

«Преобразование графиков функций» памятка для учащихся

Зная график функции $y = f(x)$, можно построить график функции $y = f(x)+b$, $y = f(x-a)$, $y = f(ax)$, $y = kf(x)$, $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$ и графика обратной функции

Рисунки взяты с сайта:

<https://matematikalegko.ru/shkolniku/matematika-v-tablicax/algebra/funkcii/preobrazovanie-grafikov-funkcij>

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ y

$$f(x) \rightarrow f(x) + b$$

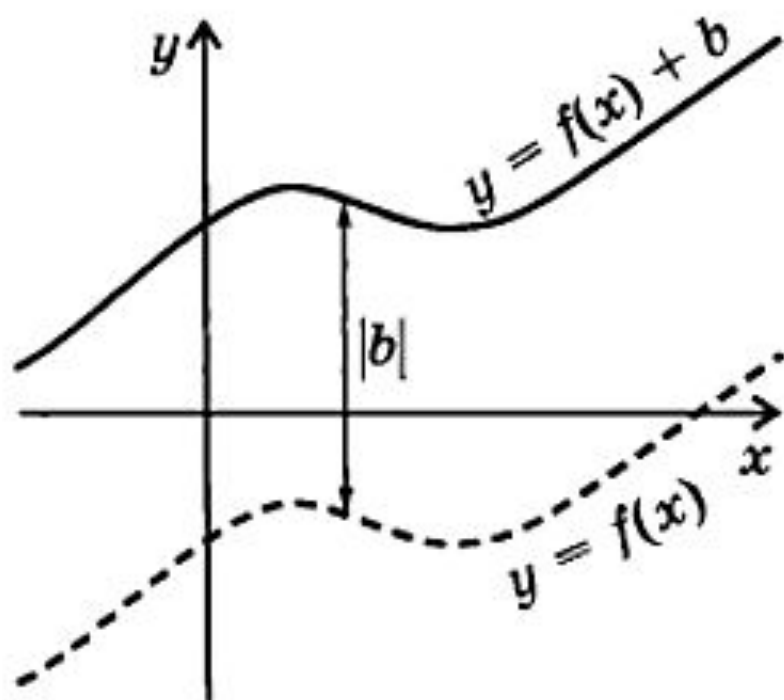
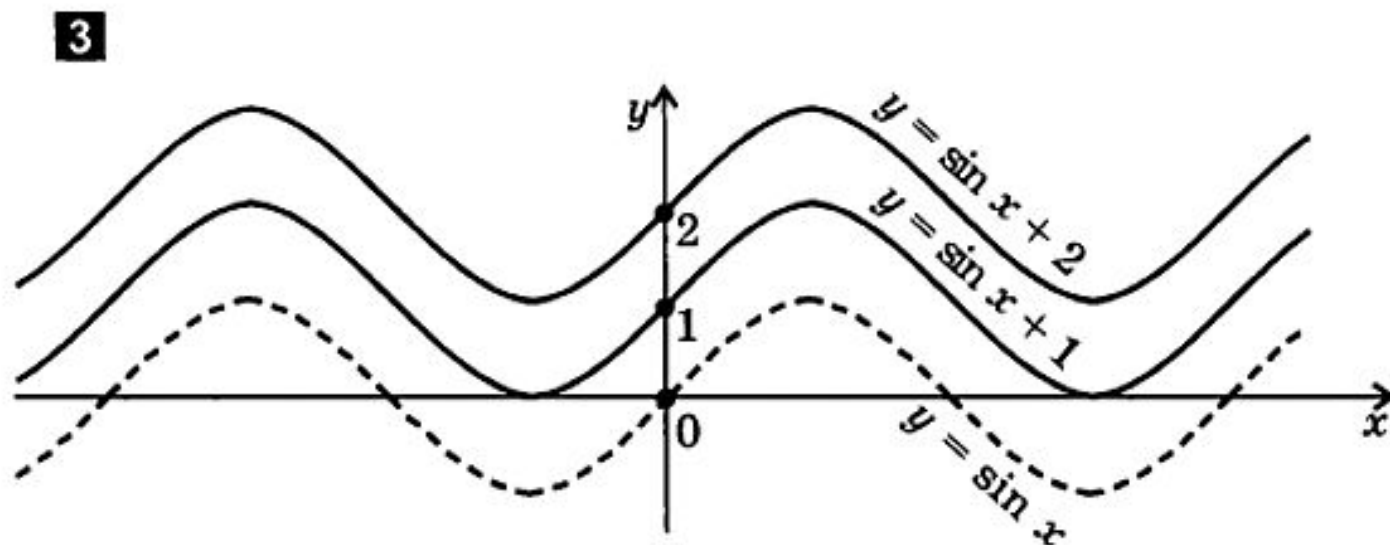
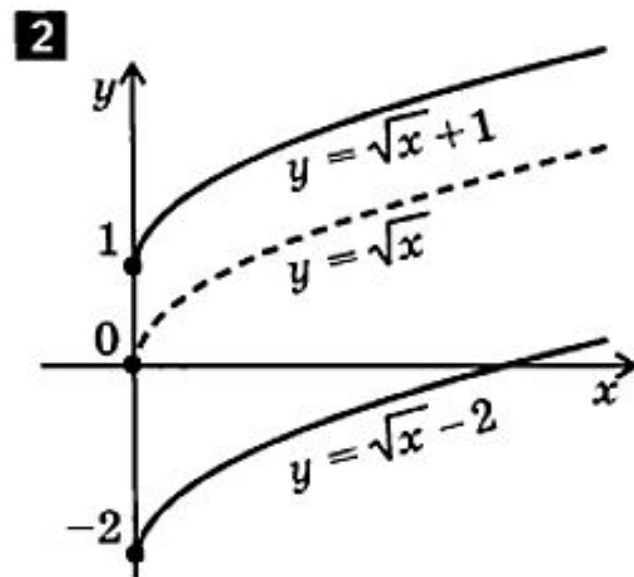
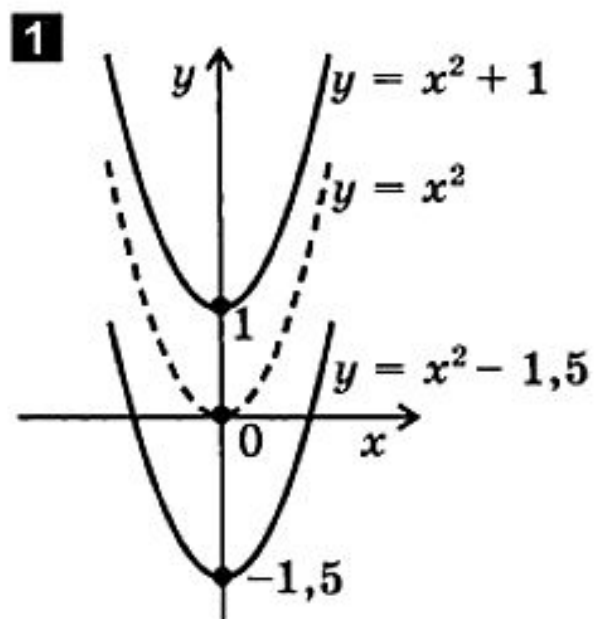


График функции $y = f(x) + b$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y на $|b|$ вверх при $b > 0$ и вниз при $b < 0$.

Примеры:



ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ x

$$f(x) \rightarrow f(x - a)$$

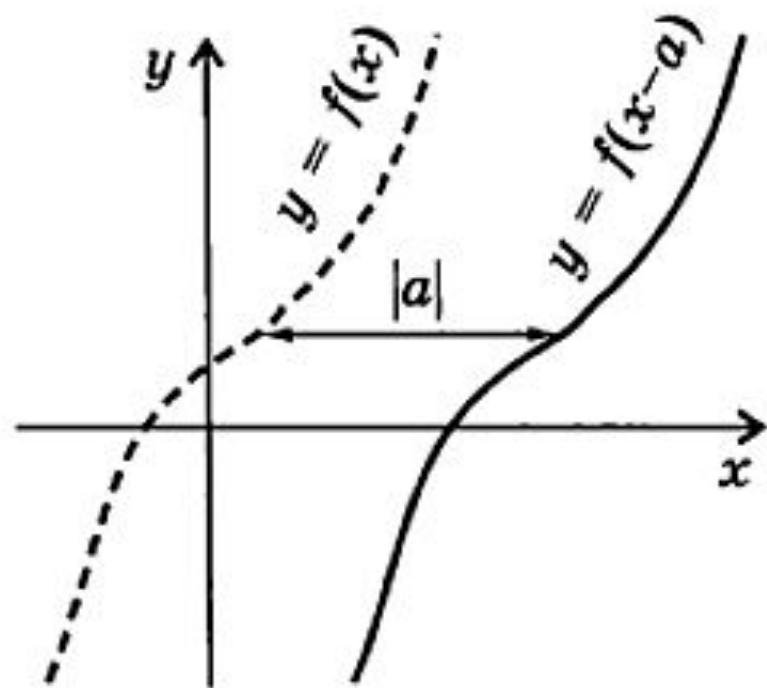
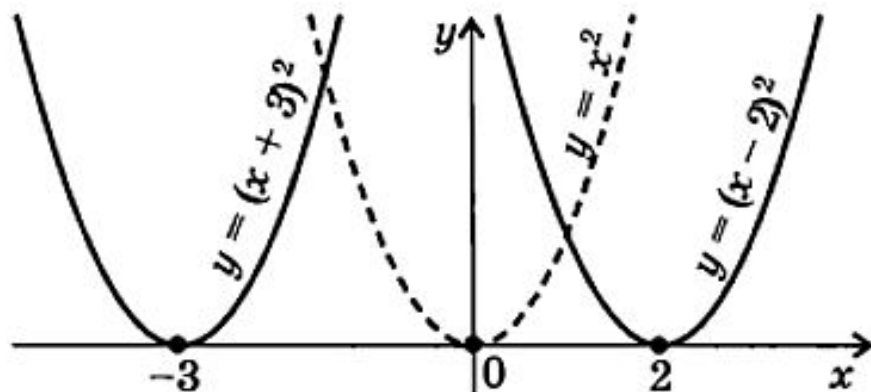


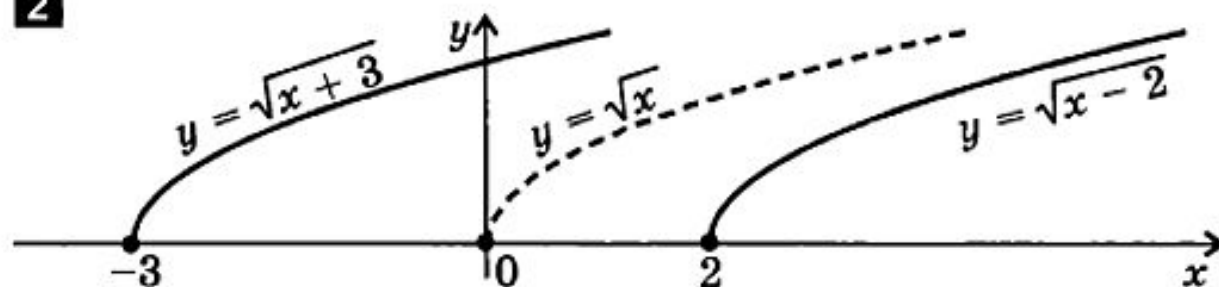
График функции $y = f(x - a)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x на $|a|$ вправо при $a > 0$ и влево при $a < 0$.

Примеры:

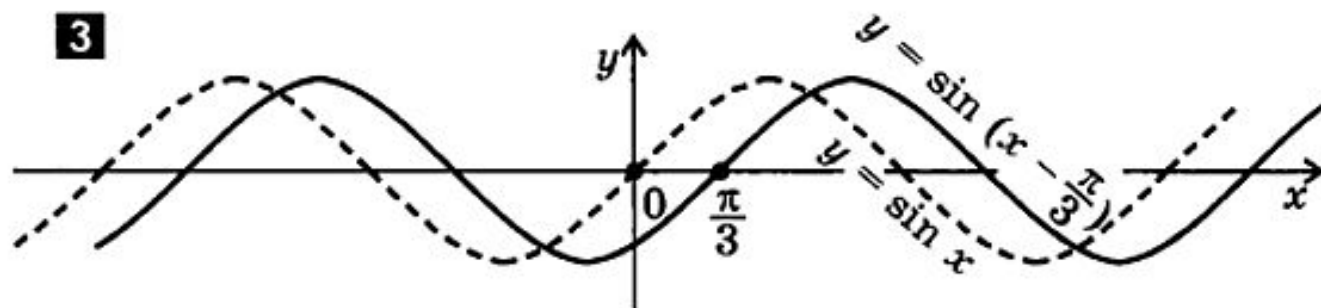
1



2



3



Замечание. График периодической функции (см. стр. 12) с периодом T не изменяется при параллельных переносах вдоль оси x на nT , $n \in \mathbb{Z}$.

СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ x

$$f(x) \rightarrow f(\alpha x), \text{ где } \alpha > 0$$

$$\alpha > 1$$

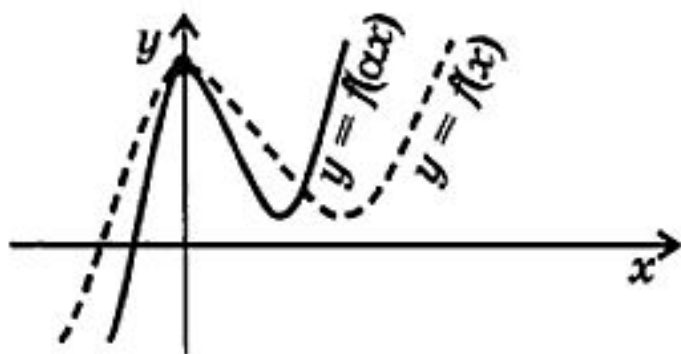


График функции $y = f(\alpha x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x в α раз.

$$0 < \alpha < 1$$

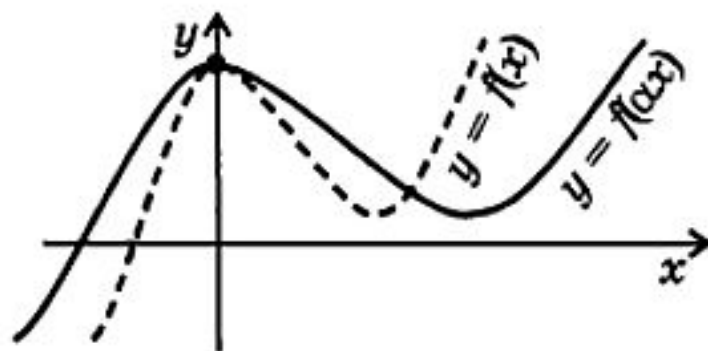
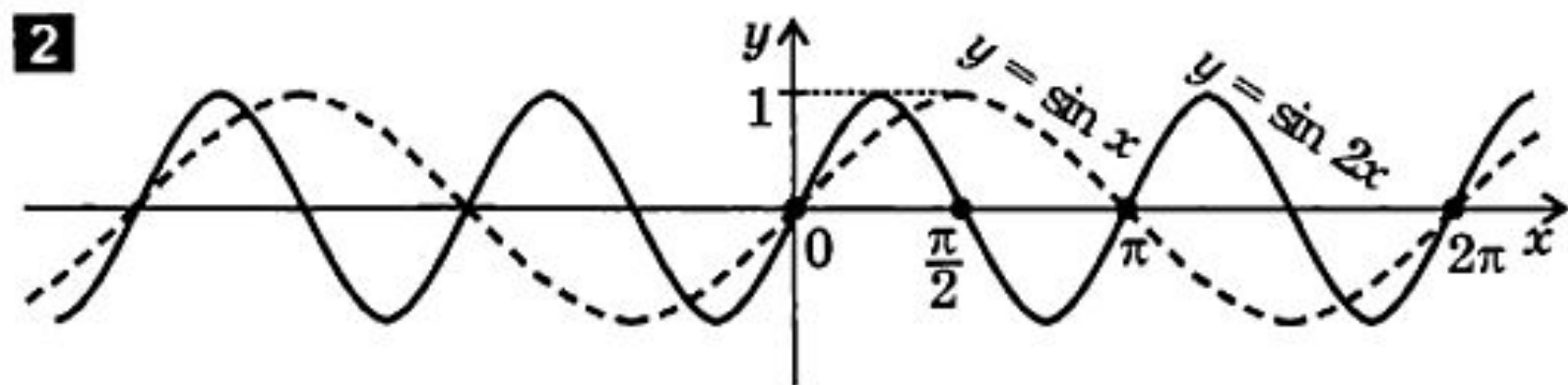
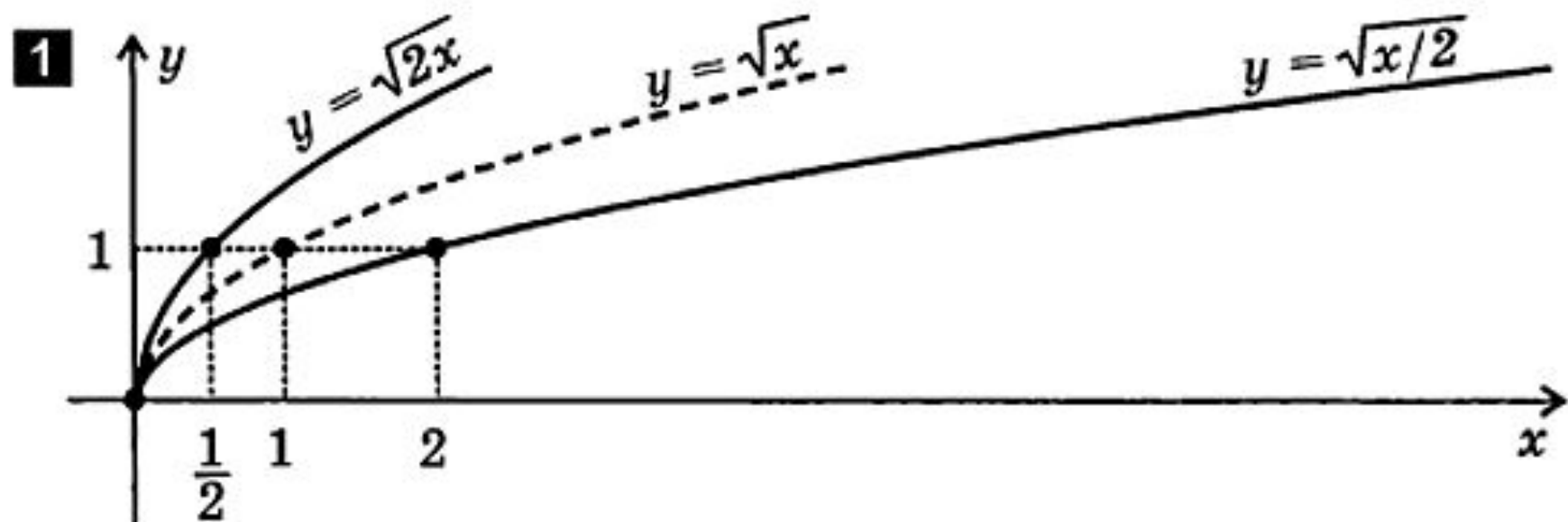


График функции $y = f(\alpha x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси x в $1/\alpha$ раз.

Замечание. Точки пересечения графика с осью y остаются неизменными.

Примеры:



СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ y

$$f(x) \rightarrow kf(x), \text{ где } k > 0$$

$$k > 1$$

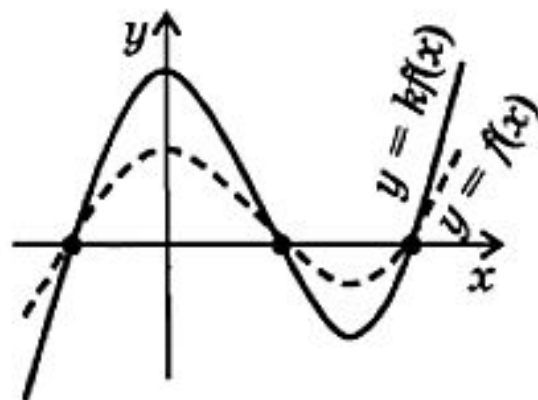


График функции $y = kf(x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y в k раз.

$$0 < k < 1$$

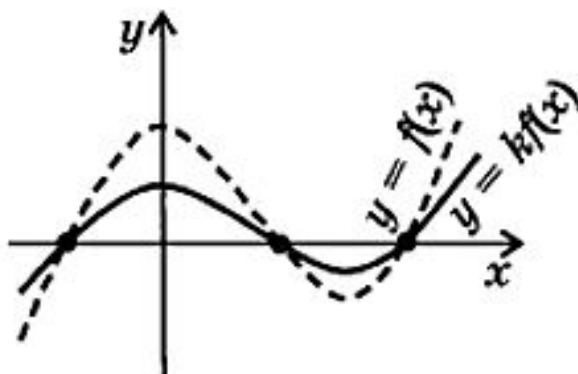
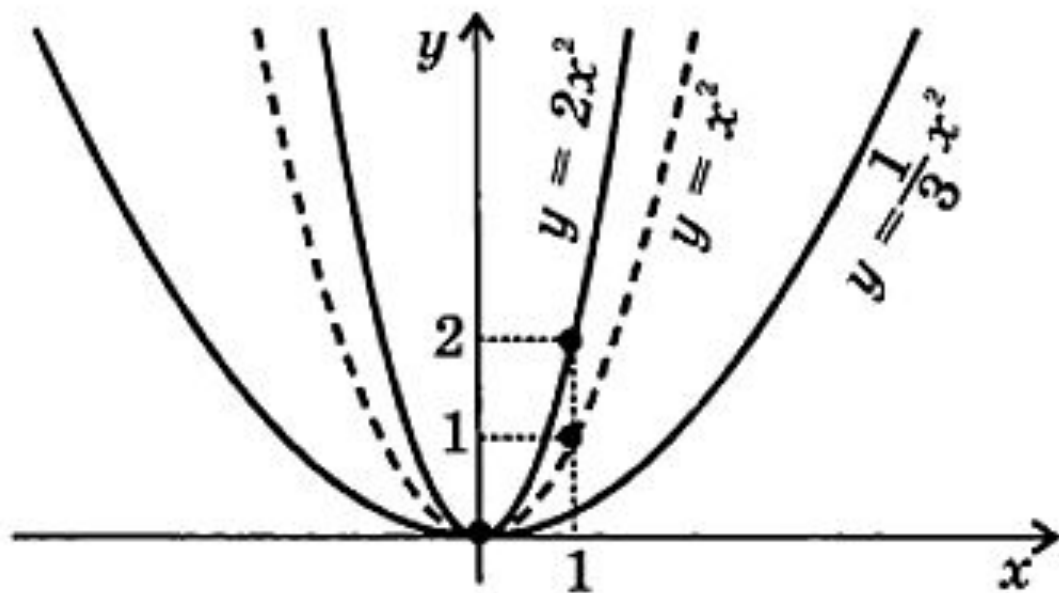


График функции $y = kf(x)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ вдоль оси y в $1/k$ раз.

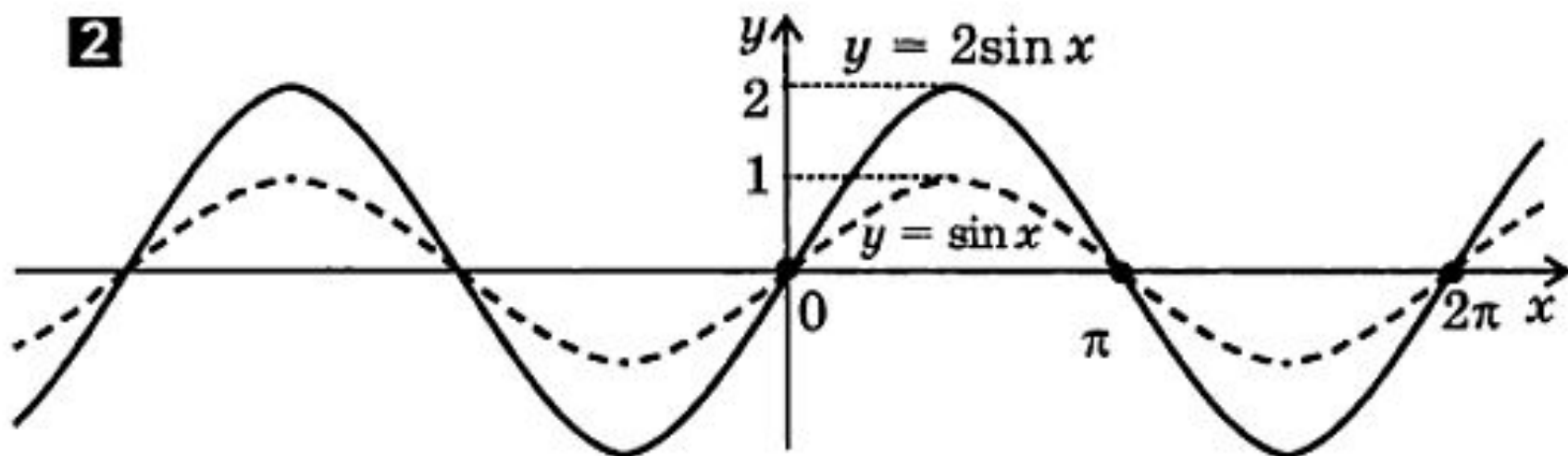
Замечание. Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.

Примеры:

1



2



ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ y

$$f(x) \rightarrow f(-x)$$

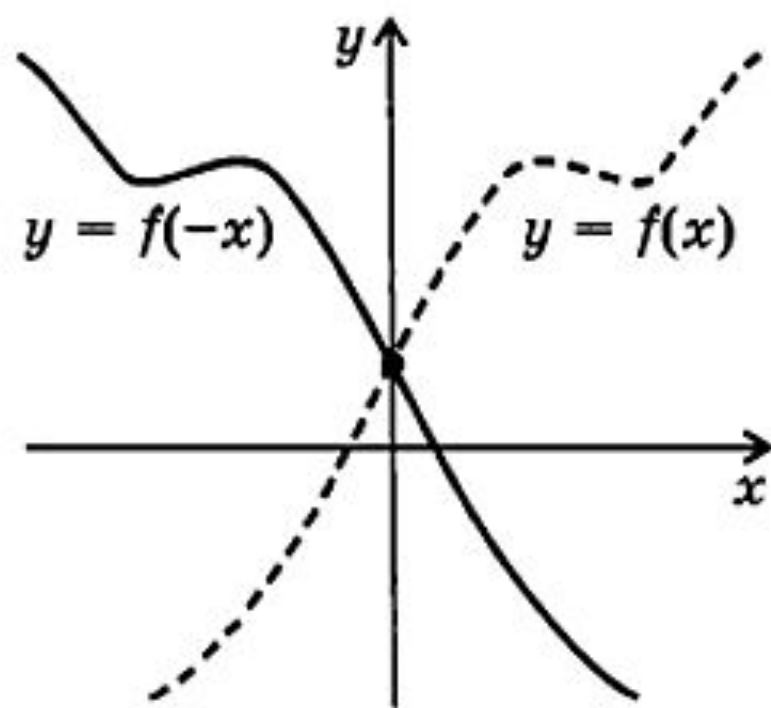
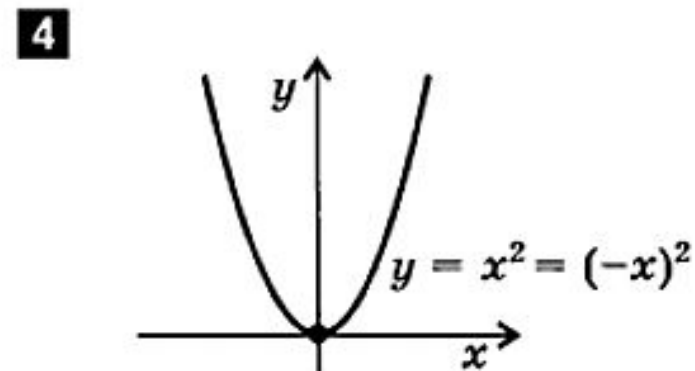
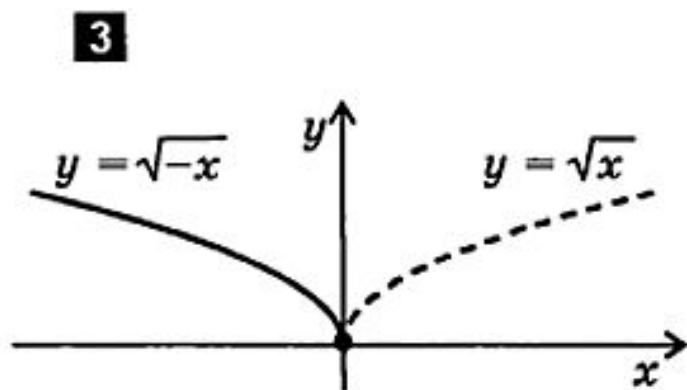
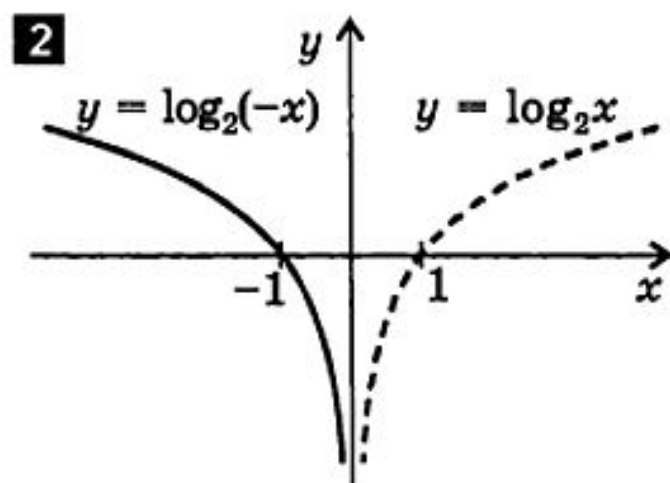
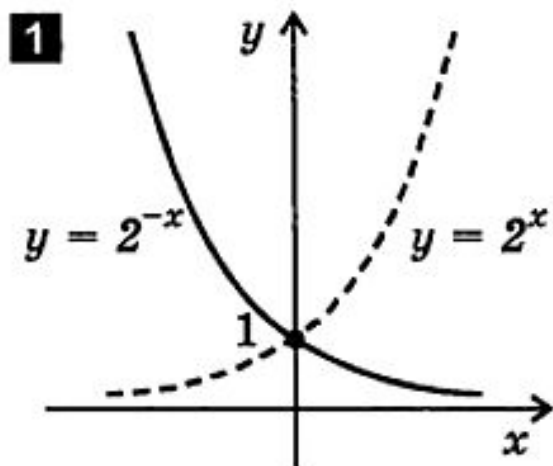


График функции $y = f(-x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси y .

Замечание. Точка пересечения графика с осью y остается неизменной.

Примеры:



Замечание 1. График четной функции (см. стр. 11) не изменяется при отражении относительно оси y , поскольку для четной функции $f(-x) = f(x)$. **Пример:** $(-x)^2 = x^2$.

Замечание 2. График нечетной функции (см. стр. 11) изменяется одинаково как при отражении относительно оси x , так и при отражении относительно оси y , поскольку для нечетной функции $f(-x) = -f(x)$. **Пример:** $\sin(-x) = -\sin x$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ x

$$f(x) \rightarrow -f(x)$$

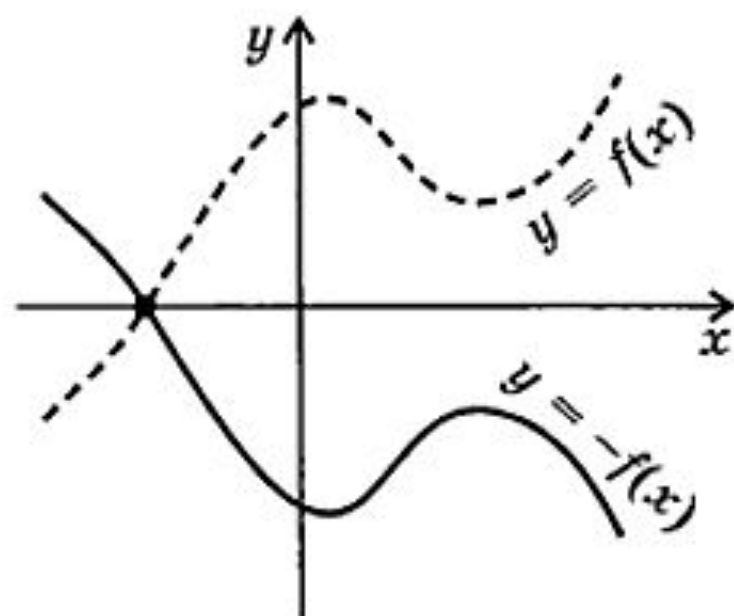
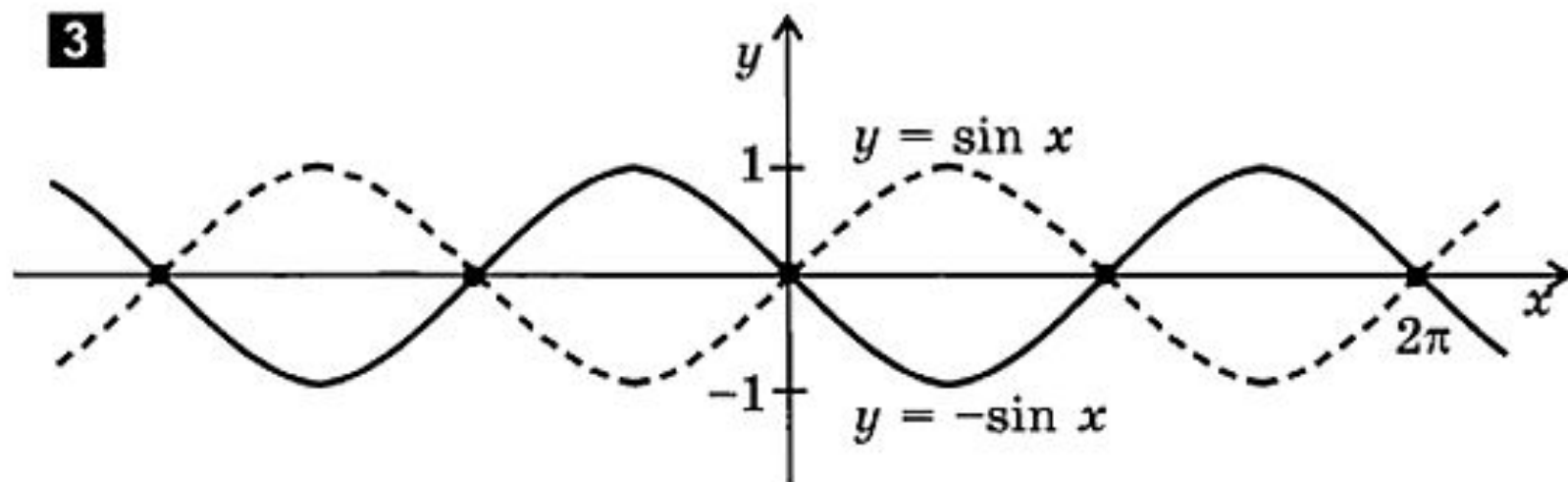
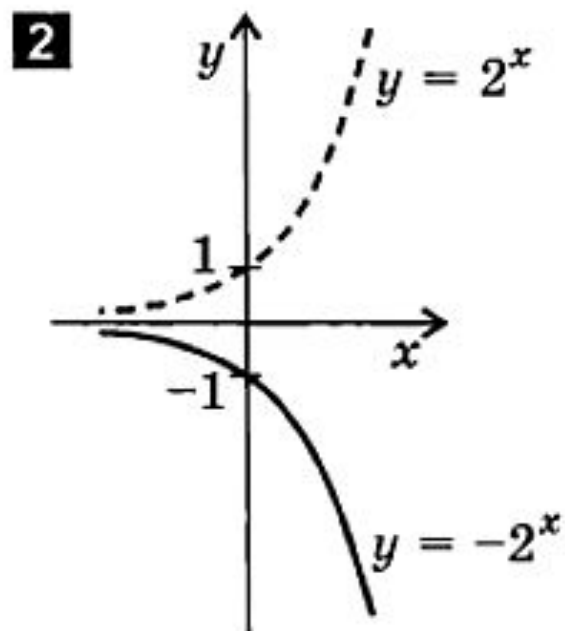
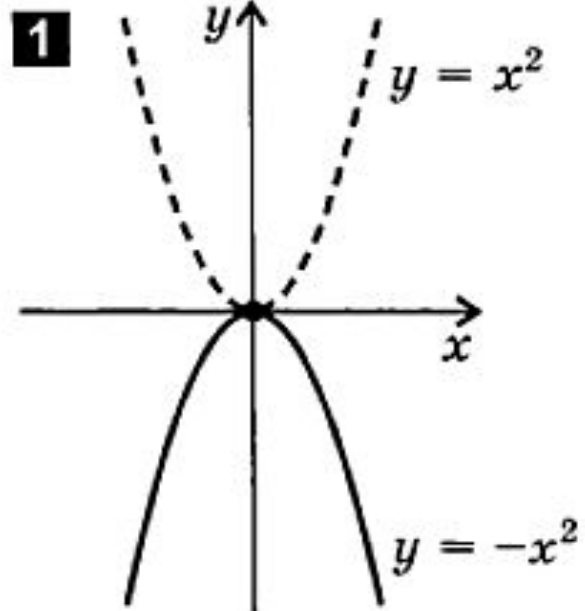


График функции $y = -f(x)$ получается преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно оси x .

Замечание. Точки пересечения графика с осью x остаются неизменными.

Примеры:

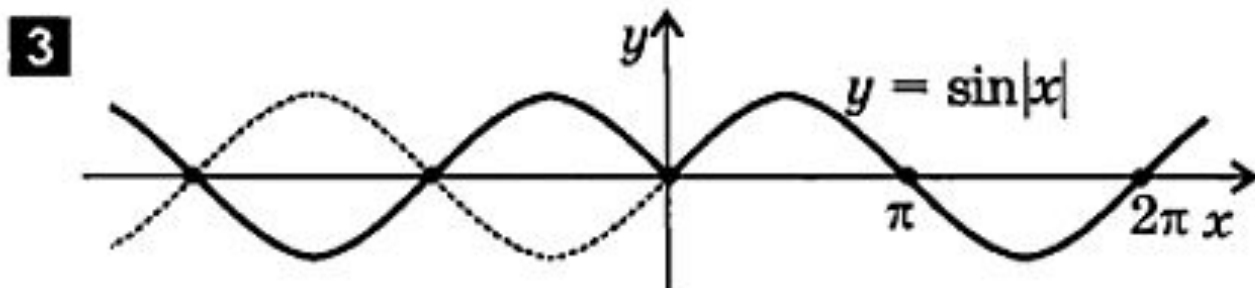
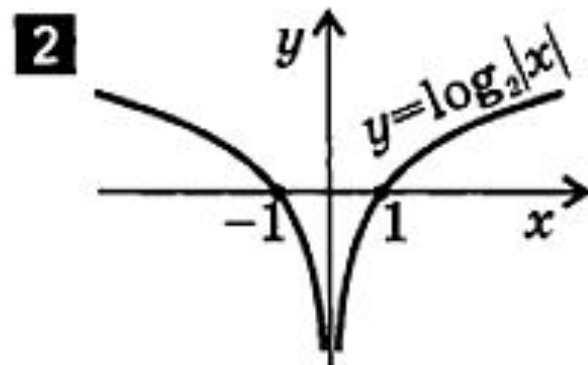
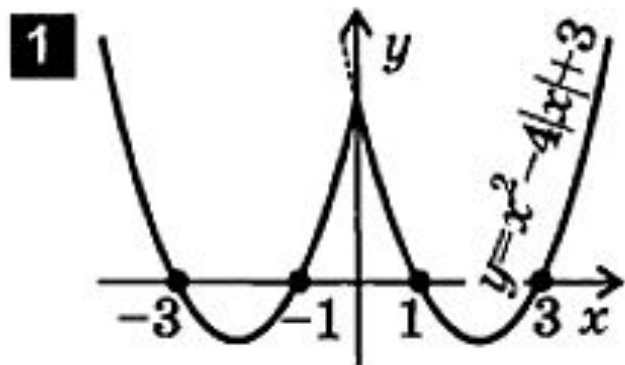


ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(|x|)$

Часть графика функции $y = f(x)$, лежащая левее оси y , удаляется, а часть, лежащая правее оси y — остается без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси y (влево). Точка графика, лежащая на оси y , остается неизменной.

Замечание. Функция $y = f(|x|)$ четная (ее график симметричен относительно оси y).

Примеры:



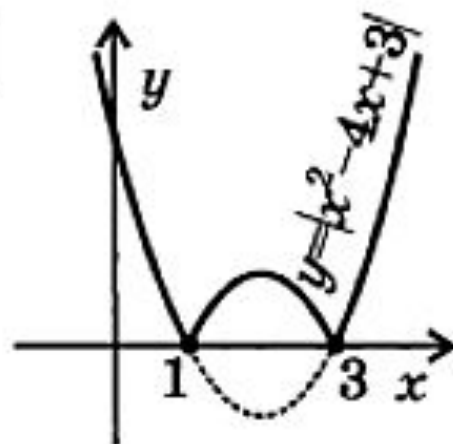
ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = |f(x)|$

Части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси x и на оси x , остаются без изменения, а лежащие ниже оси x — симметрично отражаются относительно этой оси (вверх).

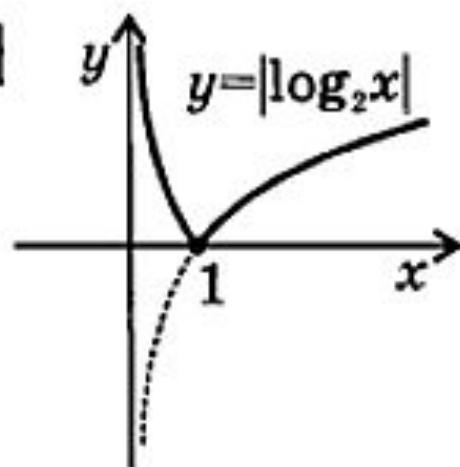
Замечание. Функция $y = |f(x)|$ неотрицательна (ее график расположен в верхней полуплоскости).

Примеры:

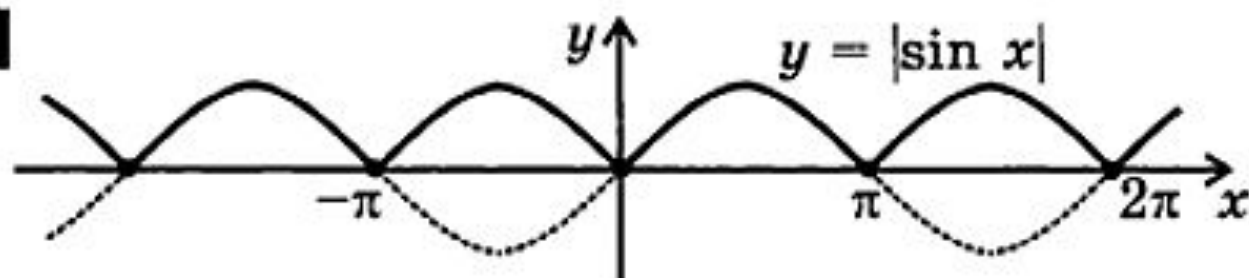
1



2



3



ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

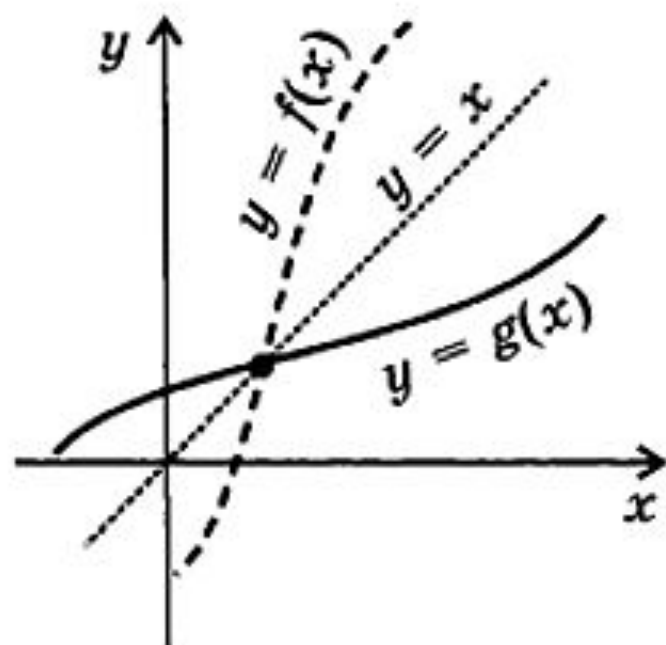
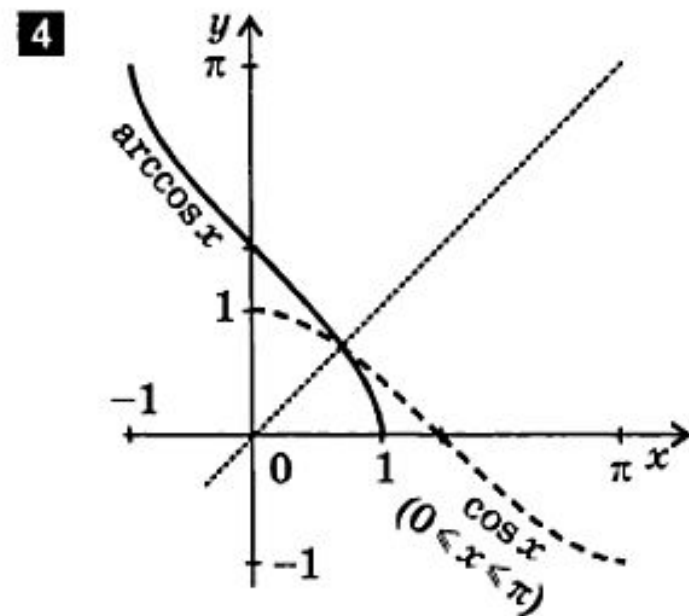
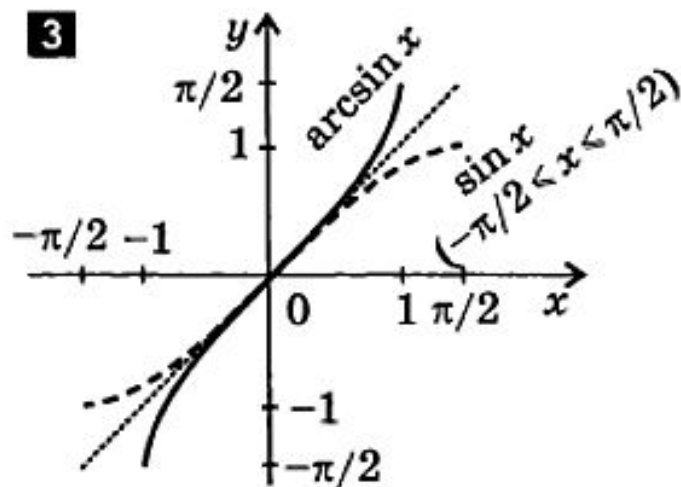
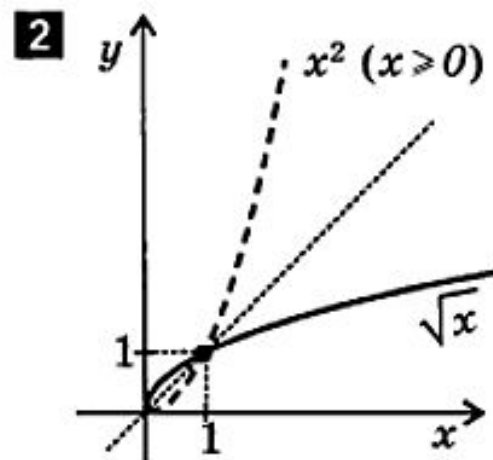
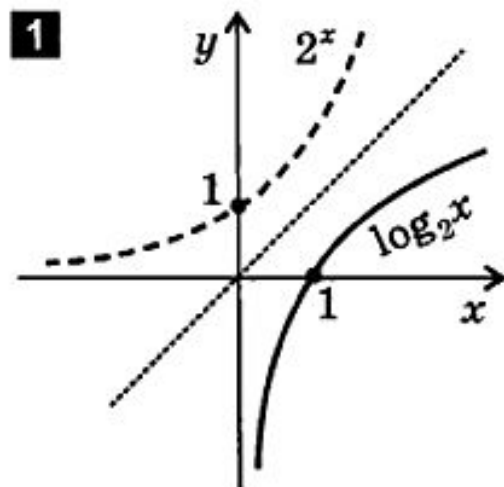


График функции $y = g(x)$, обратной для функции $y = f(x)$, можно получить преобразованием симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$.

Замечание. Описанное построение можно производить только для функции, имеющей обратную (см. стр. 15).

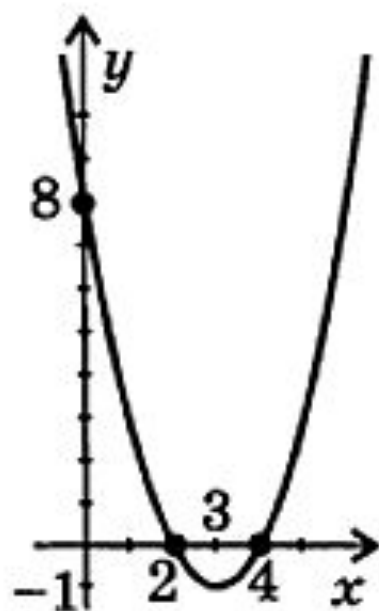
Примеры графиков взаимно обратных функций.



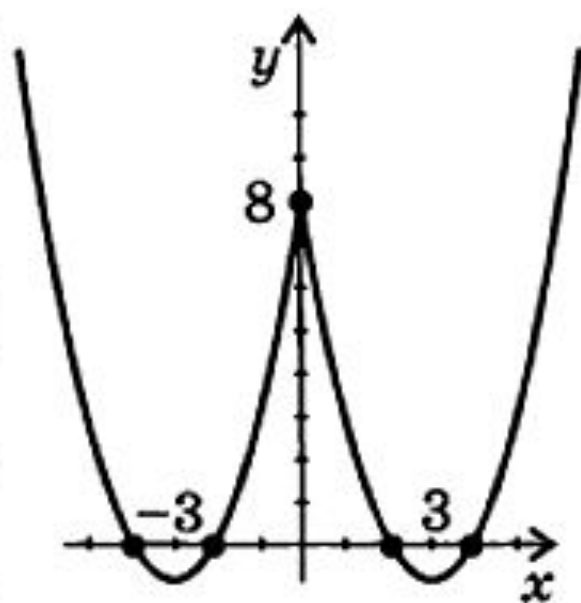
**ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ
с помощью последовательных преобразований графиков
элементарных функций (на примерах)**

$$y = |x^2 - 6|x| + 8| = ||x^2 - 6|x| + 8| = |(|x| - 3)^2 - 1|$$

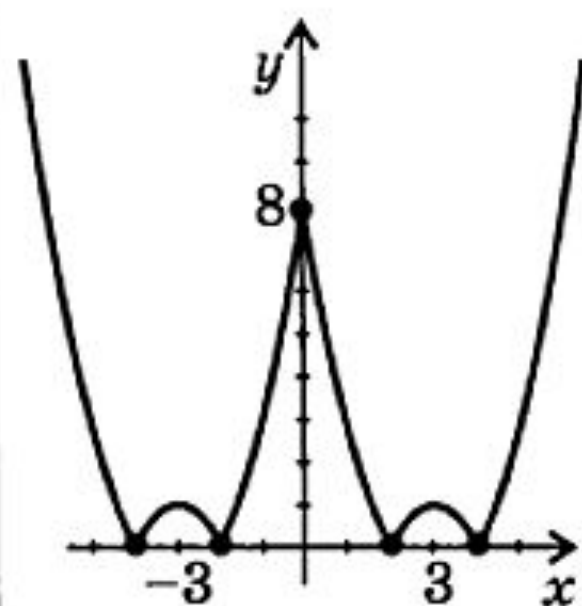
$$y = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1$$



$$y = (|x| - 3)^2 - 1$$

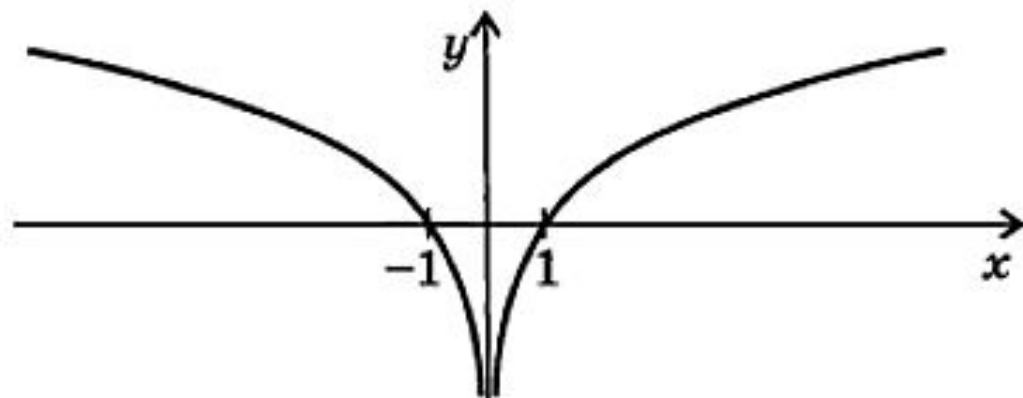


$$y = |(|x| - 3)^2 - 1|$$

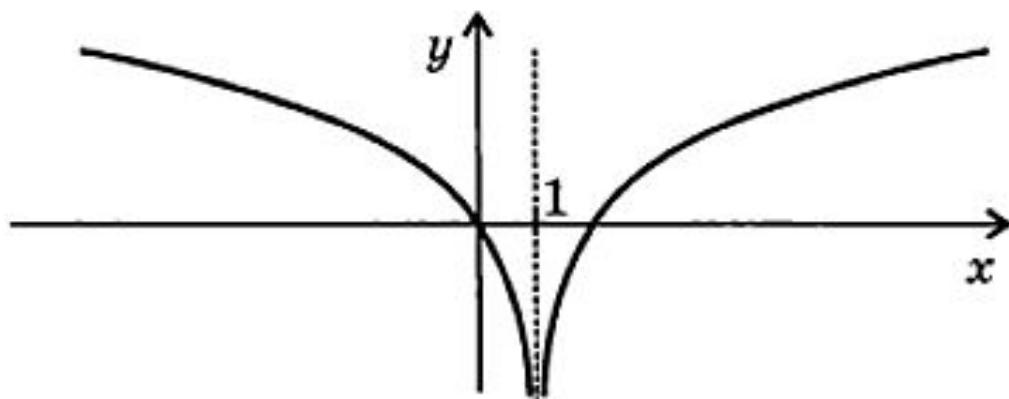


$$y = |\log_2(|x - 1|)|$$

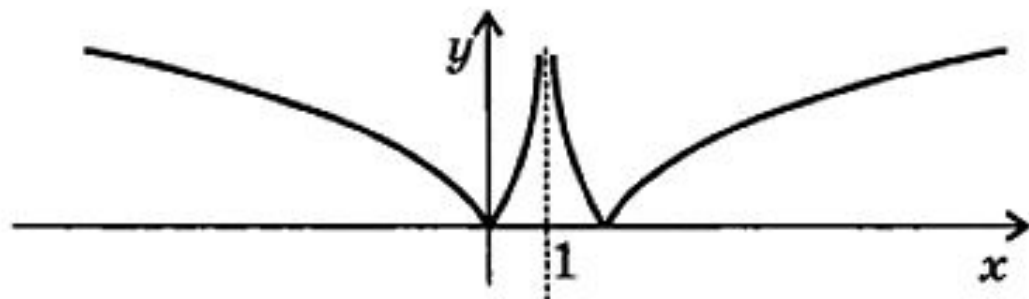
$$y = \log_2|x|$$



$$y = \log_2(|x - 1|)$$

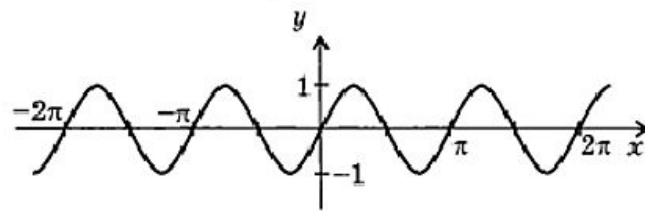


$$y = |\log_2(|x - 1|)|$$

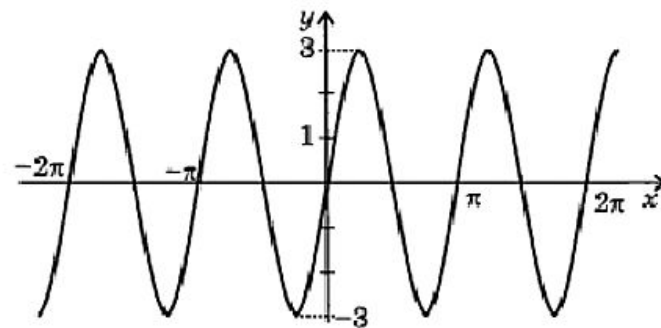


$$y = |3\sin 2x| - 1$$

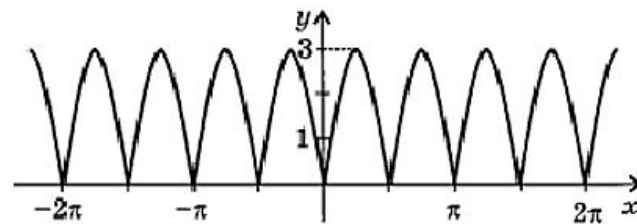
$$y = \sin 2x$$



$$y = 3\sin 2x$$



$$y = |3\sin 2x|$$



$$y = |3\sin 2x| - 1$$

