

# «Преобразование графиков функций» памятка для учащихся

Зная график функции  $y = f(x)$ , можно построить график функции  $y = f(x)+b$ ,  $y = f(x-a)$ ,  $y = f(ax)$ ,  $y = kf(x)$ ,  $y = -f(x)$ ,  $y = f(-x)$ ,  $y = f(|x|)$ ,  $y = |f(x)|$  и графика обратной функции

Рисунки взяты с сайта:

<https://matematikalegko.ru/shkolniku/matematika-v-tablicax/algebra/funkcii/preobrazovanie-grafikov-funkcij>

## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ $y$

$$f(x) \rightarrow f(x) + b$$

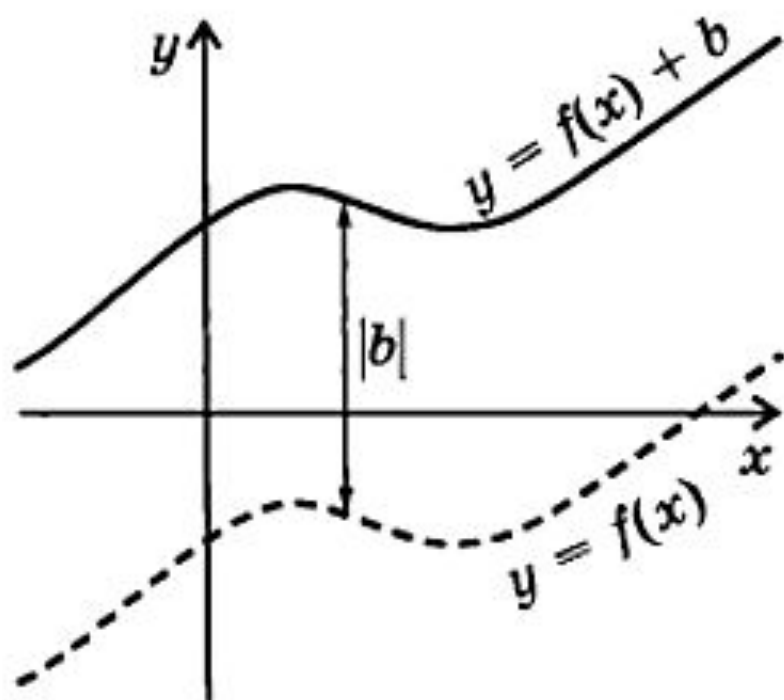
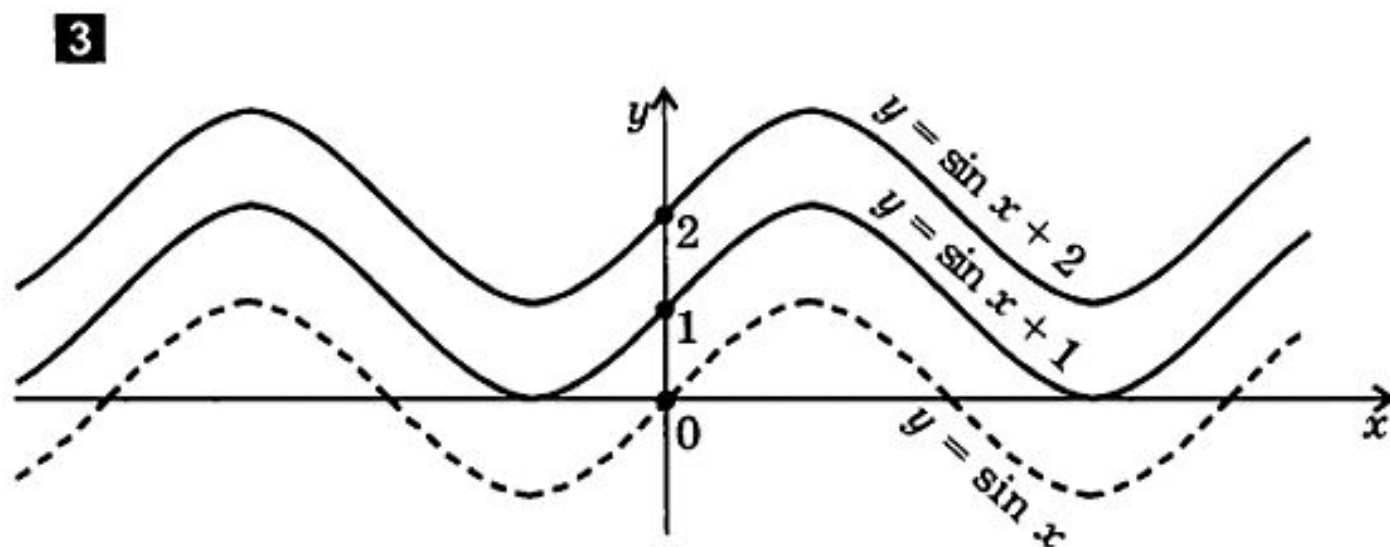
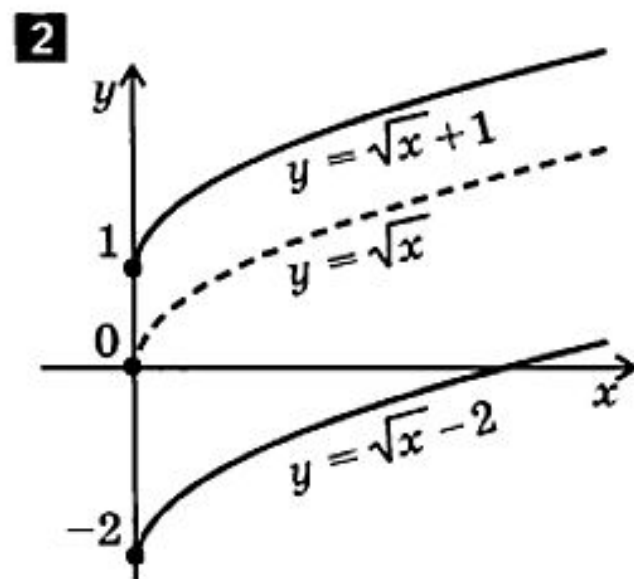
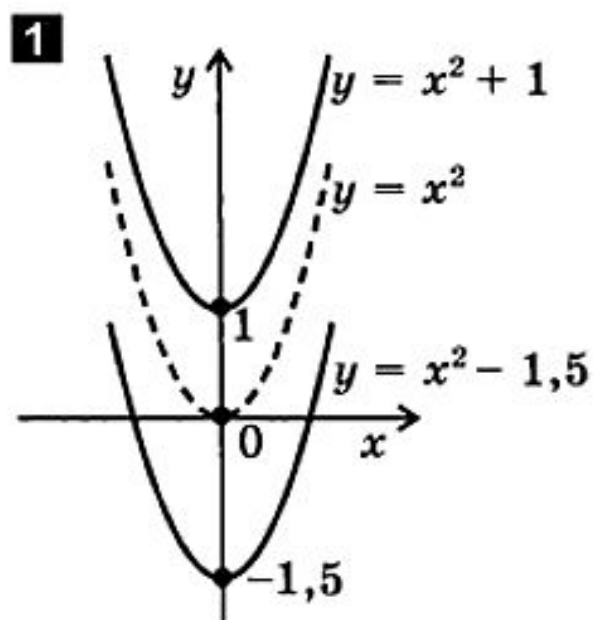


График функции  $y = f(x) + b$  получается параллельным переносом графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $y$  на  $|b|$  вверх при  $b > 0$  и вниз при  $b < 0$ .

Примеры:



## ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ВДОЛЬ ОСИ $x$

$$f(x) \rightarrow f(x - a)$$

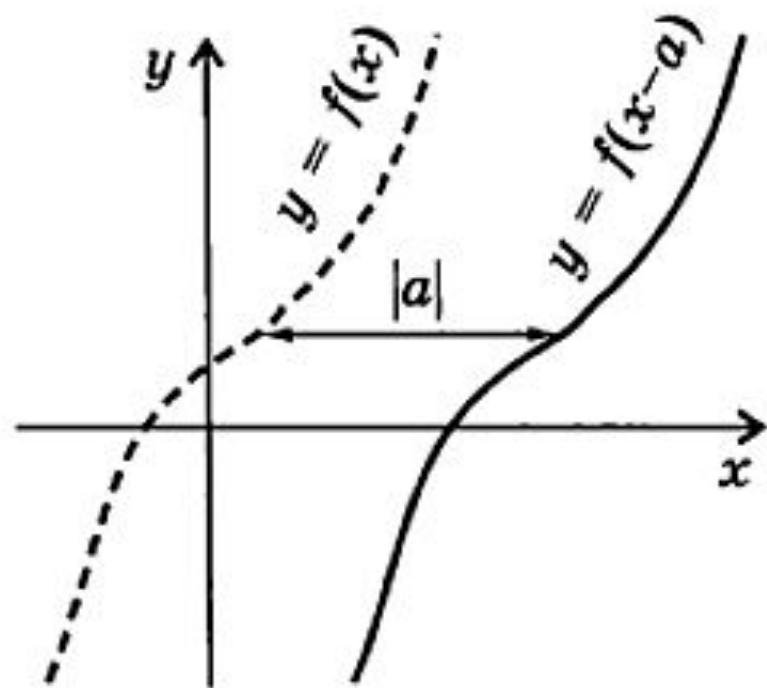
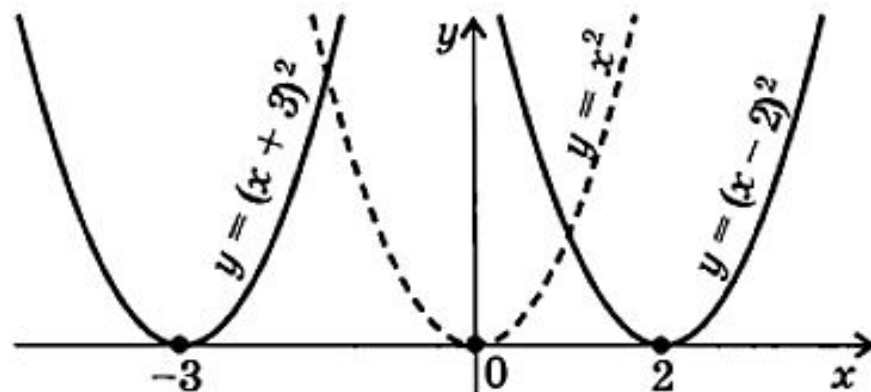


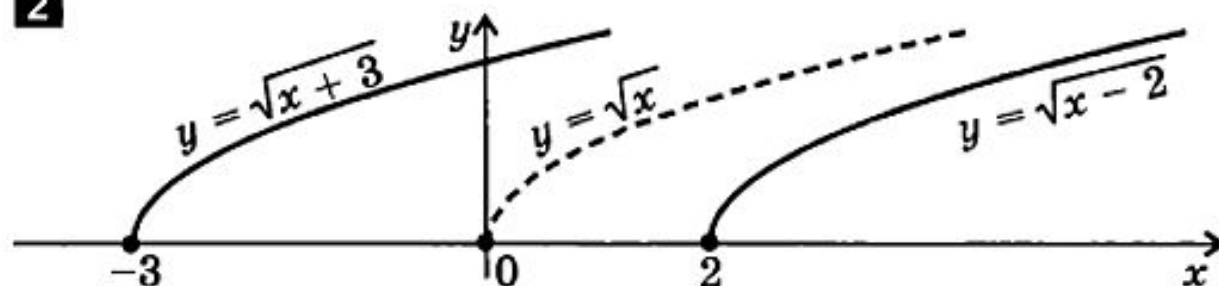
График функции  $y = f(x - a)$  получается параллельным переносом графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $x$  на  $|a|$  вправо при  $a > 0$  и влево при  $a < 0$ .

Примеры:

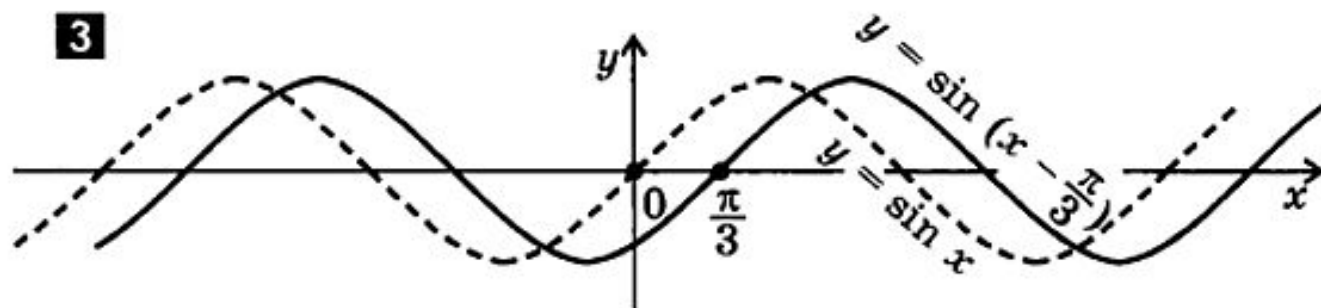
1



2



3



*Замечание.* График периодической функции (см. стр. 12) с периодом  $T$  не изменяется при параллельных переносах вдоль оси  $x$  на  $nT$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ $x$

$$f(x) \rightarrow f(\alpha x), \text{ где } \alpha > 0$$

$$\alpha > 1$$

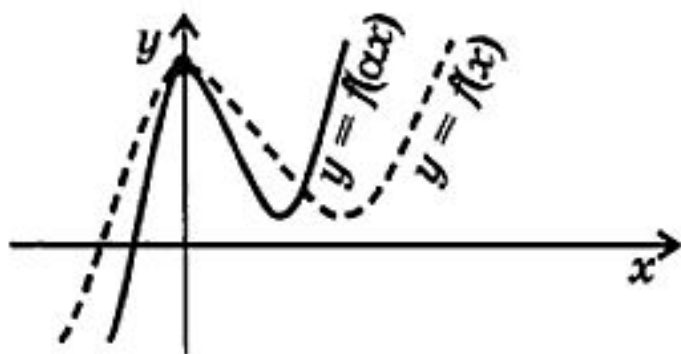


График функции  $y = f(\alpha x)$  получается сжатием графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $x$  в  $\alpha$  раз.

$$0 < \alpha < 1$$

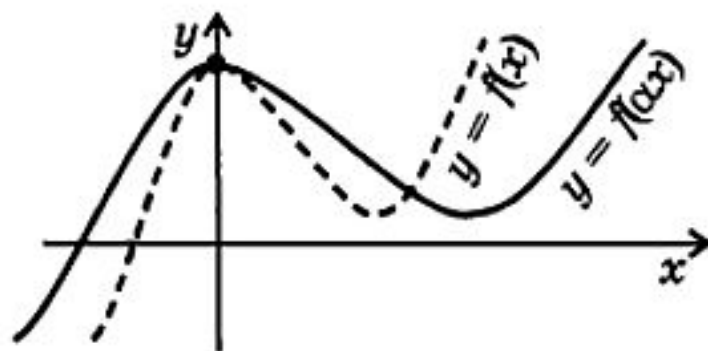
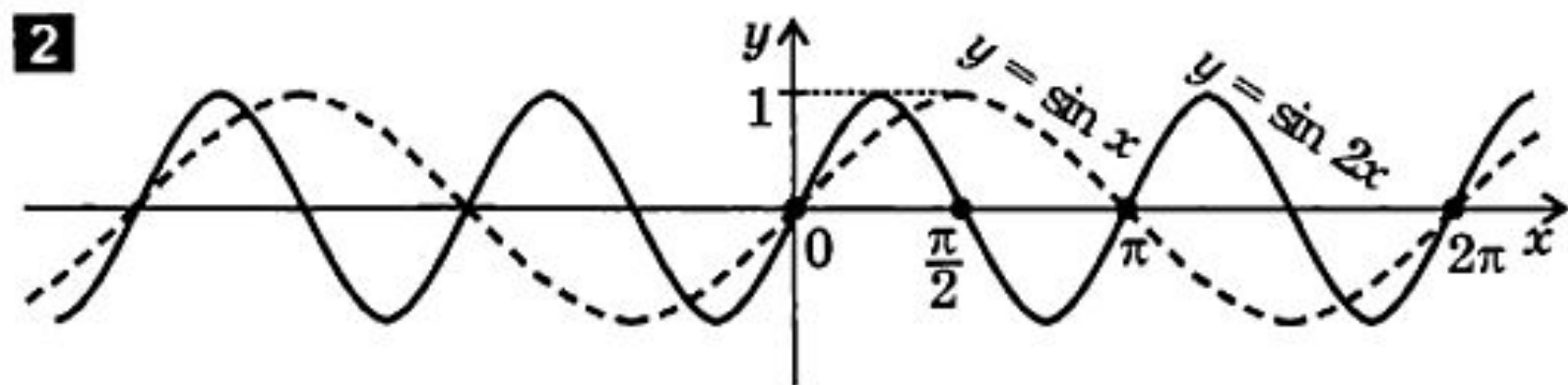
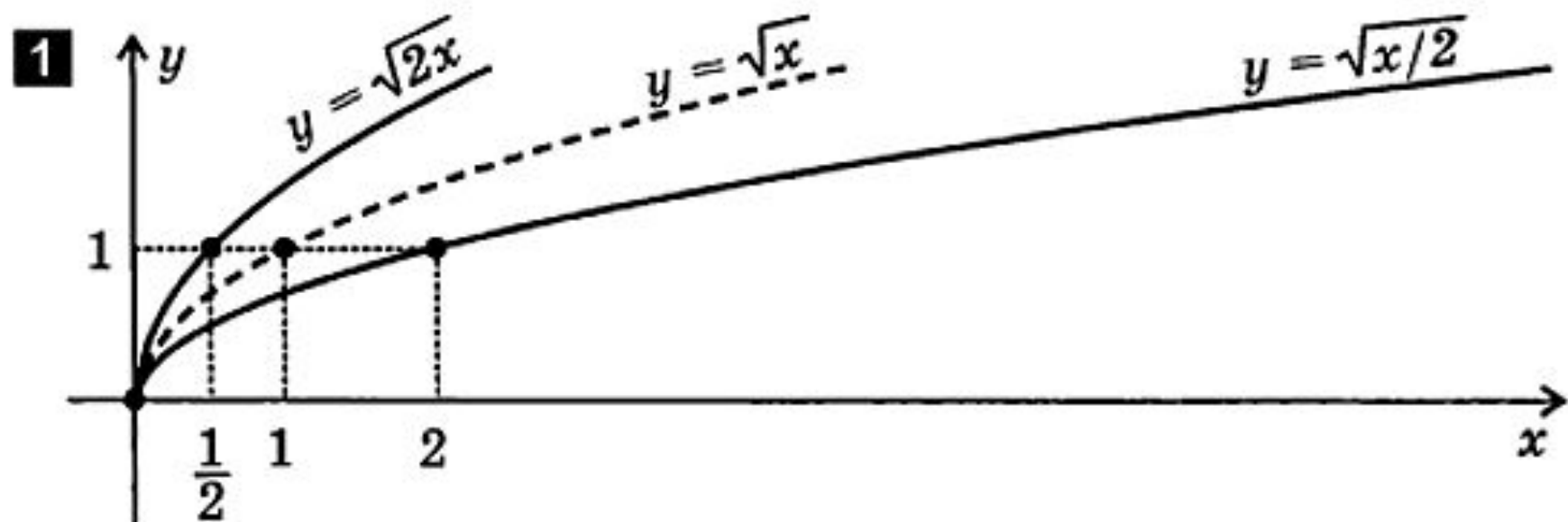


График функции  $y = f(\alpha x)$  получается растяжением графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $x$  в  $1/\alpha$  раз.

**Замечание.** Точки пересечения графика с осью  $y$  остаются неизменными.

Примеры:



## СЖАТИЕ И РАСТЯЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОСИ $y$

$$f(x) \rightarrow kf(x), \text{ где } k > 0$$

$$k > 1$$

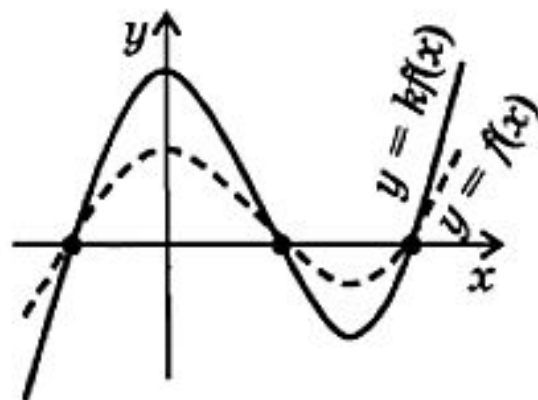


График функции  $y = kf(x)$  получается растяжением графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $y$  в  $k$  раз.

$$0 < k < 1$$

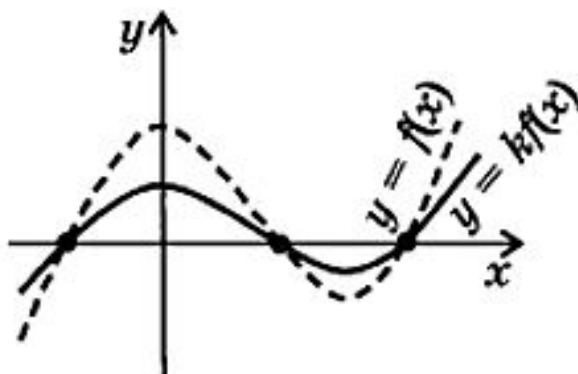


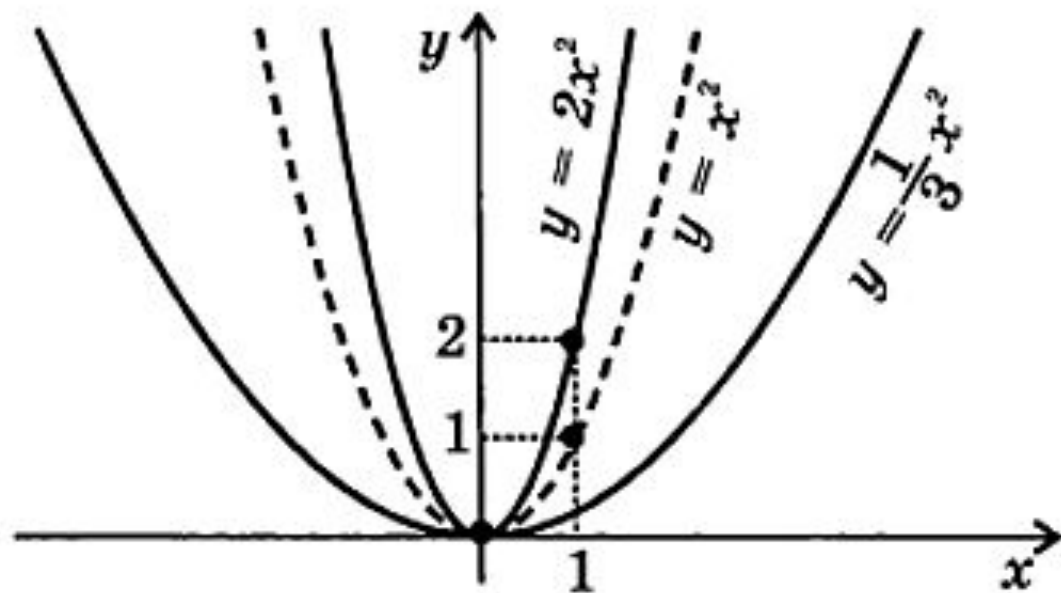
График функции  $y = kf(x)$  получается сжатием графика функции  $y = f(x)$  вдоль оси  $y$  в  $1/k$  раз.

**Замечание.** Точки пересечения графика с осью  $x$  остаются неизменными.

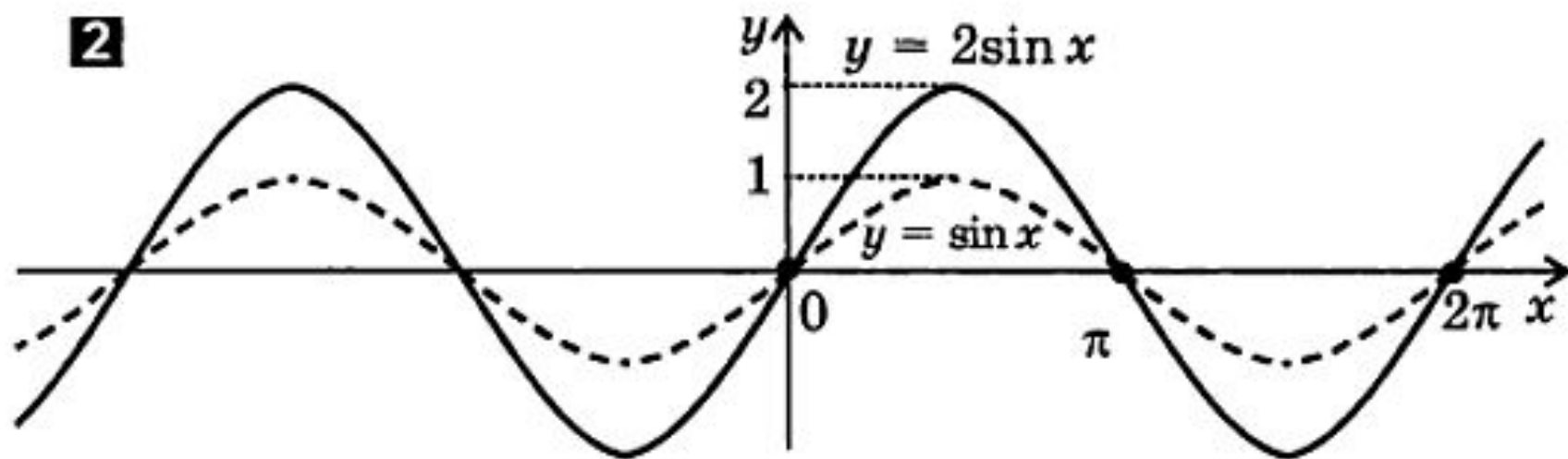


Примеры:

**1**



**2**



## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ $y$

$$f(x) \rightarrow f(-x)$$

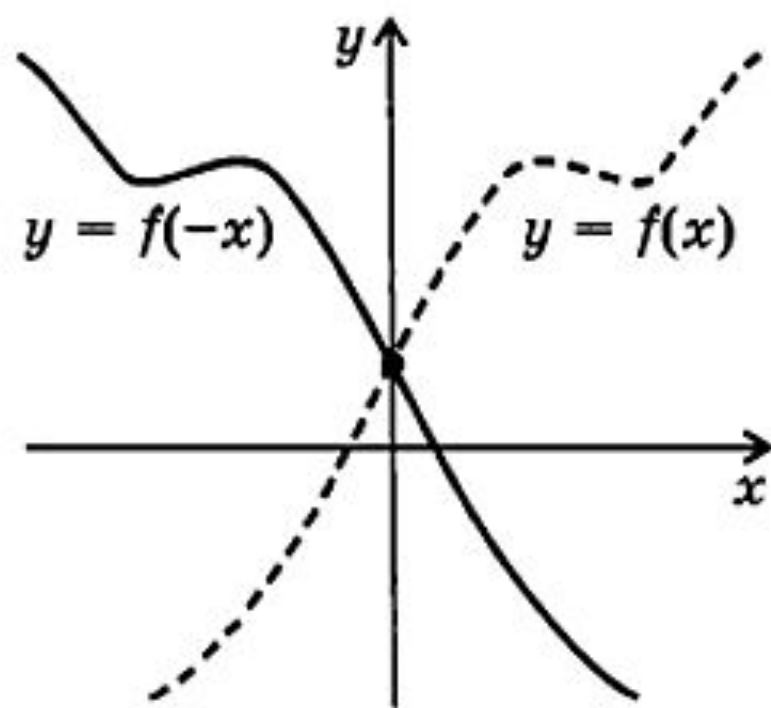
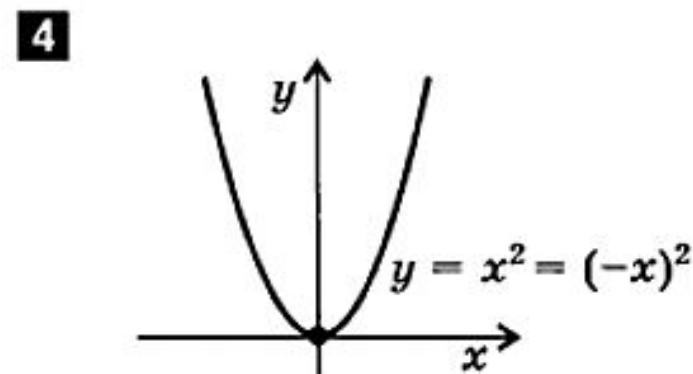
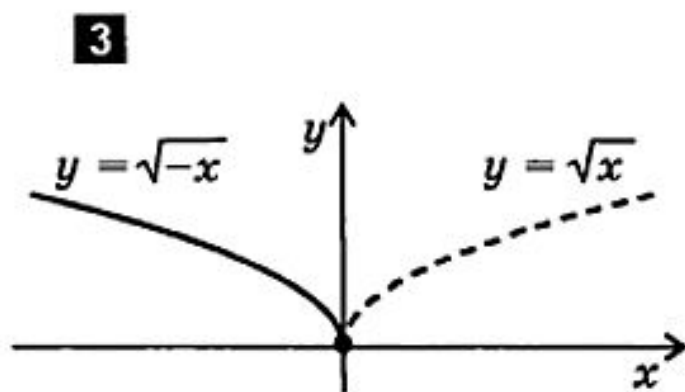
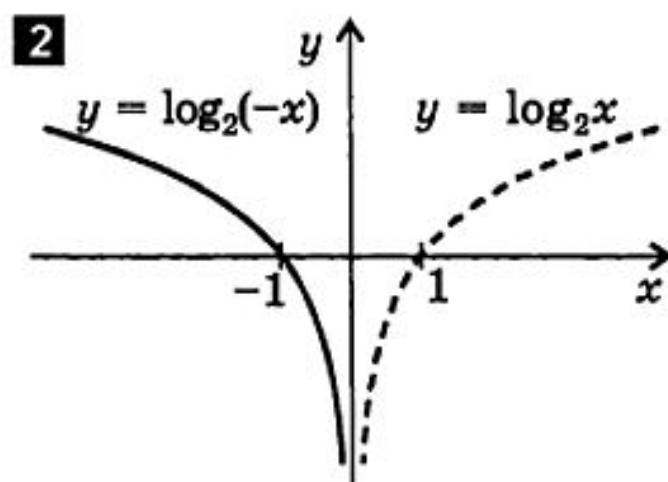
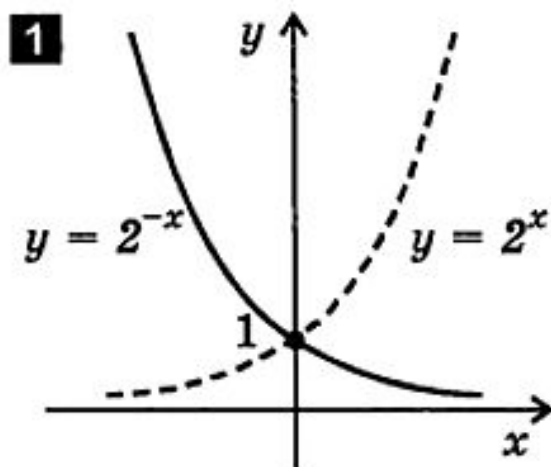


График функции  $y = f(-x)$  получается преобразованием симметрии графика функции  $y = f(x)$  относительно оси  $y$ .

*Замечание.* Точка пересечения графика с осью  $y$  остается неизменной.

Примеры:



**Замечание 1.** График четной функции (см. стр. 11) не изменяется при отражении относительно оси  $y$ , поскольку для четной функции  $f(-x) = f(x)$ . **Пример:**  $(-x)^2 = x^2$ .

**Замечание 2.** График нечетной функции (см. стр. 11) изменяется одинаково как при отражении относительно оси  $x$ , так и при отражении относительно оси  $y$ , поскольку для нечетной функции  $f(-x) = -f(x)$ . **Пример:**  $\sin(-x) = -\sin x$ .

## ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ $x$

$$f(x) \rightarrow -f(x)$$

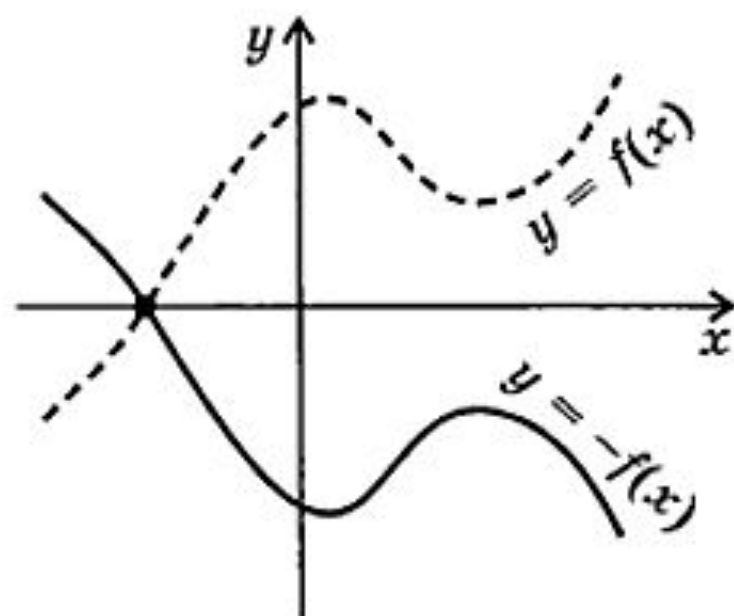
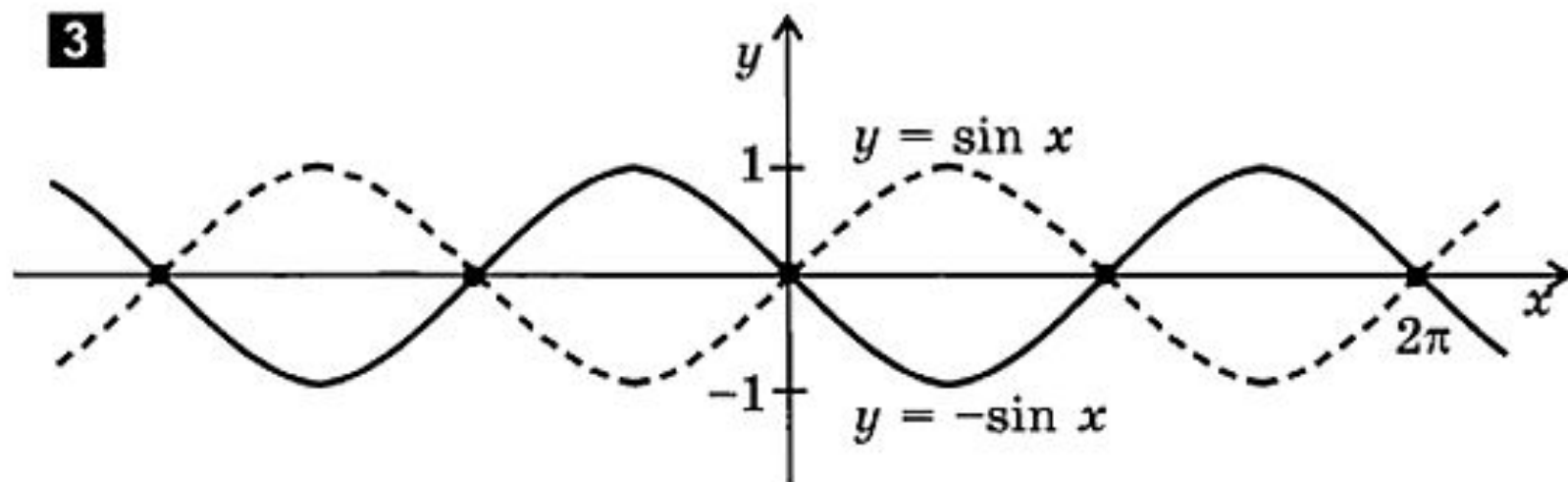
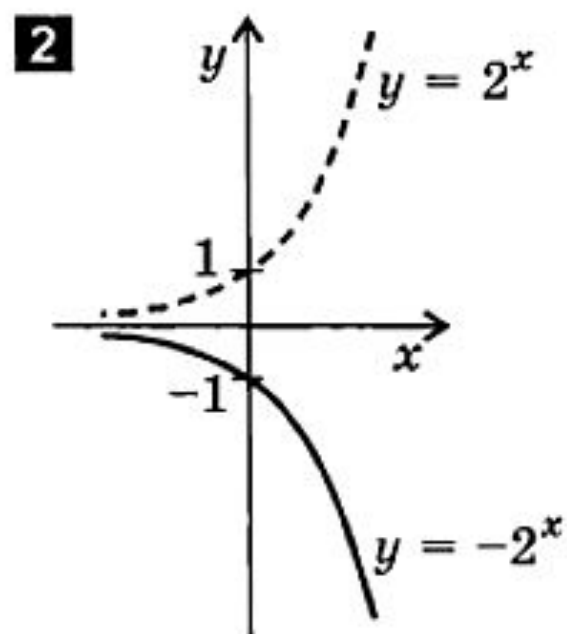
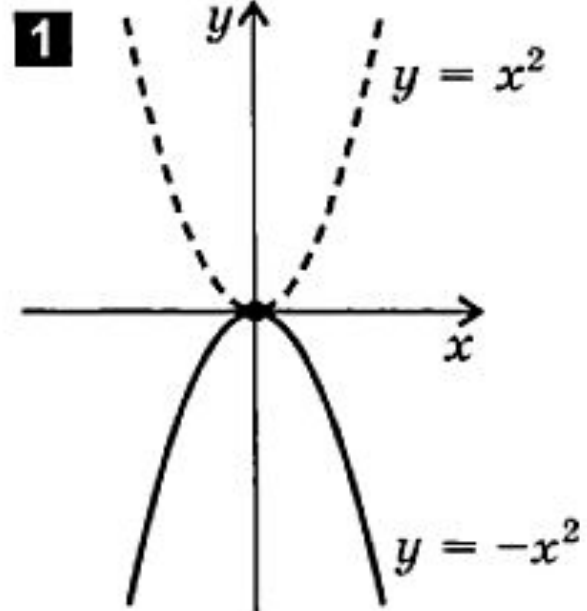


График функции  $y = -f(x)$  получается преобразованием симметрии графика функции  $y = f(x)$  относительно оси  $x$ .

*Замечание.* Точки пересечения графика с осью  $x$  остаются неизменными.

Примеры:

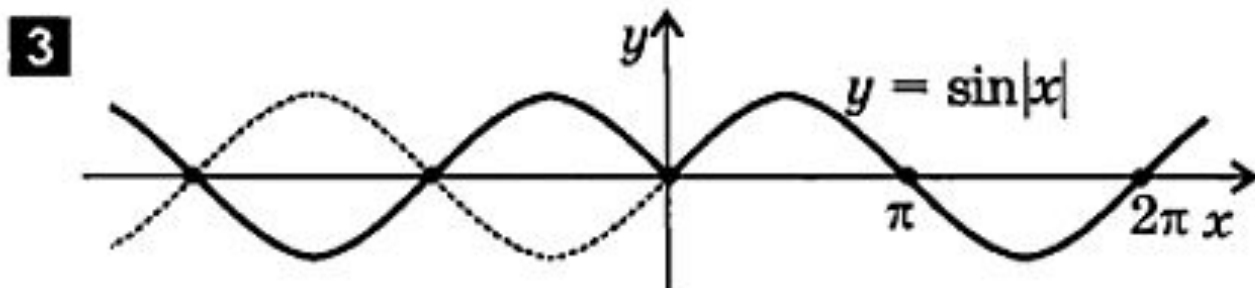
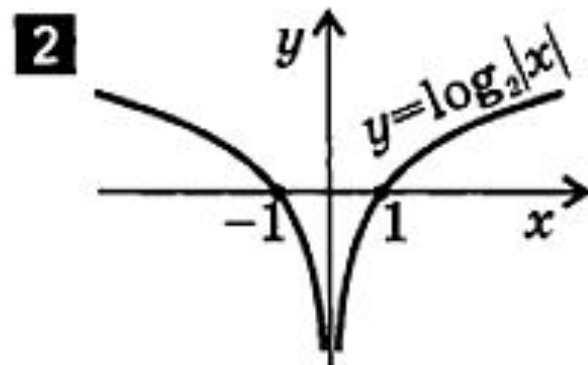
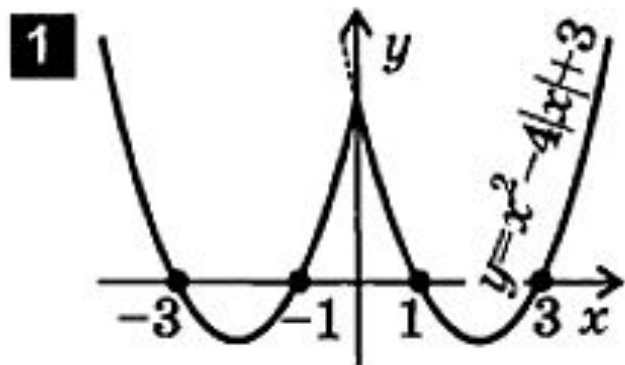


## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(|x|)$

Часть графика функции  $y = f(x)$ , лежащая левее оси  $y$ , удаляется, а часть, лежащая правее оси  $y$  — остается без изменения и, кроме того, симметрично отражается относительно оси  $y$  (влево). Точка графика, лежащая на оси  $y$ , остается неизменной.

*Замечание.* Функция  $y = f(|x|)$  четная (ее график симметричен относительно оси  $y$ ).

Примеры:



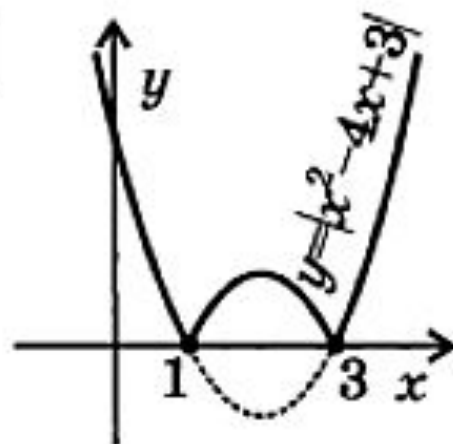
# ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = |f(x)|$

Части графика функции  $y = f(x)$ , лежащие выше оси  $x$  и на оси  $x$ , остаются без изменения, а лежащие ниже оси  $x$  — симметрично отражаются относительно этой оси (вверх).

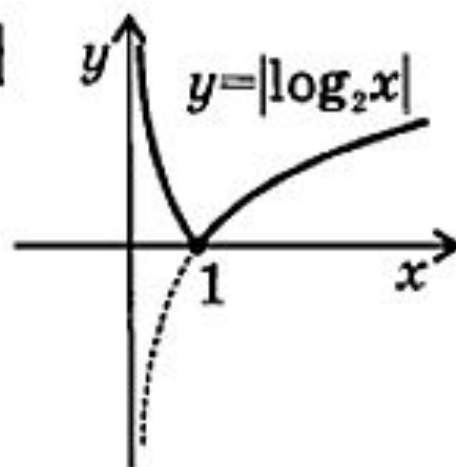
*Замечание.* Функция  $y = |f(x)|$  неотрицательна (ее график расположен в верхней полуплоскости).

Примеры:

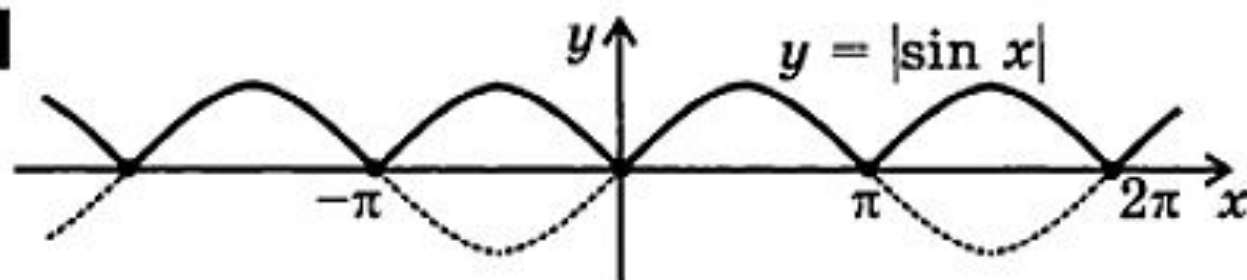
**1**



**2**



**3**



## ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

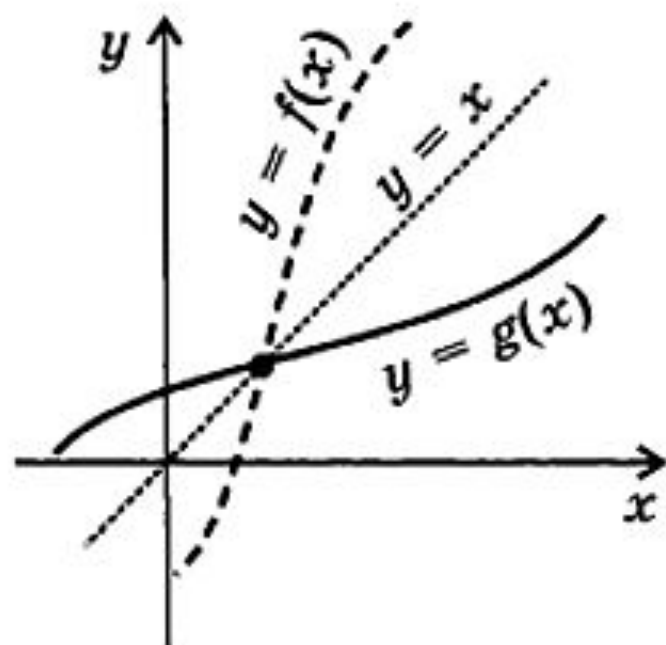
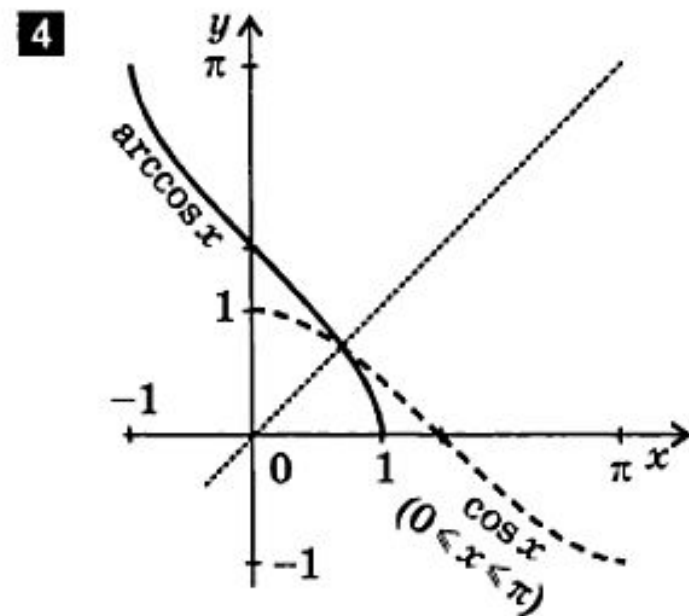
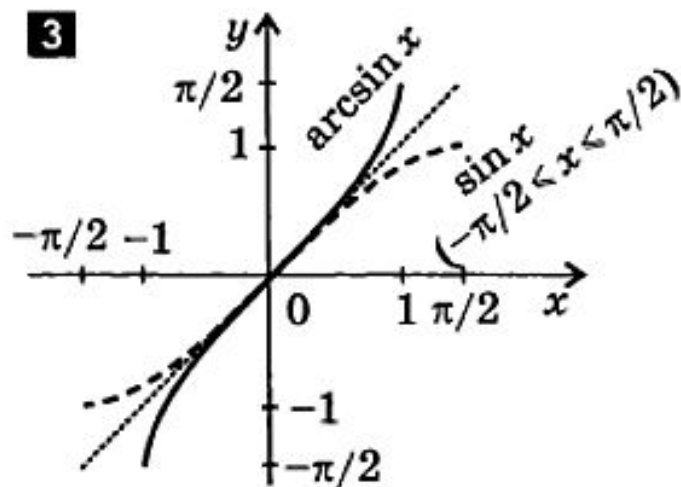
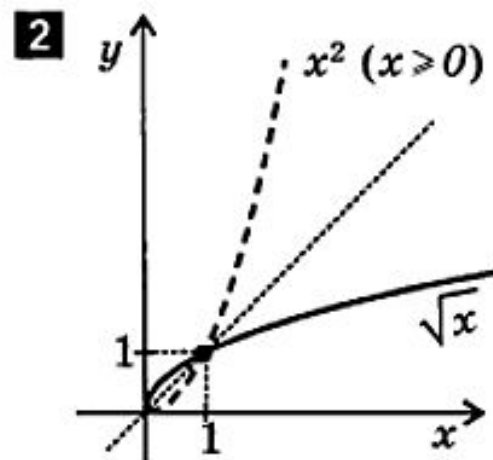
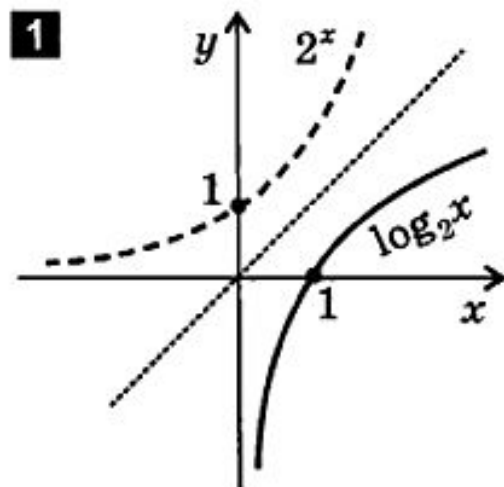


График функции  $y = g(x)$ , обратной для функции  $y = f(x)$ , можно получить преобразованием симметрии графика функции  $y = f(x)$  относительно прямой  $y = x$ .

*Замечание.* Описанное построение можно производить только для функции, имеющей обратную (см. стр. 15).



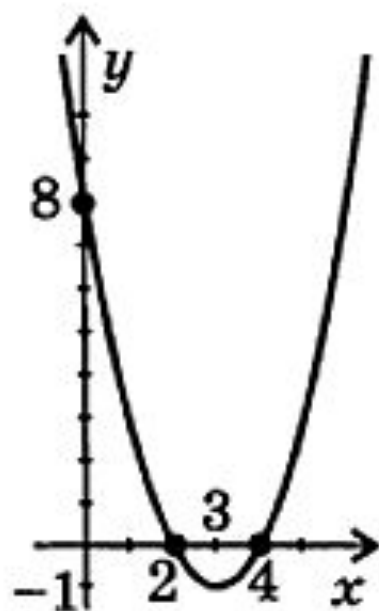
Примеры графиков взаимно обратных функций.



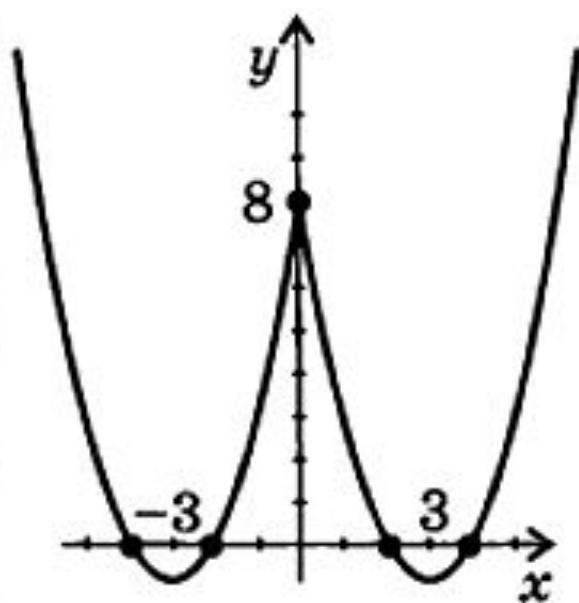
**ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ  
с помощью последовательных преобразований графиков  
элементарных функций (на примерах)**

$$y = |x^2 - 6|x| + 8| = ||x^2 - 6|x| + 8| = |(|x| - 3)^2 - 1|$$

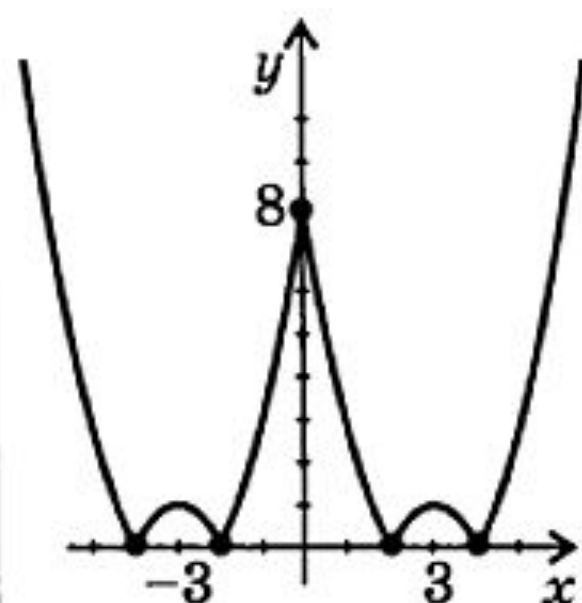
$$y = x^2 - 6x + 8 = (x - 3)^2 - 1$$



$$y = (|x| - 3)^2 - 1$$

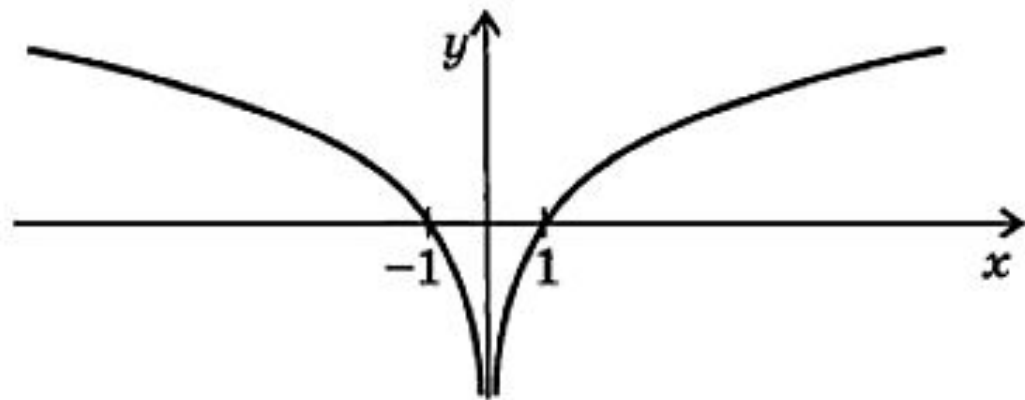


$$y = |(|x| - 3)^2 - 1|$$

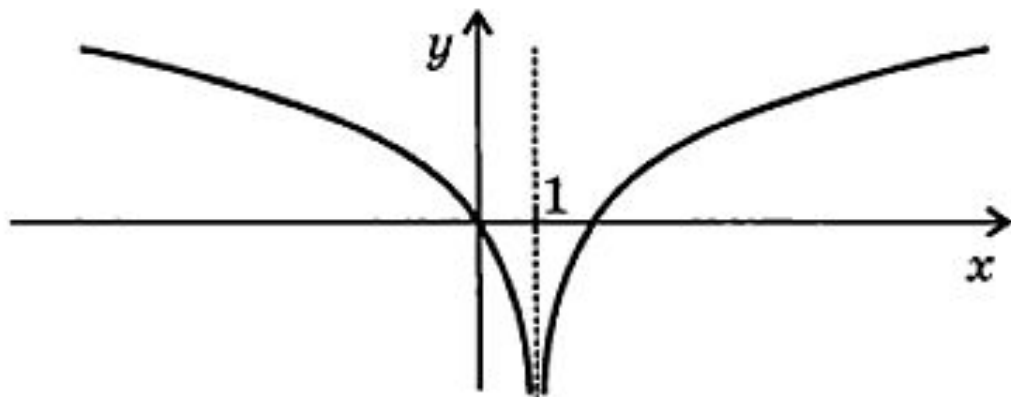


$$y = |\log_2(|x - 1|)|$$

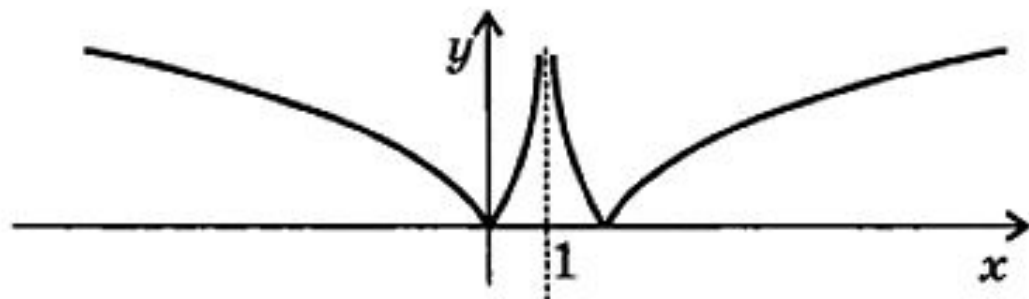
$$y = \log_2|x|$$



$$y = \log_2(|x - 1|)$$

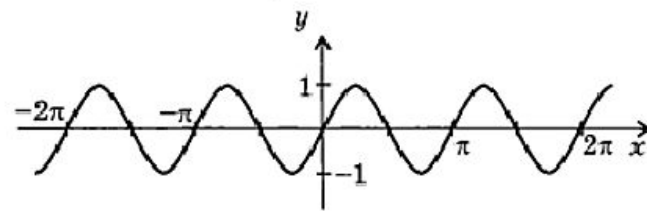


$$y = |\log_2(|x - 1|)|$$

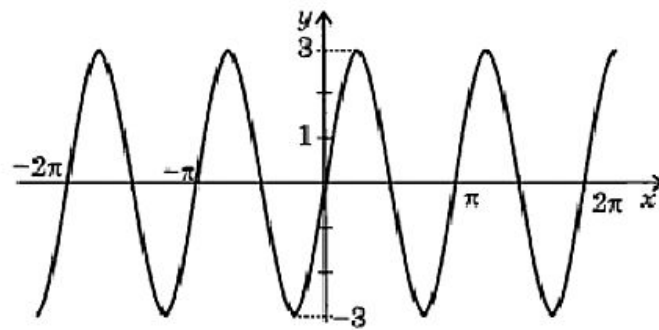


$$y = |3\sin 2x| - 1$$

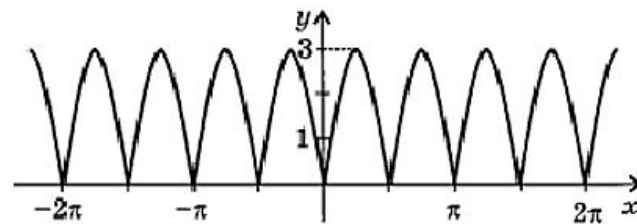
$$y = \sin 2x$$



$$y = 3\sin 2x$$



$$y = |3\sin 2x|$$



$$y = |3\sin 2x| - 1$$

