# АЛГЕБРА
## (3-й семестр)

Доцент
Мартынова Т.А.

**2010-11 учебный год**

# МНОГОЧЛЕНЫ НАД ЧИСЛОВЫМИ ПОЛЯМИ

Доцент
Мартынова Т.А.

## ЛЕКЦИЯ 9

# § 1. Многочлены над полем комплексных чисел

***Основными задачами*** этого раздела являются рассмотрение вопросов:

1. Основная теорема алгебры
2. Неприводимость многочленов над полем комплексных чисел (т.е. в кольце $C[x]$)
3. Число корней произвольного многочлена с числовыми коэффициентами
4. Теорема Виета
5. Формулы для нахождения корней уравнений 2, 3 и 4 степени

# 3. Кубические уравнения

$x^3 + px + q = 0$ **(8)** $u + v = x_0$ **(9)** $u\,v = -p/3$ **(10)**

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad \textbf{(14)}$$

- Получаем **формулу Кардано**, выражающую корни уравнения (8) через его коэффициенты при помощи квадратных и кубических радикалов:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad \textbf{(15)}$$

- Т.к. кубический радикал имеет в поле *C* три значения, то формулы (14) дают три значения для *u* и три для *v*. Нельзя комбинировать любое значение *u* с любым значением *v*: для данного значения *u* следует брать лишь то из трех значений *v*, которое удовлетворяет условию (10).

# 3. Кубические уравнения

$x^3 + px + q = 0$ **(8)** $u + v = x_0$ **(9)** $u\,v = -p/3$ **(10)**

- Пусть $u_1$ будет одно из трёх значений радикала $u$. Тогда два других $u_2$ и $u_3$ можно получить умножением соответственно на кубические корни из единицы:

$$e_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Т.е. $u_2=u_1e_1$ и $u_3=u_1e_2$. Обозначим через $v_1$ то значение радикала $v$, которое соответствует значению $u_1$ радикала $u$ по (10). Два других значения $v$, соответствующие $u_2$ и $u_3$ будут $v_2=v_1e_2$, $v_3=v_1e_1$.

- В самом деле, ввиду $e_1e_2=1$ имеем: $u_2v_2=u_1e_1v_1e_2=u_1v_1e_1e_2=u_1v_1=-p/3$, аналогично $u_3v_3=-p/3$.

# 3. Кубические уравнения

$x^3 + px + q = 0$ **(8)** $u + v = x_0$ **(9)** $u\,v = -p/3$ **(10)**

$u_2v_2=-p/3$, $u_2v_2=-p/3$, $u_3v_3=-p/3$.

- Таким образом, все три корня уравнения (3) могут быть записаны следующим образом:

$$x_1 = u_1 + v_1$$
$$x_2 = u_2 + v_2 = u_1e_1 + v_1e_2 \qquad \textbf{(16)}$$
$$x_3 = u_3 + v_3 = u_1e_2 + v_1e_1$$

- **Замечание.** В случае, когда числа $u_1$ и $v_1$ являются действительными, подставляя в формулу (16) в выражения для $x_2$ и $x_3$ значения $e_1$ и $e_2$, получим явные формулы для нахождения $x_2$ и $x_3$ по известным $u_1$ и $v_1$:

$$x_1 = u_1 + v_1,$$
$$x_2 = -\frac{u_1+v_1}{2} + \frac{u_1-v_1}{2}\sqrt{3}i, \qquad \textbf{(16´)}$$
$$x_3 = -\frac{u_1+v_1}{2} - \frac{u_1-v_1}{2}\sqrt{3}i.$$

# 3. Кубические уравнения

$z = x - a/3$ **(7)** $x^3 + px + q = 0$ **(8)**

$$x_1 = u_1 + v_1,\quad x_2 = -\frac{u_1 + v_1}{2} + \frac{u_1 - v_1}{2}\sqrt{3}i,\quad x_3 = -\frac{u_1 + v_1}{2} - \frac{u_1 - v_1}{2}\sqrt{3}i. \qquad \textbf{(16´)}$$

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},\quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad \textbf{(14)}$$

- **<u>Пример 3.</u>** Решить уравнение $z^3 + 3z^2 - 3z - 14 = 0$.
- ◘ Подстановка (7) $z = x - 1$ приводит к виду (8):

  $x^3 - 6x - 9 = 0$ (здесь $p = -6$, $q = -9$).
- По формулам (14): $u_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2,\quad v_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{1} = 1$
- По формуле (16´) находим корни уравнения $x^3 - 6x - 9 = 0$:

$$x_1 = 3,\quad x_2 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x_3 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- Отсюда (т.к. $z = x - 1$): $z_1 = 2,\quad z_2 = -\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\quad z_3 = -\frac{5}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ◙

# 3. Кубические уравнения

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \qquad (14)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + v_1, \\ x_2 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} + \frac{u_1 - v_1}{2}\sqrt{3}i, \\ x_3 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} - \frac{u_1 - v_1}{2}\sqrt{3}i. \end{aligned} \qquad (16´)$$

- **Пример 4.** Решить уравнение $x^3 - 12x + 16 = 0$.
- ◘ Здесь $p = -12$, $q = 16$.
- По формулам (14) находим:

$$u_1 = \sqrt[3]{-8+0} = -2, \quad v_1 = \sqrt[3]{-8-0} = -2$$

- По формулам (16´) находим корни уравнения:

$$x_1 = -4, \; x_2 = x_3 = 2$$

◙

# 3. Кубические уравнения

$z = x - a/3$ **(7)** $uv = -p/3$ **(10)**

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad \textbf{(14)}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + v_1, \\ x_2 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} + \frac{u_1 - v_1}{2}\sqrt{3}i, \\ x_3 &= -\frac{u_1 + v_1}{2} - \frac{u_1 - v_1}{2}\sqrt{3}i. \end{aligned} \quad \textbf{(16´)}$$

- **Пример 5.** Решить: $z^3 - 9z^2 + 21z - 5 = 0$.
- ◘ Подставив в него $z=x+3$, получим: $x^3-6x+4=0$, т.е. $p=-6$, $q=4$. По формулам (14) и (10) находим:

$$u_1 = \sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}} = \sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt[3]{(1+i)^3} = 1+i$$

$$v_1 = -\frac{-6}{3\cdot(1+i)} = \frac{6(1-i)}{3\cdot 2} = 1-i$$

- По формулам (16´) находим корни:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1-\sqrt{3}, \quad x_3 = -1+\sqrt{3}$$

- Отсюда:

$$z_1 = 5, \quad z_2 = 2-\sqrt{3}, \quad z_3 = 2+\sqrt{3}$$

◙

# 3. Кубические уравнения

$x^3 + px + q = 0$ **(8)** $u + v = x_0$ **(9)** $u\,v = -p/3$ **(10)**

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

- Напомним, что **<u>формула Кардано</u>** выражающая корни уравнения (8) через его коэффициенты при помощи квадратных и кубических радикалов имеет вид:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Понятно, что для выражения $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$

Возможны три различных случая:

# 3. Кубические уравнения $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$

- 1. $\Delta = 0$, 2. $\Delta > 0$, 3. $\Delta < 0$.
- 1. Если $\Delta = 0$, то при $p \neq 0$ и $q \neq 0$ имеем $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$,
- А так как $\left(\frac{q}{2}\right)^2 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$ получаем одно значение

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} = \sqrt[3]{\frac{\left(-\frac{q}{2}\right)^3}{\left(\frac{q}{2}\right)^2}} = \frac{-q}{2\sqrt[3]{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \frac{3q}{2p}$$

- И соответствующее значение $v_1 = u_1 = \frac{3q}{2p}$

# 3. Кубические уравнения

$$x_1 = u_1 + v_1,$$
$$x_2 = -\frac{u_1 + v_1}{2} + \frac{u_1 - v_1}{2}\sqrt{3}i,$$
$$x_3 = -\frac{u_1 + v_1}{2} - \frac{u_1 - v_1}{2}\sqrt{3}i.$$

- Обращаясь к формулам (16), получаем $x_1 = u_1 + v_1 = 3q/p$, $x_2 = x_3 = -3q/2p$.
- Таким образом, *уравнение (8) при* $\Delta = 0$, $p \neq 0$ и $q \neq 0$ *имеет три действительных корня, причем два из них равны между собой.*
- 2. Если $\Delta > 0$, то все корни уравнения (8) должны быть различными. Выясним, сколько из них будет действительными.
- В выражении $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}$ под знаком кубического корня находится действительное число. Следовательно, одно из значений $u$ должно быть действительным. Пусть это будет $u_1$. Тогда $v_1$ будет также действительным.

# 3. Кубические уравнения

- *Таким образом при $\Delta>0$ уравнение (8) имеет только один действительный корень, $x_1=u_1+v_1$, а два остальные корня будут сопряженными чисто комплексными числами*

$$x_2 = -\frac{u_1+v_1}{2} + \frac{u_1-v_1}{2}\sqrt{3}i,$$
$$x_3 = -\frac{u_1+v_1}{2} - \frac{u_1-v_1}{2}\sqrt{3}i.$$

- 3. Пусть $\Delta<0$. Этот случай известен под названием *неприводимого*. Он примечателен тем, что $u$ и $v$ являются мнимыми (так как приходится извлекать корень третьей степени из мнимых чисел), а все три корня уравнения (8) будут действительными (различными).

# 3. Кубические уравнения

- С помощью некоторых преобразований получаем
- $x_1 = u_1+v_1 = 2|\sqrt[3]{r}|\cos\phi/3,$
- $x_2 = u_2+v_2 = 2|\sqrt[3]{r}|\cos(\phi+2\pi)/3,$
- $x_3 = u_3+v_3 = 2|\sqrt[3]{r}|\cos(\phi+4\pi)/3,$
- Где $\cos\phi=-q/2r$, $\sin\phi = \alpha/r$, $\alpha$ - действительное число равное $\sqrt{-\Delta}$ и

$$r = \left|\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2 + \alpha^2}\right|$$

- Итак, *в случае* $\Delta<0$ *уравнение (8) имеет три действительных корня*

# 3. Кубические уравнения

- Недостатком формулы Кордано является то, что часто рациональные корни она представляет в иррациональном виде. Например, нетрудно проверить, что число 2 является рациональным корнем уравнения $x^3 - x - 6 = 0$. Так как для этого уравнения $\Delta>0$, то 2 является единственным действительным корнем уравнения $x^3 - x - 6 = 0$.
- Однако по формулам Кордано действительный корень выражается иррациональным числом
- $$x_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{3 + \frac{11}{9}\sqrt{6}} + \sqrt[3]{3 - \frac{11}{9}\sqrt{6}}$$

# 4. Уравнения четвёртой степени

- **Дано уравнение <u>четвёртой степени:</u>**

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad \mathbf{(17)}$$

с произвольными комплексными коэффициентами.

- Его решение сводится к нахождению какого-нибудь корня некоторого вспомогательного кубичного уравнения.
- Перепишем его в виде: $x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d.$
- К обеим частям прибавим выражение: $\left(\frac{ax}{2}\right)^2$
- Получим: $\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d$

# 4. Уравнения четвёртой степени

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b\right)x^2-cx-d$$

- К обеим частям теперь прибавим:

$$\left(2\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)\frac{y}{2}+\frac{y^2}{4}\right)=\left(\left(x^2+\frac{ax}{2}\right)y+\frac{y^2}{4}\right)$$

- Тогда:

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-d\right) \qquad \textbf{(18)}$$

- Теперь число $y$ подбирается так, чтобы квадратный трёхчлен относительно $x$ в правой части уравнения (18) был полным квадратом, т.е. так, чтобы его дискриминант был равен 0.
- Но тогда число $y$ должно удовлетворить уравнению 3-й степени:

$$D=\left(\frac{ay}{2}-c\right)^2-4\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)\left(\frac{y^2}{4}-d\right)=0 \qquad \textbf{(19)}$$

- Полученное уравнение (19) называют ***кубической резольвентой уравнения*** (17) .

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0 \qquad \textbf{(17)}$$

# 4. Уравнения четвёртой степени

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (17)$$

$$D = \left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0 \quad (19)$$

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right) \quad (18)$$

- Пусть $y_0$ – корень уравнения (19).
- Тогда (18) приводится к виду: $$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2}\right) = (\alpha x + \beta)^2$$ для некоторых чисел $\alpha$ и $\beta$.
- Последнее уравнение равносильно двум квадратным уравнениям (20): $$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = ux + v,$$ $$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = -(ux + v). \quad (20)$$
- Решая (20), получим все четыре корня уравнения (17).

# 4. Уравнения четвёртой степени

$$\left(x^2+\frac{ax}{2}+\frac{y}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{4}-b+y\right)x^2+\left(\frac{ay}{2}-c\right)x+\left(\frac{y^2}{4}-d\right) \quad (18)$$

- **Пример 6.** Решить: $x^4-2x^3+2x^2+4x-8=0$.
- ◘ Приведём к виду (18):

$$x^4-2x^3=-2x^2-4x+8$$

$$x^4-2x^3+x^2=-x^2-4x+8$$

$$(x^2-x)^2=-x^2-4x+8$$

$$\left((x^2-x)+\frac{y}{2}\right)^2=-x^2-4x+8+(x^2-x)y+\frac{y^2}{4}$$

$$\left(x^2-x+\frac{y}{2}\right)^2=(y-1)x^2-(y+4)x+\left(\frac{y^2}{4}+8\right) \quad \textbf{(21)}$$

# 4. Уравнения четвёртой степени

$$\left(x^2 - x + \frac{y}{2}\right)^2 = (y-1)x^2 - (y+4)x + \left(\frac{y^2}{4} + 8\right) \quad \textbf{(21)}$$

- Составляем кубическую резольвенту уравнения (21):

$$(y+4)^2 - 4(y-1)\left(\frac{y^2}{4} + 8\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^3 - 2y^2 + 24x - 48 = 0$$

- Непосредственно видно, что одним из корней последнего уравнения является число $y_0=2$.
- Подставляя это значения в равенство (21) получим уравнение: $\left(x^2 - x + 1\right)^2 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$
- Оно равносильно совокупности двух квадратных уравнений: $\left[\begin{array}{l} x^2 - x + 1 = x - 3 \\ x^2 - x + 1 = -(x-3) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 4 = 0 \\ x^2 = 2 \end{array}\right.$
- Решая эти уравнения получим все корни данного уравнения: $x_1 = 1 + \sqrt{3}i, \quad x_2 = 1 - \sqrt{3}i, \quad x_3 = \sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2}.$

Спасибо за внимание!