

# Дискретная математика



## *Замкнутый класс*

- Система функций  $\Sigma$  называется *замкнутым классом*, если любая суперпозиция функций системы  $\Sigma$  снова принадлежит системе  $\Sigma$ .

# Пример 1

- Множество всех конъюнкций  $K_1$  – замкнутый класс.

$$f(x, y) = xy \in K_1, g(x, z) = xz \in K_1,$$

$$h(x, y, t) = xyt \in K_1.$$

$$\begin{aligned} w(x, y, z, t) &= f(g(x, z), h(x, y, t)) = \\ &= (xz) \cdot (xyt) = xzxyt = xyzt \in K_1 \end{aligned}$$

## Пример 2

- Множество всех дизъюнкций  $K_2$  – замкнутый класс.

$$f(x, z) = x \vee z \in K_2, g(y, z) = y \vee z \in K_2,$$

$$h(y, z, t) = y \vee z \vee t \in K_2.$$

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= h(y, g(y, z), f(x, z)) = \\ &= y \vee (y \vee z) \vee (x \vee z) = y \vee y \vee z \vee x \vee z = \\ &= x \vee y \vee z \in K_2 \end{aligned}$$

### Пример 3

- Множество всех полиномов Жегалкина  $K_3$  – замкнутый класс.

$$f(x, z) = x \oplus z \oplus 1 \in K_3, \quad g(y, z) = y \oplus z \in K_3,$$

$$h(x, z, t) = x \oplus z \oplus t \in K_3.$$

$$\begin{aligned} w(x, y, z, t) &= f(h(x, z, t), g(y, z)) = \\ &= (x \oplus z \oplus t) \oplus (y \oplus z) \oplus 1 = \\ &= x \oplus y \oplus z \oplus z \oplus t \oplus 1 = \\ &= x \oplus y \oplus t \oplus 1 \in K_3 \end{aligned}$$

# *Замыкание*

- *Замыканием системы функций  $\Sigma$*  называется система  $[\Sigma]$ , состоящая из всех функций системы  $\Sigma$  и всех суперпозиций функций системы  $\Sigma$ .

# ***Функционально полные системы***

Система функций  $\Sigma$  называется функционально полной (ФП), если через суперпозиции функций этой системы можно выразить любую логическую функцию.

# *Замечание 1*

Если система функций  $\Sigma$   
является замкнутым классом,  
то есть  $\Sigma = K$ ,  
тогда она равна своему  
замыканию:

$$K = [K]$$



## ***Замечание 2***

Если система функций  $\Sigma$  является функционально полной, тогда ее замыкание равно всему множеству логических функций:

$$[\Sigma] = P_2$$

# Пример 1

Пусть система  $\Sigma_0 = \{ \wedge, \vee, \neg \}$  -  
множество булевых операций

(базис Буля).

$\Sigma_0$  – ФП, так как любая логическая  
функция может быть выражена  
Булевой формулой (БФ).

## Пример 2

Система  $\Sigma_0$  является *избыточной*.

Дизъюнкцию можно выразить через конъюнкцию и отрицание:

$$x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$$

Конъюнкцию можно выразить через

дизъюнкцию и отрицание:

$$x \wedge y = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$$

## Продолжение примера 2

Откуда:

$$\Sigma_1 = \{ \wedge, \Phi, \Pi \} -$$

$$\Sigma_2 = \{ \vee, \Phi, \Pi \} -$$

## ***Замечание:***

- За не избыточность системы приходится платить избыточностью формул.

## Пример 3

Пусть булева формула имеет вид:

$$F_0(x, y, z) = \overline{xy} \vee x\overline{z}$$

Тогда, в системе  $\Sigma_1$  она

принимает вид:

$$F_1(x, y, z) = \overline{\overline{xy} \cdot \overline{xz}} = \overline{xy \cdot xz}$$

## Пример 4

$$F_0(x, y, z) = \overline{xy} \vee x\overline{z}$$

Тогда, в системе  $\Sigma_2$  она

принимает вид:

$$\begin{aligned} F_2(x, y, z) &= \overline{\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}} \vee \overline{\overline{\overline{x} \vee z}} = \\ &= \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{\overline{\overline{x} \vee z}} \end{aligned}$$

## Пример 6

Система  $\Sigma_4 = \{ | \}$   
- функционально полна.

Это следует из того, что через штрих Шеффера можно выразить функции ФП системы:

$$\Sigma_1 = \{ \wedge, \neg \}.$$



## *Продолжение примера 6*

Отрицание выразим по формуле:

$$\bar{x} = x | x$$

Конъюнкцию выразим по формуле:

$$x \wedge y = \overline{x | y} = (x | y) | (x | y).$$

## Продолжение примера 6

Убедимся в истинности равенства:

$$\overline{x} = x | x$$

$$\overline{0} = 1, \quad 0 | 0 = 1$$

$$\overline{1} = 0, \quad 1 | 1 = 0.$$

## Пример 7

Система  $\Sigma_4 = \{\downarrow\}$   
- функционально полна.

Это следует из того, что через стрелку

Пирса можно выразить функции ФП

системы:

$$\Sigma_2 = \{\vee, \neg\}.$$

## *Продолжение примера 7*

Отрицание выразим по формуле:

$$\bar{x} = x \downarrow x$$

Дизъюнкцию выразим по формуле:

$$x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y).$$

## *Продолжение примера 7*

Убедимся в истинности равенства:

$$\bar{x} = x \downarrow x$$

$$\bar{0} = 1, \quad 0 \downarrow 0 = 1$$

$$\bar{1} = 0, \quad 1 \downarrow 1 = 0.$$

# Теорема 1

Если через функции системы  $\Sigma$  можно выразить функции булева

базиса  $\Sigma_0 = \{ \wedge, \vee, \neg \}$ ,

то система  $\Sigma$  - функциональна полна.

Тогда говорят, что система  $\Sigma$  -

сводится к системе  $\Sigma_0$ :  $\Sigma \Rightarrow \Sigma_0$ .

## Следствие

$$\Sigma_1 = \{\wedge, \neg\} \Rightarrow \Sigma_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$$

$$\Sigma_2 = \{\vee, \neg\} \Rightarrow \Sigma_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$$

$$\Sigma_3 = \{\mid\} \Rightarrow \Sigma_1 = \{\wedge, \neg\}$$

$$\Sigma_4 = \{\downarrow\} \Rightarrow \Sigma_2 = \{\vee, \neg\}$$

## Теорема 2

Если через функции системы  $\Sigma$  можно выразить функции некоторой функционально полной системы

$$\Sigma^* = \{f_1, f_2, \dots, f_k\},$$

то система  $\Sigma$  - функционально полна.

$$\Sigma \Rightarrow \Sigma^* .$$



## Следствие

Таким образом, доказательство функциональной полноты произвольной системы функций можно строить путем сведения ее к некоторой системе, функциональная полнота которой доказана.

# **Функциональная полнота в слабом смысле**

Система функций  $\Sigma$  называется

**функционально полной в слабом  
смысле** (сФП),

если она будет функционально полной  
после добавления констант 0 и 1.

$$\Sigma \cup \{0, 1\} \vdash \Rightarrow$$

## Функциональная полнота в слабом смысле

### Система функций

$$\Sigma = \{ \wedge, \vee, \oplus \}$$

Среди функций, образующей AG, нет константы 1.

Но ровно половина всех полиномов содержит слагаемое 1.

$$\Sigma_5 = \{ \wedge, \oplus, \perp \} \Rightarrow$$