Теория вероятностей и математическая статистика

Лекции 1 курс

Теория вероятностей

Тема 2.

Случайные величины.

Функция распределения и ее свойства.

Дискретная случайная величина.

Ряд распределения.

Числовые характеристики.

Случайные величины

Случайной величиной Х в данном опыте называется переменная величина, которая в результате испытания примет одно из своих возможных значений, но какое именно до проведения опыта неизвестно. Совокупность всех возможных значений случайной величины может быть

Дискретной - все возможные значения случайной величины образуют конечную или бесконечную последовательность (отдельные точечные значения).

Непрерывной - все значения случайной величины заполняют сплошь некоторый промежуток.

Например,

а) X - оценка на экзамене

Совокупность значений дискретная - $\{2,3,4,5\}$

б) X - время безотказной работы двигателя (ресурс)

Совокупность значений непрерывная, любое значение из промежутка [0,t] (t - момент отказа двигателя).

Функция распределения случайной величины

Функцией распределения F(x) случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т.е.

$$F(x)=P(X<x).$$

Свойства F(x):

1) область определения F(x) - интервал $(-\infty;+\infty)$

2) $0 \leq F(x) \leq 1$,

3) $F(-\infty)=0$, т.к. $P(X<-\infty)=P(\Theta)=0$,

4) $F(+\infty)=1$, т.к. $P(X<+\infty)=P(\Omega)=1$,

5) F(x)- неубывающая функция.

Будем считать, что F(x) непрерывна слева

$$\lim_{x\to a-0} F(x)=F(a)$$

Вероятность попадания случайной величины в промежуток и в точку

Основное свойство функции распределения

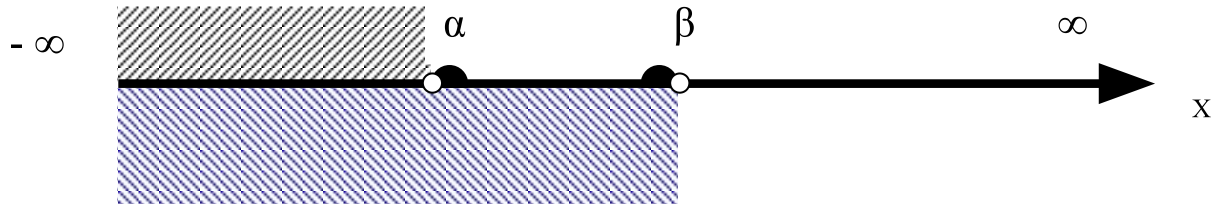
$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал равна разности значений функции распределения в концах интервала

Следствие:

$$\mathbf{P(X=\alpha)} = \begin{cases} 0,\ \textit{если}\ F(x)\ \text{непрерывна в точке x} = \alpha, \\ c > 0,\ \textit{если}\ F(x)\ \text{разрывна в точке x} = \alpha. \end{cases}$$

Действительно:



$$\{x<\beta\}=\{x<\alpha\}+\{\alpha\le x<\beta\}$$

тогда

$$\mathrm{P}(x<\beta)=P(x<\alpha)+P(\alpha\le x<\beta)$$

$$P(x=\alpha)=\lim_{\beta\to\alpha}P(\alpha\le x<\beta)=$$

$$\lim_{\beta\to\alpha}\left(\mathrm{F}(\beta)-\mathrm{F}(\alpha)\right)=\begin{cases}0, & \text{если } \mathrm{F}(\alpha+0)=\mathrm{F}(\alpha)\\ \mathrm{c}>0, & \text{если } \mathrm{F}(\alpha+0)-\mathrm{F}(\alpha)=\mathrm{c}\end{cases}$$

Дискретная случайная величина

Случайная величина X называется **дискретной,** если ее совокупность ее значений дискретна.

Законом (рядом) распределения случайной величины X называется любая ее вероятностная характеристика, из которой можно получить функцию распределения F(x).

Законом распределения дискретной случайной величины X является **ряд распределения**, т.е. перечисление всех возможных значений X и их соответствующих вероятностей:

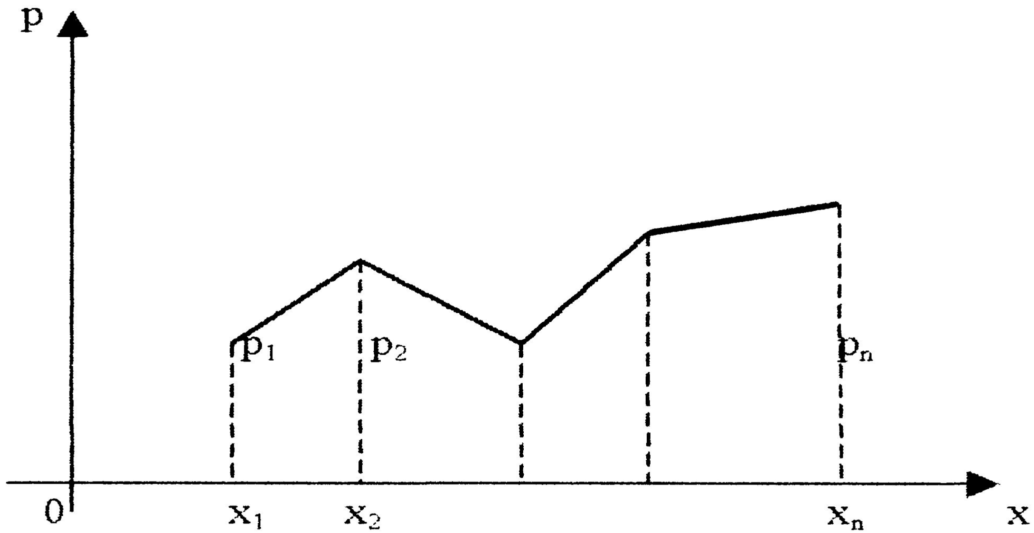
X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

$p_i=P(X=x_i)$, где $i=1;2;...;n;...$

Т.к. события $(X=x_1)$, $(X=x_2)$,...,$(X=x_n)$,... образуют полную группу событий и несовместны, то:

$$\sum_i p_i = 1 \text{ - условие нормировки}$$

Многоугольником распределения назовем ломаную, соединяющую последовательно точки $(x_1; p_1)$, $(x_2;p_2)$, ...,$(x_n;p_n)$...



Пример 15:

Среди шести микроскопов два изношенных.

Составить ряд распределения случайной величины X- числа изношенных микроскопов среди трех наудачу отобранных.

Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

Случайная величина X может принимать значения: 0;1;2.

P(X=0)= $\dfrac{C_2^0 \cdot C_4^3}{C_6^3} = \dfrac{2!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 3!}{0!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 6!} = 0{,}2$

P(X=1)= $\dfrac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} = 0{,}6$

P(X=2)= $\dfrac{C_2^2 \cdot C_4^1}{C_6^3} = 0{,}2.$

Условие нормировки: 0,2+0,6+0,2=1.

X	*0*	*1*	*2*
P	*0,2*	*0,6*	*0,2*

Если x $\in$ $(-\infty;0]$, то $F(x)=P(X<x)=0$;

если x $\in$ $(0;1]$, то $F(x)=P(X<x)=P(X=0)=0,2$;

если x $\in$ $(1;2]$, то

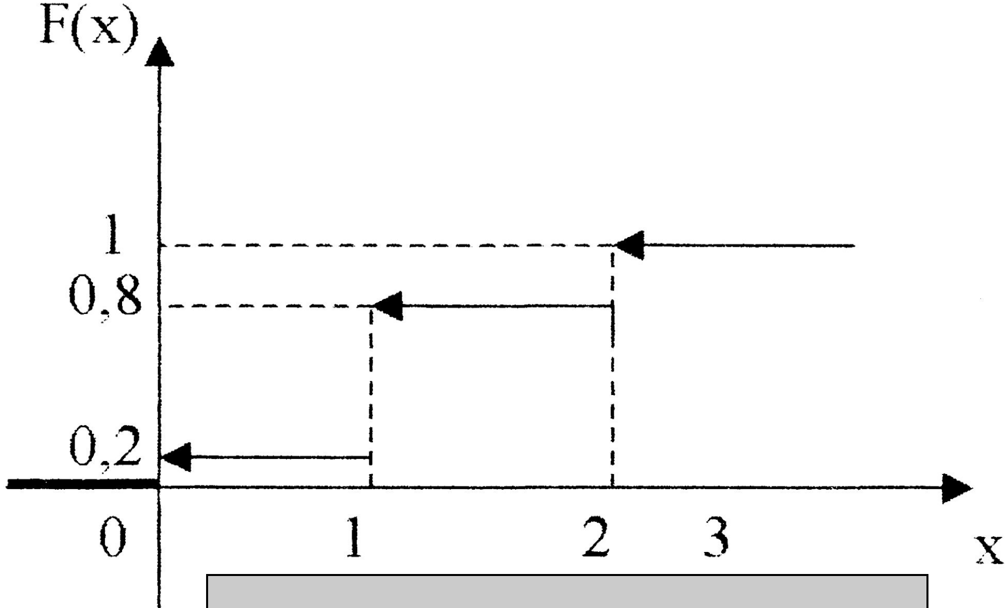
$F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)=0,2+0,6=0,8$;

если x $\in$ $(2;+\infty)$,

$F(x)=P(X<x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0,2+0,6+0,2=1$.

Следовательно,

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ \textit{если}\ x\in(-\infty;0], \\ 0,2,\ \textit{если}\ x\in(0;1], \\ 0,8,\ \textit{если}\ x\in(1;2], \\ 1,\ \textit{если}\ x\in(2;+\infty). \end{cases}$$



Итак,

$$F(x) = \sum_{(x_i < x)} p_i$$

Зная F(x), можно, например, найти P(X=3)=0, т.к. x=3- точка непрерывности F(x); или найти P (X=1)=0,8-0,2=0,6, т.к. x=1- точка разрыва F(x); или P(-1<X<1,5) = F(1,5) - F(-1) = 0,8 - 0 = 0,8. □

Основные числовые характеристики случайной величины

Математическое ожидание случайной величины

Математическим ожиданием или средним значением **дискретной случайной** величины X называется число

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Замечание: Если **дискретная случайная** величина X имеет n возможных значений, то

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Простейшие свойства математического ожидания.

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной, т.е.

$$M(C)=C.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е.

$$M(CX)=C(MX).$$

□**Пример .** Дано:

X	-3	-1	2	
P	0,2	0,5	0,3	

Найти M[5X].

Решение.

$$M[5X]=5M[X], \text{ т.к. } M[X]=(-3)\cdot 0{,}2+(-1)\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}3=-0{,}5,$$

$$\text{то } M[5X]=5\cdot(-0{,}5)= -2{,}5.$$ □

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины

Дисперсией случайной величины X называется число, характеризующее степень разброса возможных значений случайной величины относительно ее математического ожидания, обозначаемое DX и равное

$$DX = MX^2 - (MX)^2,$$

где $MX^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется число

$$\sigma = \sqrt{DX}$$

Среднее квадратическое отклонение σ также характеризует степень отклонения возможных значений случайной величины относительно ее математического ожидания MX.

Простейшие свойства дисперсии

Свойство 1. Дисперсия **постоянной** величины равна нулю.

$$D(C)=0$$

Свойство 2. **Постоянный множитель** можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат, т.е.

$$D(CX)=C^2(DX).$$

Пример . Найти дисперсию случайной величины X, имеющей следующий закон распределения

X	-3	-1	2
p	0,2	0,5	0,3

Пример . Найти дисперсию случайной величины X, имеющей следующий закон распределения

X	-3	-1	2
p	0,2	0,5	0,3

Решение.

$MX=(-3)\cdot 0{,}2+(-1)\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}3=-0{,}5;$

$$MX^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i = (-3)^2\cdot 0{,}2+(-1)^2\cdot 0{,}5+2^2\cdot 0{,}3=3{,}5;$$

следовательно,

$DX=3{,}5-(-0{,}5)^2=3{,}5-0{,}25=3{,}25,\ \sigma \approx 1{,}80.$