

Предел функции

Раскрытие неопределенности

Свойства вычисления пределов

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$, то

1) Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b + c$$

2) Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \cdot c$$

3) Предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n : y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n : \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b : c$$

4) Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot x_n) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = k \cdot b$$



Правила вычисления пределов

1. Если старшая степень числителя и знаменателя совпадают, то предел такого вида всегда будет равен отношению коэффициентов при старших степенях переменной.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{x^5 + 4x^2 + 2x} = 2$$



2. Если степень знаменателя выше степени числителя, то предел такого вида равен нулю.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2} = 0$$



Правила вычисления пределов

3. Если же старшая степень числителя выше степени знаменателя, то, очевидно, все слагаемые знаменателя в пределе будут равны нулю, это означает, что предел не существует.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - x^2 + i}{x^4 + 2x^3 + x} = \infty$$

формулы в помощь

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{4^x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+7}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{\ln x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3}{x^3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-99} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^4 + x - 9} = 0$$



Методика вычисления пределов в точке

Если и в знаменателе и в числителе нули, то, говорят, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Методика раскрытия таких неопределенностей проста. Если числитель и знаменатель дробно-рациональной функции при $x = a$, то разложение на множители и числителя и знаменателя обязательно содержат сомножитель $(x - a)$, на который дробь будет сокращена. Покажем на примере.



Раскрытие неопределенности вида 0/0

Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1}$$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 5}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность 0/0

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} = \frac{0}{0} = (*)$$

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенность вида 0/0, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители.**

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1) \cdot (2x - 5)}{x + 1} = (*) \quad \text{Очевидно, что можно сократить на } (x + 1)$$

$$(*) = \lim_{x \rightarrow -1} (2x - 5) = (*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$\Rightarrow 2 \cdot (-1) - 5 = -2 - 5 = -7$$

Пример 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3}$

Решение. Выяснили, что при $x = 1$ и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 4x + 3} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 5)}{(x - 1)(x - 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 5)}{(x - 3)} = \frac{6}{-4} \end{aligned}$$



Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10}$

Решение. Выяснили, что при $x = 2$ и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители $ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 7)}{(x - 2)(x + 5)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 7)}{(x + 5)} = -\frac{5}{7}$$



*Активно используйте формулы сокращенного
умножения*

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

Решение. Выяснили, что при $x = 2$ и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, воспользуемся формулами сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)}{(x^2 + 2x + 4)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

