Предел функции

Раскрытие неопределенности

Свойства вычисления пределов

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = c$, то

1)Предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = b + c$$

2)Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = b \cdot c$$

3)Предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n : y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n : \lim_{n\to\infty} y_n = b : c$$

4)Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} (k \cdot x_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = k \cdot b$$

Правила вычисления пределов

1. Если старшая степень числителя и знаменателя совпадают, то предел такого вида всегда будет равен отношению коэффициентов при старших степенях переменной.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^3+1}{x^5+4x^2+2x}=2$$

Правила вычисления пределов

2. Если степень знаменателя выше степени числителя, то предел такого вида равен нулю.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2+1}{2x^4-3x^2+5x+2}=0$$

Правила вычисления пределов

3. Если же старшая степень числителя выше степени знаменателя, то, очевидно, все слагаемые знаменателя в пределе будут равны нулю, это означает, что предел не существует.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^6 - x^2 + i}{x^4 + 2x^3 + x} = \infty$$

формулы в помощь

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{4^x}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+7}}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12}{\ln x}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{-3}{x^3}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-99}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^4+x-9}=0$$

Методика вычисления пределов в точке

Если и в знаменателе и в числителе нули, то, говорят, имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

Методика раскрытия таких неопределенностей проста. Если числитель и знаменатель дробно-рациональной функции при x = a, то разложение на множители и числителя и знаменателя обязательно содержат сомножитель (x – a), на который дробь будет сокращена. Покажем на примере.

Раскрытие неопределенности вида 0/0

Вычислить предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность 0/0

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенность вида 0/0, то для ее раскрытия **нужно разложить числитель и знаменатель на множители**.

$$(*)=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1}=(*)$$

Очевидно, что можно сократить на (x+1)

$$(*)=\lim_{x\to -1}(2x-5)=(*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$=2\cdot(-1)-5=-2-5=-7$$

Пример 1. **Вычислить** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3}$

Решение. Выяснили, что при x = 1 и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители $\boldsymbol{ax^2+bx+c=(x-x_1)(x-x_2)}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-4x+3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x-3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+5)}{(x-3)}=\frac{6}{-4}$$

Пример 2. **Вычислить** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10}$

Решение. Выяснили, что при х = 2 и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, раскладываем числитель и знаменатель на множители, используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 9x + 14}{x^2 + 3x - 10} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-7)}{(x-2)(x+5)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-7)}{(x+5)} = -\frac{5}{7}$$

Активно используйте формулы сокращенного умножения

Пример 3. **Вычислить** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

Решение. **Выяснили, что при x = 2 и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$, воспользуемся формулами сокращенного умножения**

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),\ a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)}{(x^2+2x+4)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$