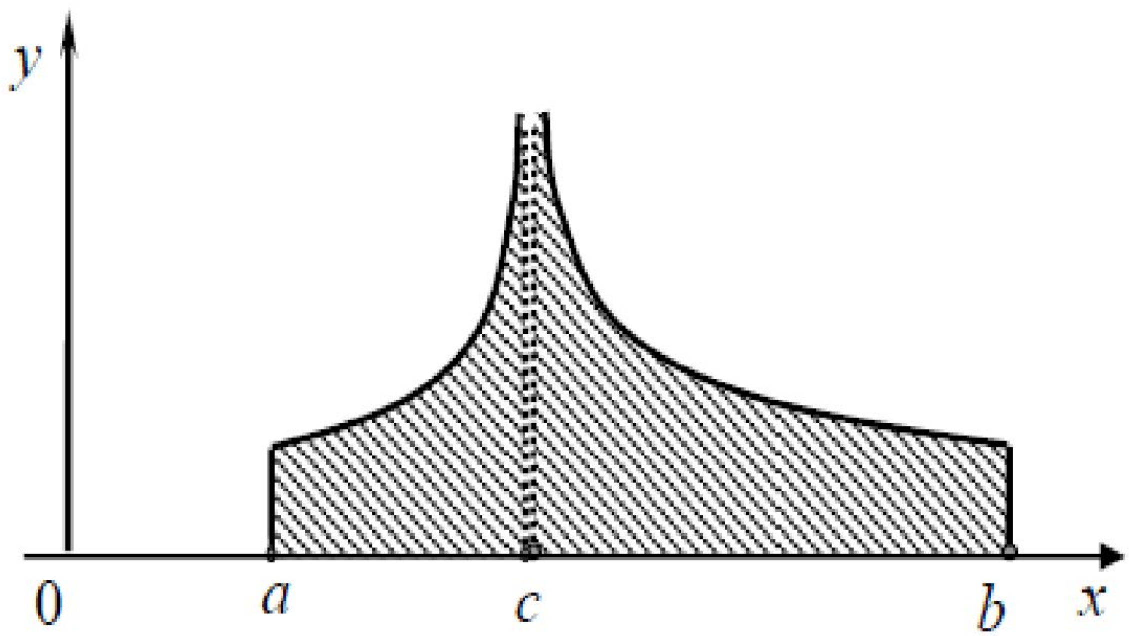
Следовательно, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Вычисление несобственных интегралов 2-го рода (от неограниченных функций)

Пусть функция $f(x)$ имеет бесконечный односторонний предел в какой-либо точке $c \in [a,b]$, то по определению принимаем, что *несобственный интеграл 2-го рода* от $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ равен

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to 0} \int_a^{c-\alpha} f(x)dx + \lim_{\beta \to 0} \int_{c+\beta}^b f(x)dx$$

Геометрическая интерпретация несобственного интеграла 2-го рода



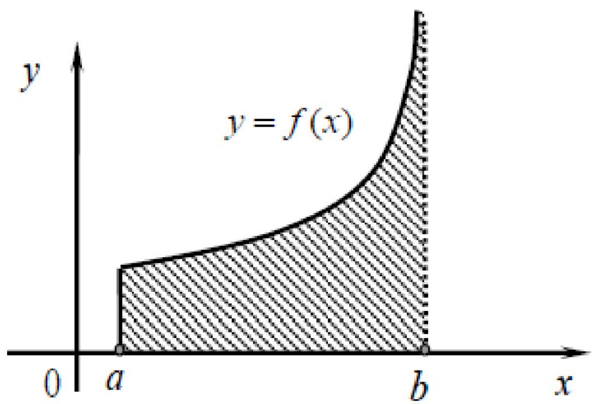
Частные случаи

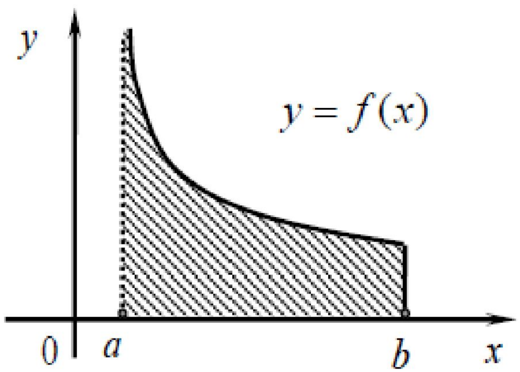
Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\alpha\to 0}\int\limits_{a+\alpha}^b f(x)dx$

Если $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\beta\to 0}\int\limits_a^{b-\beta} f(x)dx$

Несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $\lim\limits_{x\to c-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to c+0} f(x)=\infty$ для некоторого $c\in[a,b]$, называется *сходящимся*, если существуют оба предела в определении интеграла, и *расходящимся*, если не существует хотя бы один из них.

Геометрическая интерпретация





Пример вычисления несобственного интеграла 2-го рода

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки

Решение:

При $x=0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв. Имеем

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{dx}{x^2}+\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{dx}{x^2}\right)=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-1-1+\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=+\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

Ошибочное вычисление

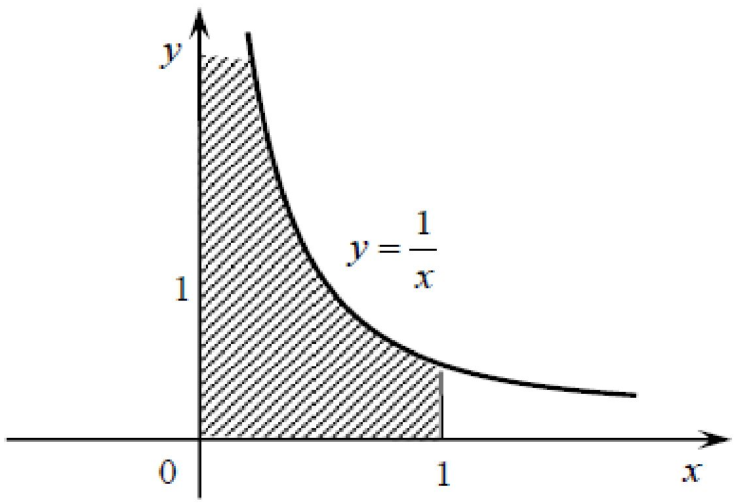
Замечание. Если бы мы вычисляли данный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница, не обращая внимания на точку разрыва, то получили бы сходящийся интеграл: $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -1-1=-2$. Этот результат неверен и явно противоречит следствию 2 из свойства 4 определенного интеграла, т. к. подынтегральная функция положительна.

Пример расходящегося несобственного интеграла

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке, не ограничена



Важный пример несобственного интеграла 2-го рода

- Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Пусть – функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\ln|b-x|\Big|_a^b = -\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\ln|\varepsilon| - \ln|b-a|\right) = \infty,$$

т. е. при $\alpha = 1$ интеграл расходится.

Пусть – функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = -\int_a^b (b-x)^{-1-s}\, d(b-x) = \left.\frac{1}{s(b-x)^s}\right|_a^b = \infty,$$

т. е. при $\alpha > 1$ интеграл расходится.

Пусть - функция, непрерывная на отрезке . Предположим, что для всех . Разобьем отрезок на *частичные* отрезки точками и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = -\int_a^b (b-x)^{-\alpha}\, d(b-x) = \left.\frac{(b-x)^s}{s}\right|_a^b = \frac{(b-a)^s}{s},$$

т. е. при $\alpha < 1$ интеграл сходится.

Примеры

1) $$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x^2}=\lim_{b\to\infty}-\frac{1}{x}\Bigg|_{1}^{b}=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1$$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{c}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{c}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

3) $$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\alpha\to 0}2\sqrt{x}\Big|_{\alpha}^{1}=\lim_{\alpha\to 0}2(1-\sqrt{\alpha})=2$$

4) $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to 0}\int_{-1}^{\beta}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1}\frac{dx}{x^2}=\infty$$