

Дискретная математика



Замкнутый класс

- Система функций Σ называется *замкнутым классом*, если любая суперпозиция функций системы Σ снова принадлежит системе Σ .

Пример 1

- Множество всех конъюнкций K_1 – замкнутый класс.

$$f(x, y) = xy \in K_1, g(x, z) = xz \in K_1,$$

$$h(x, y, t) = xyt \in K_1.$$

$$\begin{aligned} w(x, y, z, t) &= f(g(x, z), h(x, y, t)) = \\ &= (xz) \cdot (xyt) = xzxyt = xyzt \in K_1 \end{aligned}$$

Пример 2

- Множество всех дизъюнкций K_2 – замкнутый класс.

$$f(x, z) = x \vee z \in K_2, g(y, z) = y \vee z \in K_2,$$

$$h(y, z, t) = y \vee z \vee t \in K_2.$$

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= h(y, g(y, z), f(x, z)) = \\ &= y \vee (y \vee z) \vee (x \vee z) = y \vee y \vee z \vee x \vee z = \\ &= x \vee y \vee z \in K_2 \end{aligned}$$

Пример 3

- Множество всех полиномов Жегалкина K_3 – замкнутый класс.

$$f(x, z) = x \oplus z \oplus 1 \in K_3, \quad g(y, z) = y \oplus z \in K_3,$$

$$h(x, z, t) = x \oplus z \oplus t \in K_3.$$

$$\begin{aligned} w(x, y, z, t) &= f(h(x, z, t), g(y, z)) = \\ &= (x \oplus z \oplus t) \oplus (y \oplus z) \oplus 1 = \\ &= x \oplus y \oplus z \oplus z \oplus t \oplus 1 = \\ &= x \oplus y \oplus t \oplus 1 \in K_3 \end{aligned}$$

Замыкание

- *Замыканием системы функций Σ* называется система $[\Sigma]$, состоящая из всех функций системы Σ и всех суперпозиций функций системы Σ .

Функционально полные системы

Система функций Σ называется функционально полной (ФП), если через суперпозиции функций этой системы можно выразить любую логическую функцию.

Замечание 1

Если система функций Σ
является замкнутым классом,
то есть $\Sigma = K$,
тогда она равна своему
замыканию:

$$K = [K]$$

Замечание 2

Если система функций Σ является функционально полной, тогда ее замыкание равно всему множеству логических функций:

$$[\Sigma] = P_2$$

Пример 1

Пусть система $\Sigma_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$ -
множество булевых операций

(базис Буля).

Σ_0 – ФП, так как любая логическая
функция может быть выражена
Булевой формулой (БФ).

Пример 2

Система Σ_0 является *избыточной*.

Дизъюнкцию можно выразить через конъюнкцию и отрицание:

$$x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$$

Конъюнкцию можно выразить через

дизъюнкцию и отрицание:

$$x \wedge y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$$

Продолжение примера 2

Откуда:

$$\Sigma_1 = \{ \wedge, \Phi, \Pi \} -$$

$$\Sigma_2 = \{ \vee, \Phi, \Pi \} -$$

Замечание:

- За не избыточность системы приходится платить избыточностью формул.

Пример 3

Пусть булева формула имеет вид:

$$F_0(x, y, z) = \overline{xy} \vee x\overline{z}$$

Тогда, в системе Σ_1 она

принимает вид:

$$F_1(x, y, z) = \overline{\overline{xy} \cdot \overline{xz}} = \overline{xy \cdot xz}$$

Пример 4

$$F_0(x, y, z) = \overline{xy} \vee x\overline{z}$$

Тогда, в системе Σ_2 она

принимает вид:

$$\begin{aligned} F_2(x, y, z) &= \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}}} \vee \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x} \vee z}}}}} = \\ &= \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}}} \vee \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{x} \vee z}}}}} \end{aligned}$$

Пример 6

Система $\Sigma_4 = \{ | \}$

- функционально полна.

Это следует из того, что через штрих

Шеффера можно выразить функции

ФП системы:

$$\Sigma_1 = \{ \wedge, \neg \}.$$

Продолжение примера 6

Отрицание выразим по формуле:

$$\bar{x} = x | x$$

Конъюнкцию выразим по формуле:

$$x \wedge y = \overline{x | y} = (x | y) | (x | y).$$

Продолжение примера 6

Убедимся в истинности равенства:

$$\overline{x} = x | x$$

$$\overline{0} = 1, \quad 0 | 0 = 1$$

$$\overline{1} = 0, \quad 1 | 1 = 0.$$

Пример 7

Система $\Sigma_4 = \{\downarrow\}$
- функционально полна.

Это следует из того, что через стрелку

Пирса можно выразить функции ФП

системы:

$$\Sigma_2 = \{\vee, \neg\}.$$

Продолжение примера 7

Отрицание выразим по формуле:

$$\bar{x} = x \downarrow x$$

Дизъюнкцию выразим по формуле:

$$x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y).$$

Продолжение примера 7

Убедимся в истинности равенства:

$$\bar{x} = x \downarrow x$$

$$\bar{0} = 1, \quad 0 \downarrow 0 = 1$$

$$\bar{1} = 0, \quad 1 \downarrow 1 = 0.$$

Теорема 1

Если через функции системы Σ можно выразить функции булева

базиса $\Sigma_0 = \{ \wedge, \vee, \neg \}$,

то система Σ - функциональна полна.

Тогда говорят, что система Σ -

сводится к системе Σ_0 : $\Sigma \Rightarrow \Sigma_0$.

Следствие

$$\Sigma_1 = \{\wedge, \neg\} \Rightarrow \Sigma_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$$

$$\Sigma_2 = \{\vee, \neg\} \Rightarrow \Sigma_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$$

$$\Sigma_3 = \{\mid\} \Rightarrow \Sigma_1 = \{\wedge, \neg\}$$

$$\Sigma_4 = \{\downarrow\} \Rightarrow \Sigma_2 = \{\vee, \neg\}$$

Теорема 2

Если через функции системы Σ можно выразить функции некоторой функционально полной системы

$$\Sigma^* = \{f_1, f_2, \dots, f_k\},$$

то система Σ - функционально полна.

$$\Sigma \Rightarrow \Sigma^* .$$

Следствие

Таким образом, доказательство функциональной полноты произвольной системы функций можно строить путем сведения ее к некоторой системе, функциональная полнота которой доказана.

Функциональная полнота в слабом смысле

Система функций Σ называется

**функционально полной в слабом
смысле** (сФП),

если она будет функционально полной
после добавления констант 0 и 1.

$$\Sigma \cup \{0, 1\} \vdash \Rightarrow$$

Функциональная полнота в слабом смысле

Система функций

$$\Sigma = \{ \wedge, \vee, \oplus, \neg \}$$

Среди функций, образующей AG, нет константы 1.

Но ровно половина всех полиномов содержит слагаемое 1.

$$\Sigma_5 = \{ \wedge, \oplus, \neg, 1 \} \Rightarrow$$