

ЛЕКЦИЯ 2

1. Определение определенного интеграла
2. Свойства определенного интеграла
3. Формула Ньютона-Лейбница
4. Несобственные интегралы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Обозначения и терминология

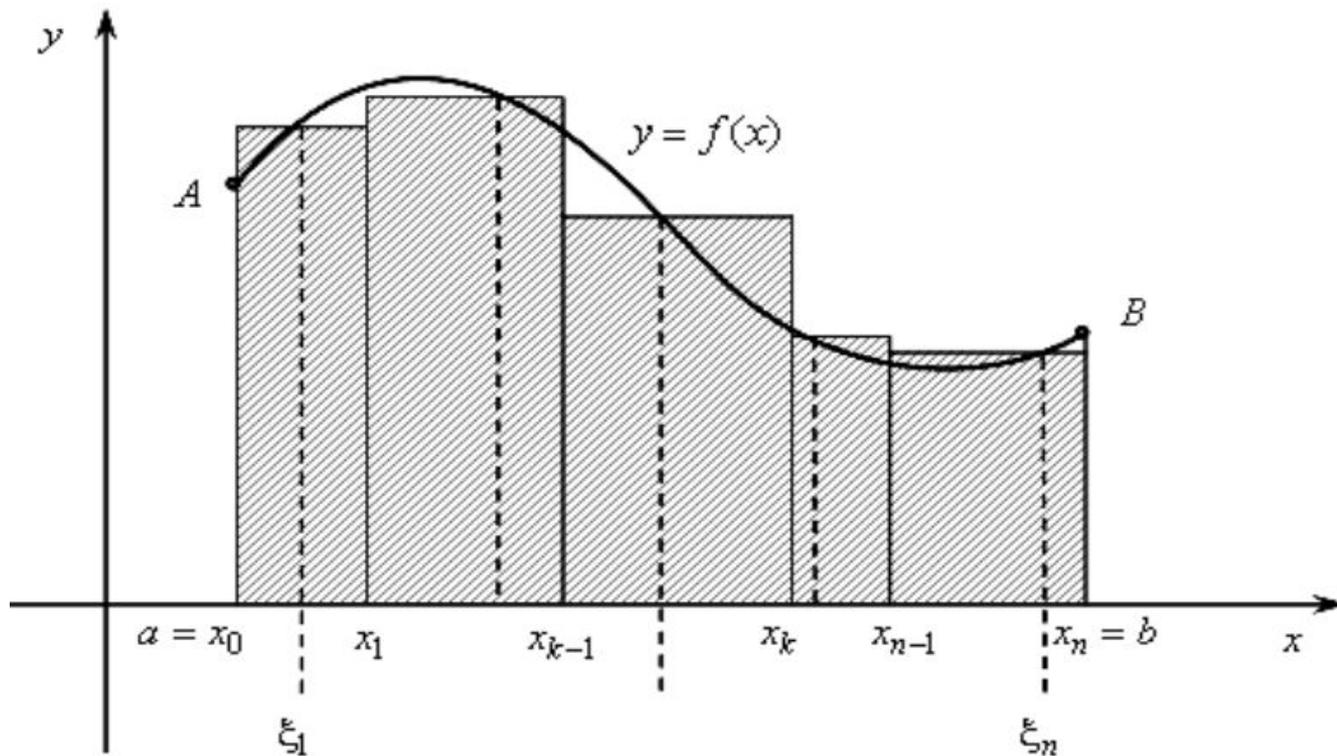
- Пусть $y = f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ и выберем на

каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\begin{aligned} \sigma_n &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

Геометрическая иллюстрация



Определение интегральной суммы

- Пусть $y = f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $y = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на частичные отрезки точками x_0, x_1, \dots, x_n и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и
$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$
$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Определение определенного интеграла

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и
$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Обозначение определенного интеграла

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на

каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\begin{aligned} \sigma_n &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \\ &= \int_a^b f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

Замечания к определению определенного интеграла

• Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

. Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки

точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на

каждом частичном отрезке по одной точке

произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех

$k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Кусочно-непрерывные функции

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.
Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на

каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

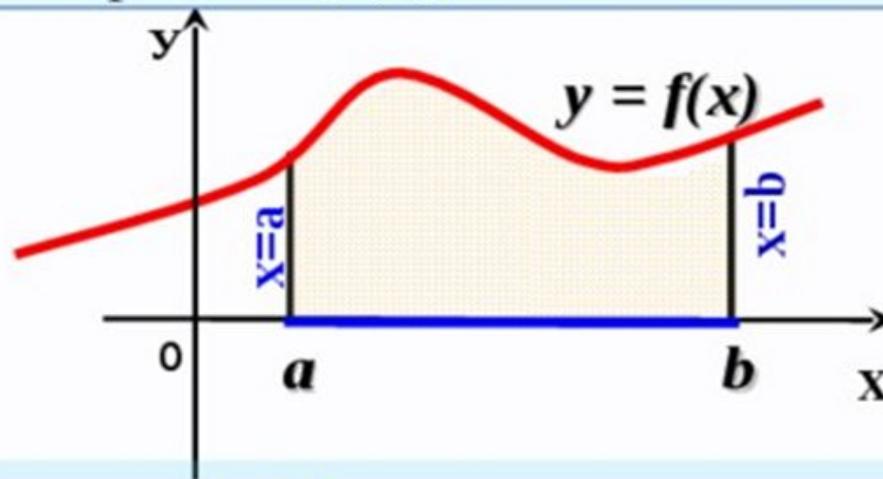
$$\begin{aligned} \sigma_n &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

Теорема о существовании определенного интеграла

- Пусть $y = f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $\int_a^b f(x) dx$ для всех a, b .
Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичные отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и $\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$
$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Криволинейная трапеция

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке $[a;b]$ знака функции $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a;b]$.



Отрезок $[a;b]$ называют **основанием** этой криволинейной трапеции

Геометрический смысл определенного интеграла

• Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке

$[a, b]$. Предположим, что $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на

каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\begin{aligned} \sigma_n &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.
 . Предположим, что $f(x)$ ограничена для всех $x \in [a, b]$.
 Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.
 . Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.
 Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

• Пусть $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичные отрезки точками x_1, x_2, \dots, x_n и выберем на

каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех

$k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Геометрическая иллюстрация свойства 3

• Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Предположим, что $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$.

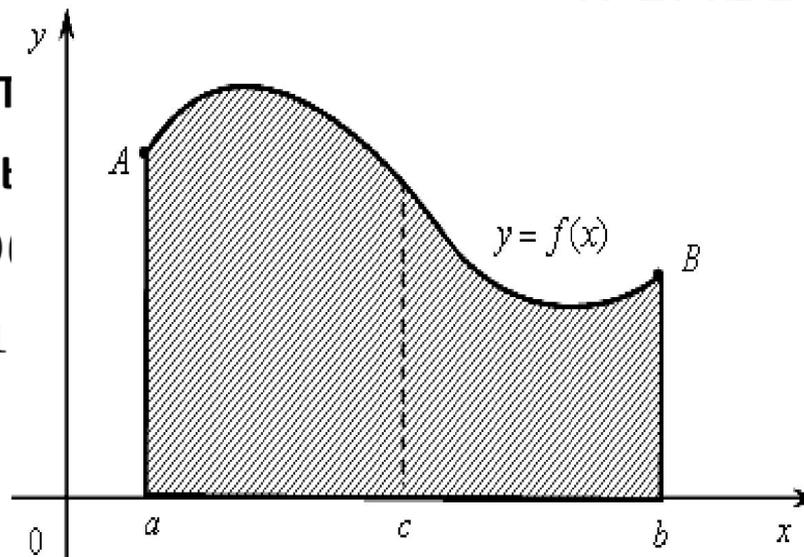
Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичные отрезки

точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем точку ξ_k .

Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n$$



$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.
 . Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.
 Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

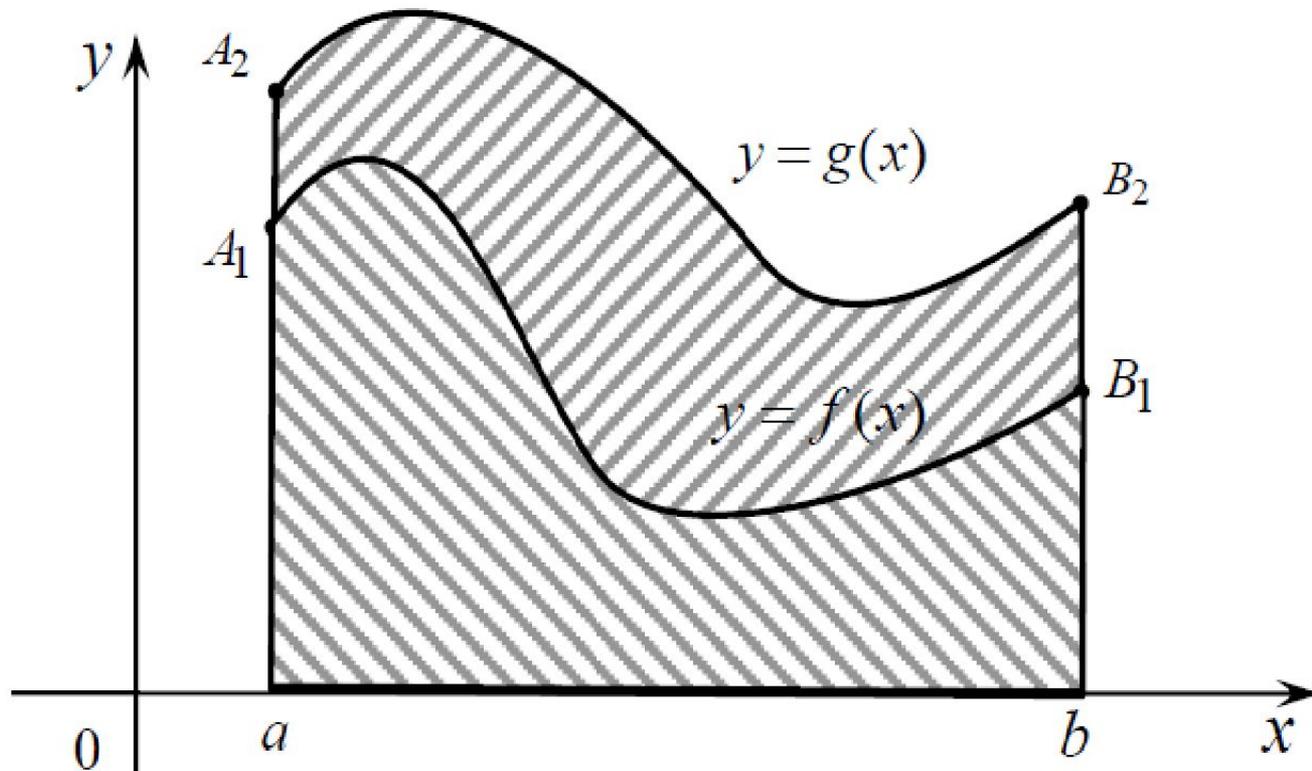
Геометрическая интерпретация свойства 4

• Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Предположим, что $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей.

Точки x_0, x_1, \dots, x_n называются узлами разбиения. Пусть $k = 1, 2, \dots, n$.



Следствия из свойства 4

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.
Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.
Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и $\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$
$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

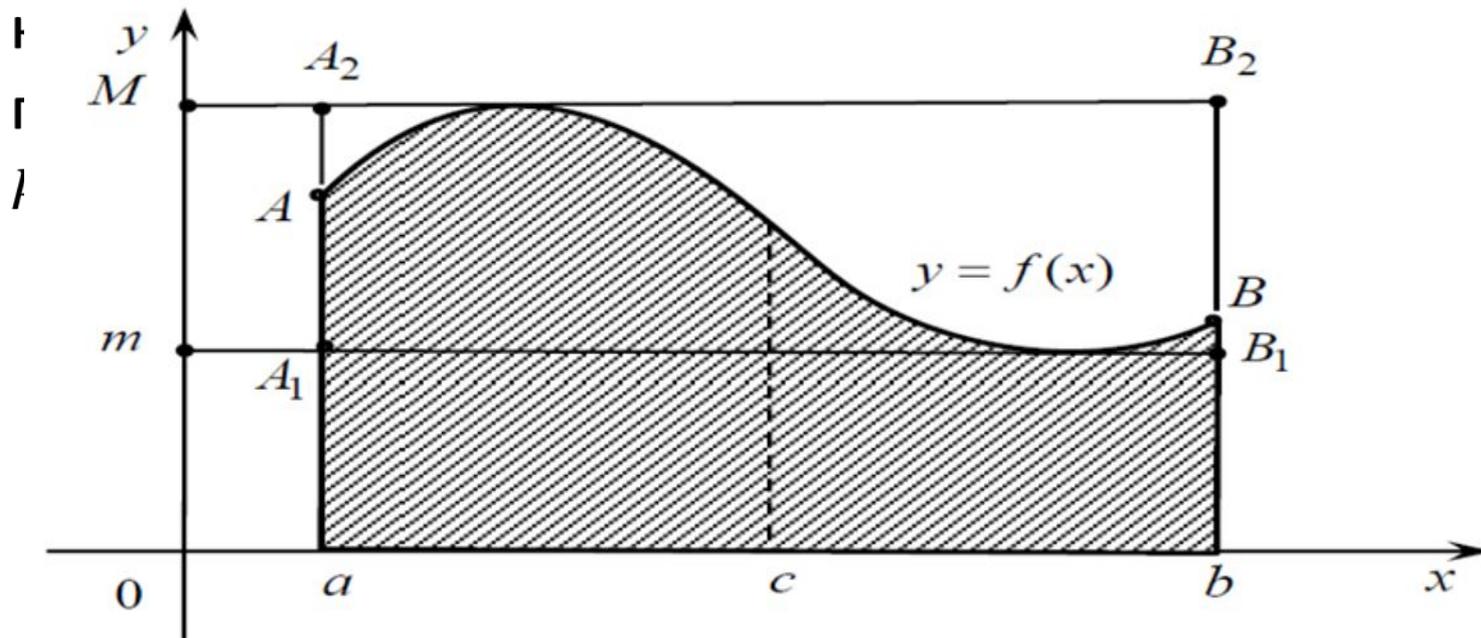
Теорема об оценке определенного интеграла

Если $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

Геометрическая интерпретация теоремы

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $f(x) \geq m$ для всех $x \in [a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичные отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ и выберем на $[x_{i-1}, x_i]$ точку ξ_i .



Теорема о среднем

• Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

. Предположим, что $f(x)$ дифференцируема для всех $x \in [a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки

точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на

каждом частичном отрезке по одной точке

произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех

$k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

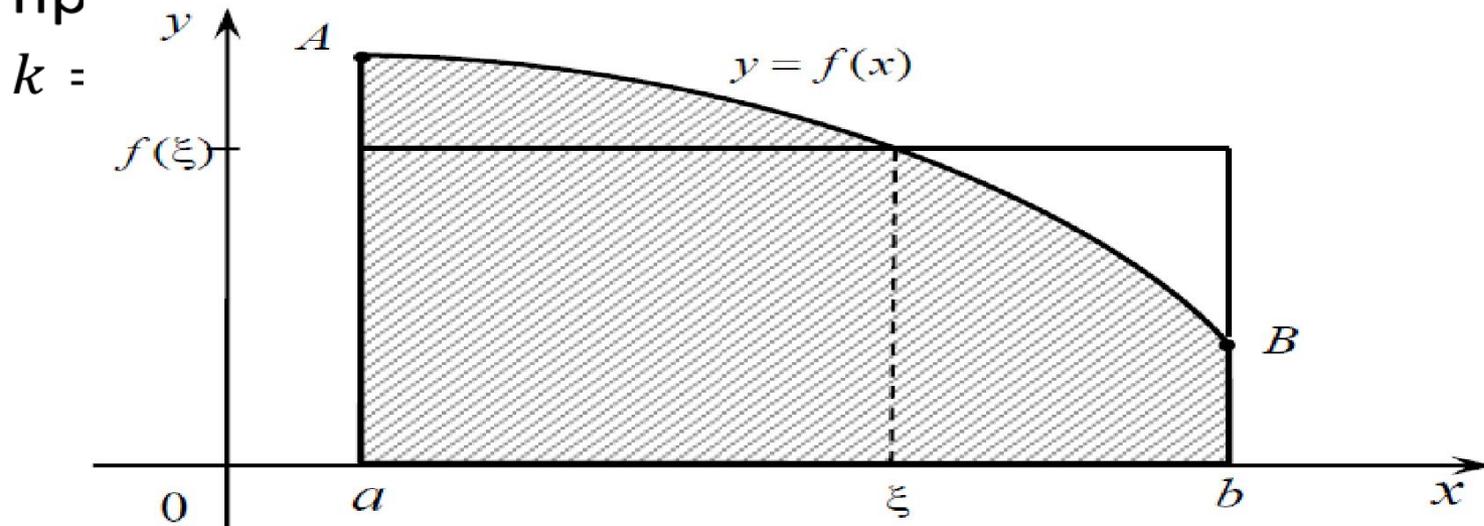
- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Геометрическая интерпретация теоремы о среднем

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in [a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на k частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_k = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, k$.



- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и $\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

Интегралы с верхним переменным пределом

- Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ для всех $x \in [a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на частичные отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

Теорема о производной интеграла с верхним переменным пределом (теорема Берроу)

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичные отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на

каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех

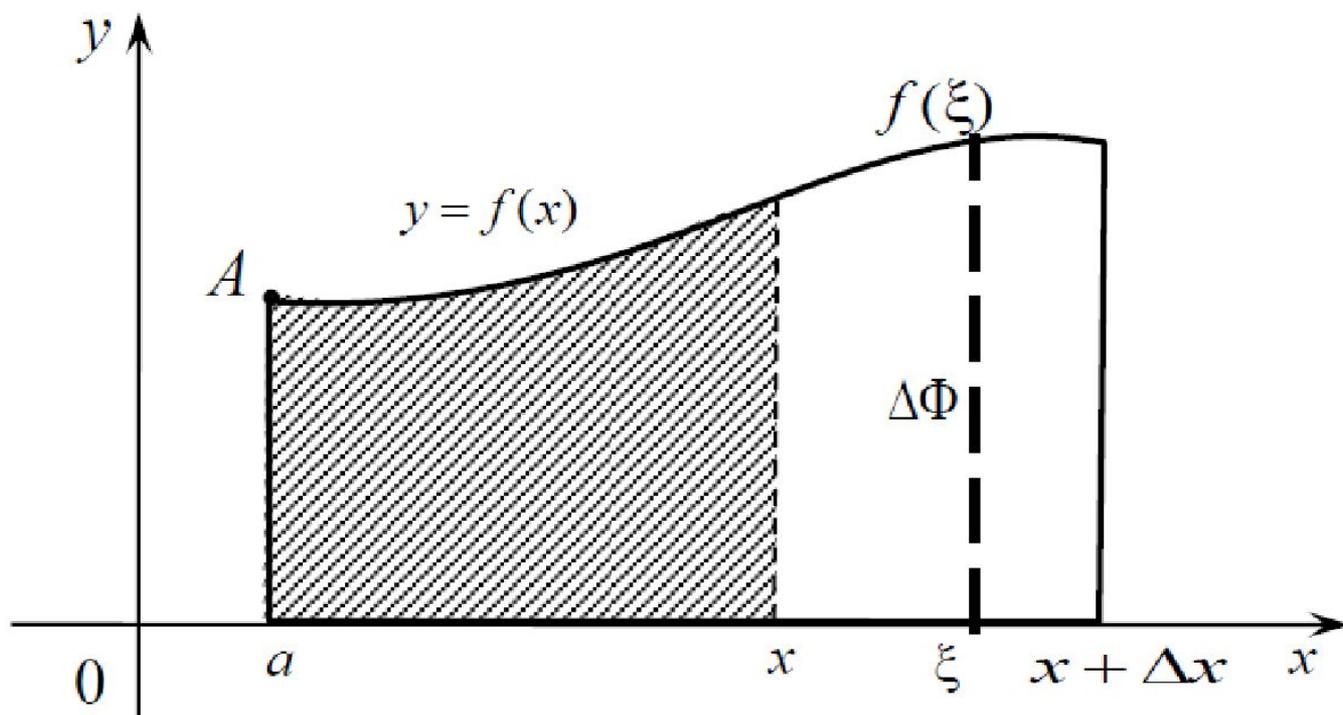
$k = 1, \dots, n$. Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Доказательство

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.
Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.
Разобьем отрезок $[a, b]$ на n *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и
$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$
$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$



- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и $\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Замечание

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.
Предположим, что $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ для всех $k = 1, 2, \dots, n$.
Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками x_1, x_2, \dots, x_n и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и
$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$
$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Формула Ньютона - Лейбница

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.
Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.
Разобьем отрезок $[a, b]$ на n *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и $\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$
$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Доказательство

• Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на

каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\begin{aligned} \sigma_n &= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

• Пусть a - функция $f(x)$ непрерывная на отрезке

. Предположим, что $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ для всех x .

Разобьем отрезок $[a, b]$ на частичные отрезки точками $C = -F(a)$ и выберем на

каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех

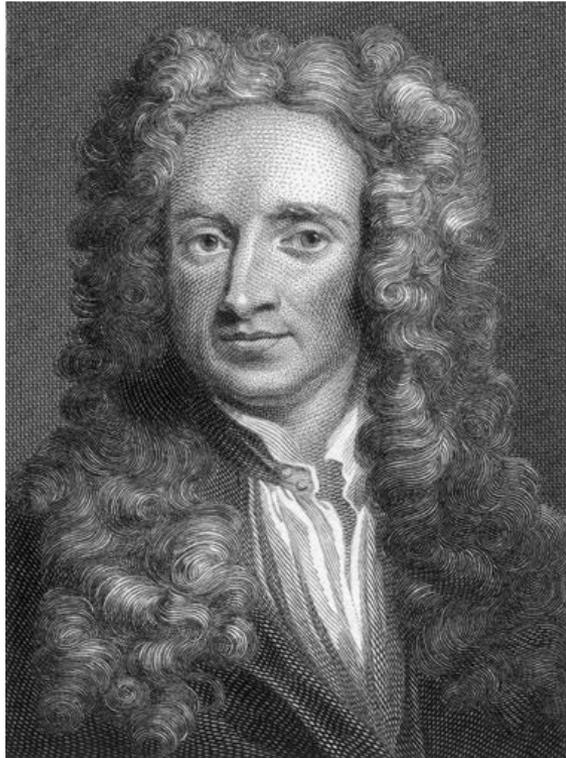
$k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

Значение формулы Ньютона - Лейбница

Формула Ньютона – Лейбница – это одна из немногих формул, объединяющих различные разделы математики воедино. Если бы не было формулы Ньютона – Лейбница, то неопределенные интегралы не нашли бы приложения, а определенные интегралы нельзя было бы вычислить аналитически. Именно эта формула делает интегральное исчисление важнейшим инструментом для математического моделирования процессов.

Ньютон и Лейбниц – гении науки



Исаак Ньютон

(4.01.1643-31.03.1727)



Готфрид Вильгельм
Лейбниц

(1.07.1646-14.11.1716)

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Интегрирование по частям

Для вычисления определенного интеграла используются формулы интегрирования по частям и замены переменной. Эти формулы похожи на соответствующие формулы для неопределенного интегрирования, но имеют свою специфику.

Формула для интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Интегрирование подстановкой

Замена переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

где $x = \varphi(t)$ - монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$,

$$a = \varphi(\alpha) \quad b = \varphi(\beta)$$

Примеры

$$1) \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}x \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}(\pi/6) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2) \int_0^4 \sqrt{2x+1} dx = \frac{(2x+1)^{3/2}}{2 \cdot 3/2} \Big|_0^4 = \frac{\sqrt{9^3}}{3} - \frac{1}{3} = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

$$3) \int_0^1 x e^{-x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x; \quad dv = e^{-x} dx \\ du = dx; \quad v = -e^{-x} \end{array} \right] = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx =$$
$$= -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = -2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

Примеры

4)

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\begin{array}{l} \ln x = t; dt = \frac{dx}{x}; x = 1 \quad t = 0 \\ x = e \quad t = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение несобственных интегралов

Несобственными называют интегралы с бесконечными пределами интегрирования и/или интегралы от неограниченных функций.

Обозначение: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Для вычисления несобственных интегралов формула Ньютона–Лейбница не применима.

Вычисление несобственных интегралов 1-го рода (с бесконечными пределами интегрирования)

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

Если эти пределы существуют и конечны, то соответствующий несобственный интеграл называется *сходящимся*, если же - не существует или бесконечен, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

Геометрический смысл несобственного интеграла 1-го рода

• Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, +\infty)$.

Предположим, что $f(x) > 0$ для всех $x \in [a, +\infty)$.

Разобьем отрезок $[a, +\infty)$ на *частичные* отрезки

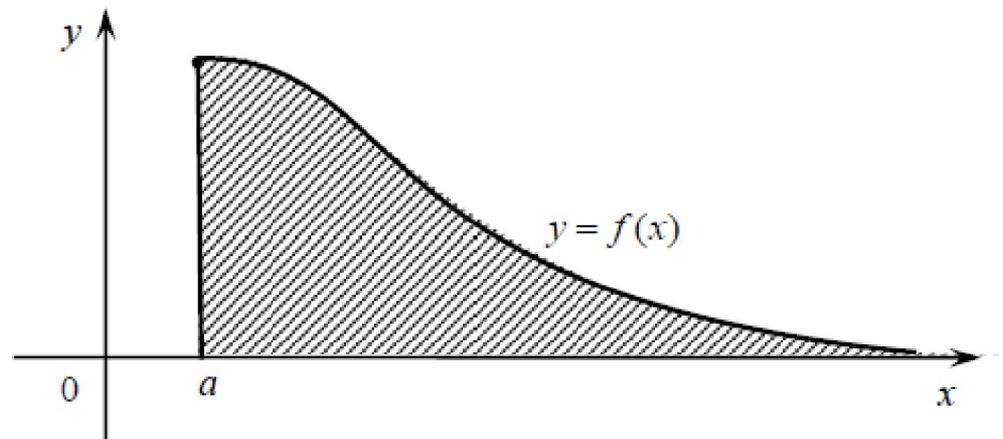
точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n$ и выберем на

каждом частичном отрезке по одной точке

произво. $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$.

$k = 1, \dots, n$ $\sigma_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$ и

$\sigma_n =$

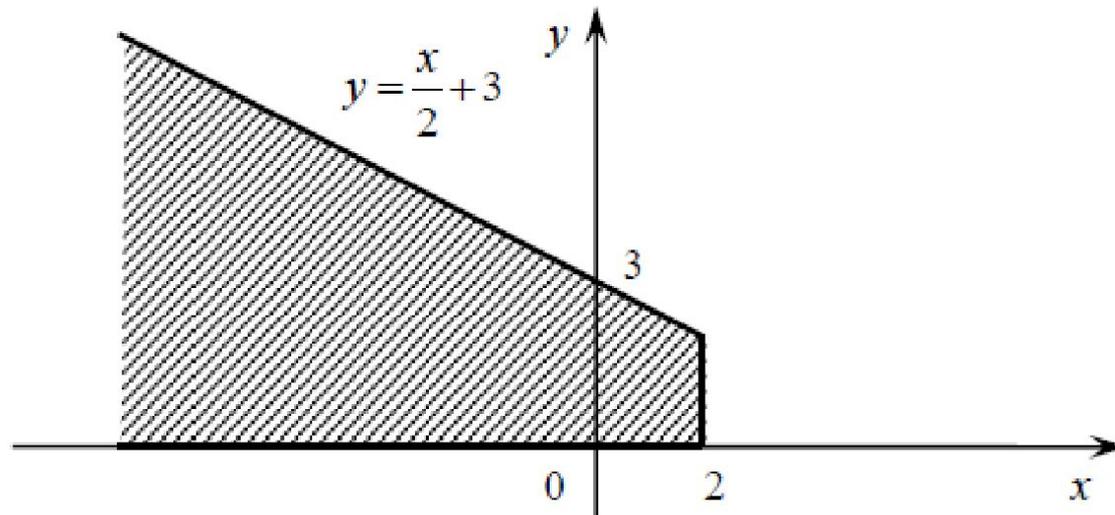


Пример 2

- Пусть $f(x) = \frac{x}{2} + 3$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, 2]$.
Предположим, что $\Delta x_k \rightarrow 0$ для всех k .
Разобьем отрезок $[a, 2]$ на n частичные отрезки $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ точками $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и выберем на

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^2 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^2 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{4} + 3x \right) \Big|_a^2 = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{2^2}{4} + 6 - \frac{a^2}{4} - 6a \right) = -\infty. \\ &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

Неограниченная трапеция



Важный пример

• Пусть $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ - функция, непрерывная на отрезке

Предположим, что $\alpha > 1$ для всех $x > 0$.

Решение:

При $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \right) = \begin{cases} +\infty (\alpha < 1), \\ \frac{1}{\alpha-1} (\alpha > 1). \end{cases}$$

При $\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln |x| \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = \infty.$$

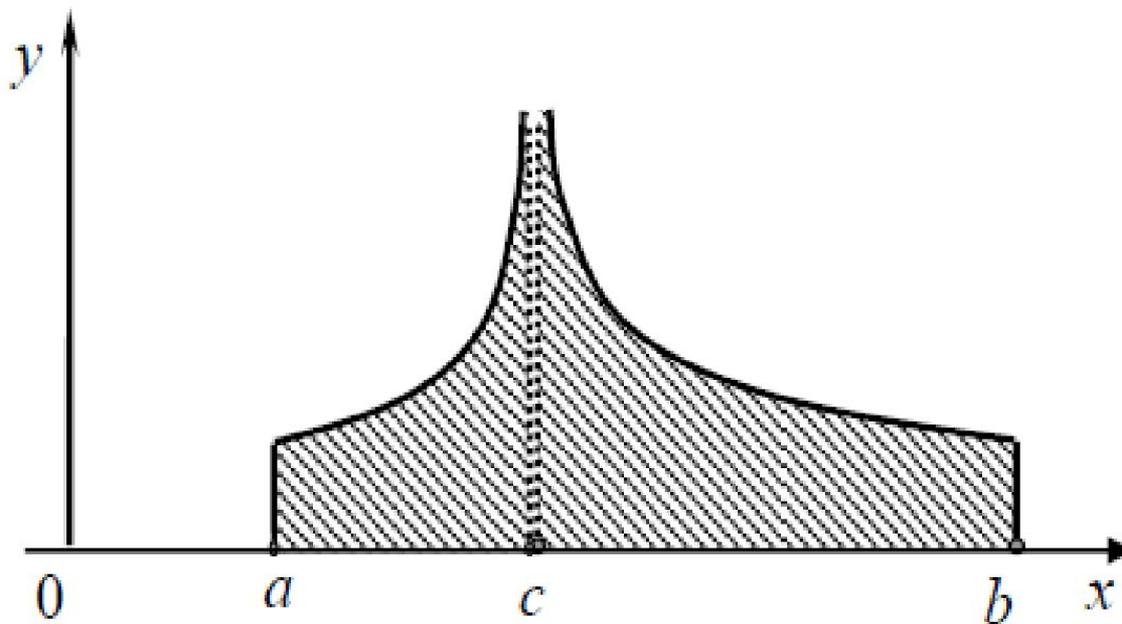
Следовательно, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

Вычисление несобственных интегралов 2-го рода (от неограниченных функций)

Пусть функция $f(x)$ имеет бесконечный односторонний предел в какой-либо точке $c \in]a, b[$ по определению принимаем, что *несобственный интеграл 2-го рода* от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ равен

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_a^{c-\alpha} f(x) dx + \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{c+\beta}^b f(x) dx$$

Геометрическая интерпретация несобственного интеграла 2-го рода



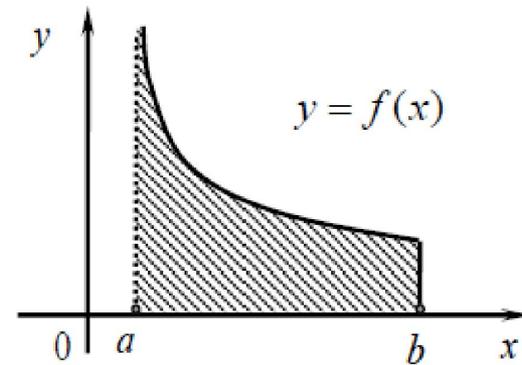
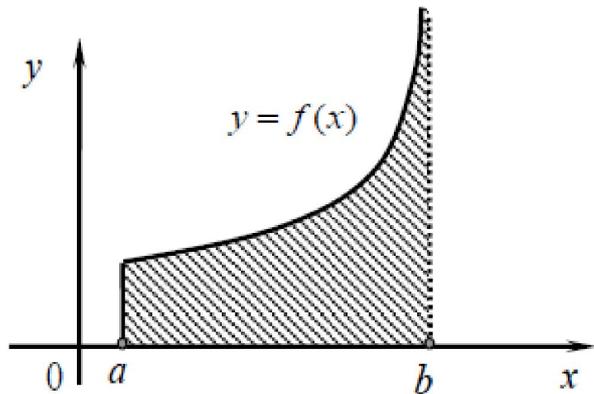
Частные случаи

Если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, то $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{a+\alpha}^b f(x) dx$

Если $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$, то $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_a^{b-\beta} f(x) dx$

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ где $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = \infty$
или $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = \infty$ для некоторого $c \in [a, b]$,
называется *сходящимся*, если существуют оба
предела в определении интеграла, и *расходящимся*,
если не существует хотя бы один из них.

Геометрическая интерпретация



Пример вычисления несобственного интеграла 2-го рода

- Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2}$ - функция, непрерывная на отрезке $[-1, 1]$.
Предположим, что $f(x) > 0$ для всех $x \in [-1, 1]$.
Разобьем отрезок $[-1, 1]$ на *частичные* отрезки

Решение:

При $x=0$ подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв.
Имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} \right) = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 - 1 + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = +\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

Ошибочное вычисление

Замечание. Если бы мы вычисляли данный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница, не обращая внимания на точку разрыва, то получили бы сходящийся интеграл:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2. \text{ Этот результат неверен и явно противоречит следствию}$$

2 из свойства 4 определенного интеграла, т. к. подынтегральная функция положительна.

Пример расходящегося несобственного интеграла

Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Предположим, что $f(x) > 0$ для всех $x \in [a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичные отрезки

точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на

каждом частичном отрезке по одной точке

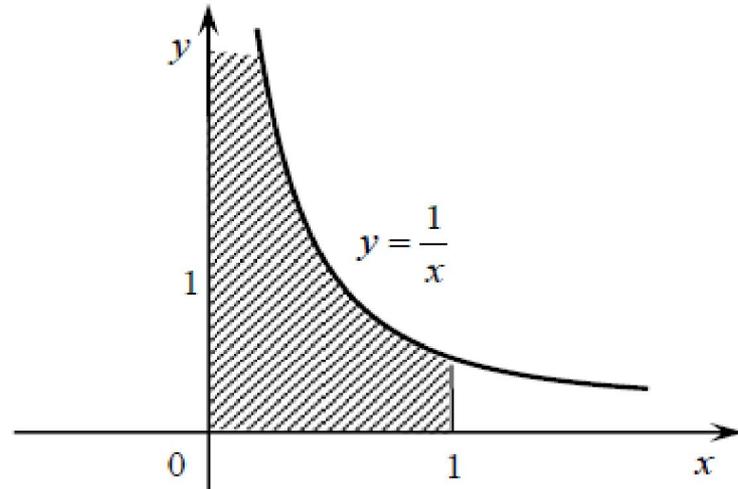
произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех

$k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции, изображенной на рисунке, не ограничена



Важный пример несобственного интеграла 2-го рода

- Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.
Предположим, что $f(x) > 0$ для всех $x \in [a, b]$.
Разобьем отрезок $[a, b]$ на *частичные* отрезки точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и $\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$
$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$. Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на каждом частичном отрезке по одной точке произвольным образом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ для всех $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$$

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\ln|b-x| \Big|_a^b = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln|\varepsilon| - \ln|b-a|) = \infty,$$

т. е. при $\alpha = 1$ интеграл расходится.

Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.
 Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$
 Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$
 точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на
 каждом частичном отрезке по одной точке $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$
 произвольным образом. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и
 $\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$
 $= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = - \int_a^b (b-x)^{-1-s} d(b-x) = \frac{1}{s(b-x)^s} \Big|_a^b = \infty,$$

т. е. при $\alpha > 1$ интеграл расходится.

Пусть $f(x)$ - функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.
 Предположим, что $f(x)$ для всех $x \in [a, b]$
 Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частичные отрезки $[x_{k-1}, x_k]$
 точками $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ и выберем на
 каждом частичном отрезке по одной точке $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$
 произвольным образом. Обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и
 $\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n =$
 $= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = - \int_a^b (b-x)^{-\alpha} d(b-x) = \frac{(b-x)^s}{s} \Big|_a^b = \frac{(b-a)^s}{s},$$

т. е. при $\alpha < 1$ интеграл сходится.

Примеры

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^c \frac{dx}{1+x^2} + \int_c^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2\sqrt{x} \Big|_{\alpha}^1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{\alpha}) = 2$$

$$4) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_{-1}^{\beta} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^1 \frac{dx}{x^2} = \infty$$