

Теория вероятностей и математическая статистика

Лекции 1 курс

16.12.2019

Теория вероятностей

Тема 2.

Случайные величины.

Функция распределения и ее свойства.

Дискретная случайная величина.

Ряд распределения.

Числовые характеристики.

Случайные величины

Случайной величиной X в данном опыте называется переменная величина, которая в результате испытания примет одно из своих возможных значений, но какое именно до проведения опыта неизвестно. Совокупность всех возможных значений случайной величины может быть

Дискретной - все возможные значения случайной величины образуют конечную или бесконечную последовательность (отдельные точечные значения).

Непрерывной - все значения случайной величины заполняют сплошь некоторый промежуток.

Например,

а) X - оценка на экзамене

Совокупность значений дискретная - $\{2,3,4,5\}$

б) X - время безотказной работы двигателя (ресурс)

Совокупность значений непрерывная, любое значение из промежутка $[0,t]$ (t - момент отказа двигателя).

Функция распределения случайной величины

Функцией распределения $F(x)$ случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x , т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Свойства $F(x)$:

1) область определения $F(x)$ - интервал $(-\infty; +\infty)$

2) $0 \leq F(x) \leq 1$,

3) $F(-\infty) = 0$, т.к. $P(X < -\infty) = P(\emptyset) = 0$,

4) $F(+\infty) = 1$, т.к. $P(X < +\infty) = P(\Omega) = 1$,

5) $F(x)$ - неубывающая функция.

Будем считать, что $F(x)$ непрерывна слева

$$\lim_{x \rightarrow a-0} F(x) = F(a)$$

Вероятность попадания случайной величины в промежуток и в точку

Основное свойство функции распределения

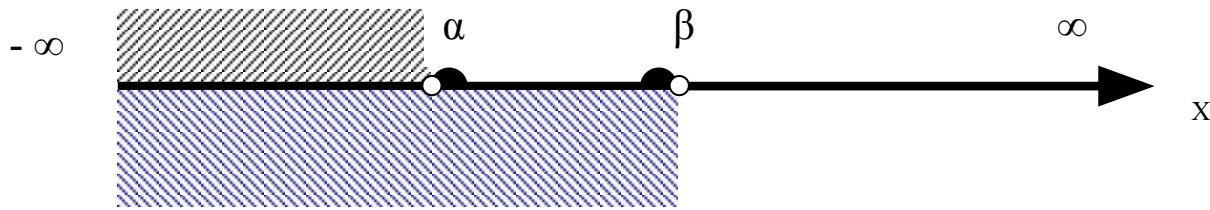
$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал равна разности значений функции распределения в концах интервала

Следствие:

$$P(X = \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } F(x) \text{ непрерывна в точке } x = \alpha, \\ c > 0, & \text{если } F(x) \text{ разрывна в точке } x = \alpha. \end{cases}$$

Действительно:



$$\{x < \beta\} = \{x < \alpha\} + \{\alpha \leq x < \beta\}$$

тогда

$$P(x < \beta) = P(x < \alpha) + P(\alpha \leq x < \beta)$$

$$P(x = \alpha) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} P(\alpha \leq x < \beta) =$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha} (F(\beta) - F(\alpha)) = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ если } F(\alpha + 0) = F(\alpha) \\ c > 0, \text{ если } F(\alpha + 0) - F(\alpha) = c \end{array} \right\}$$

Дискретная случайная величина

Случайная величина X называется **дискретной**, если ее совокупность ее значений дискретна.

Законом (рядом) распределения случайной величины X называется любая ее вероятностная характеристика, из которой можно получить функцию распределения $F(x)$.

Законом распределения дискретной случайной величины X является **ряд распределения**, т.е. перечисление всех возможных значений X и их соответствующих вероятностей:

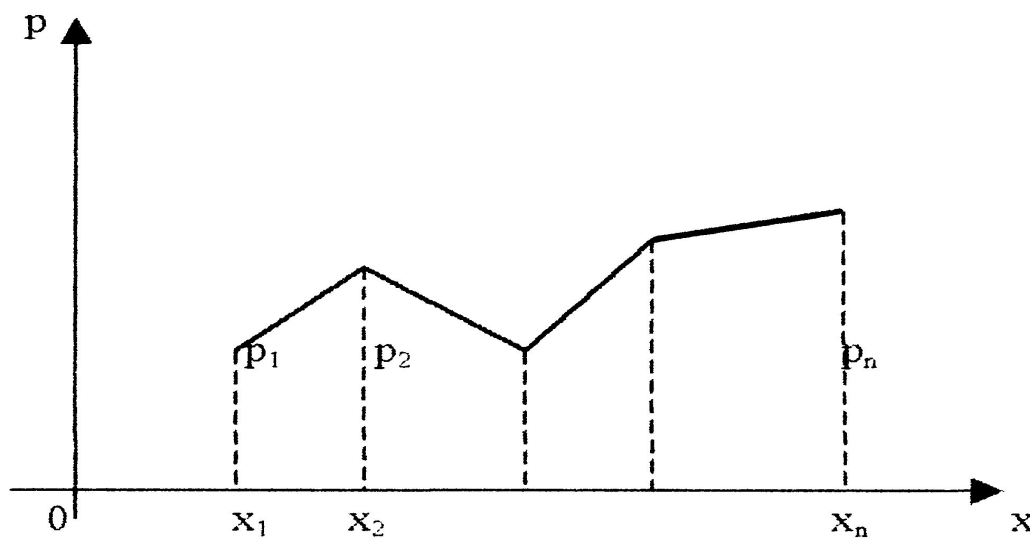
X	x_1	x_2	\dots	x_n
p	p_1	p_2	\dots	p_n

$p_i = P(X=x_i)$, где $i=1;2;\dots;n;\dots$

Т.к. события $(X=x_1), (X=x_2), \dots, (X=x_n), \dots$ образуют полную группу событий и несовместны, то:

$$\sum_i p_i = 1 - \text{условие нормировки}$$

Многоугольником распределения назовем ломаную, соединяющую последовательно точки $(x_1; p_1)$, $(x_2; p_2)$, ..., $(x_n; p_n)$...



Пример 15:

Среди шести микроскопов два изношенных.

Составить ряд распределения случайной величины X - числа изношенных микроскопов среди трех наудачу отобранных.

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Случайная величина X может принимать значения:
0;1;2.

$$P(X=0) = \frac{C_2^0 \cdot C_4^3}{C_6^3} = \frac{2! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3!}{0! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 6!} = 0,2$$

$$P(X=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_4^2}{C_6^3} = 0,6$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 \cdot C_4^1}{C_6^3} = 0,2.$$

Условие нормировки: $0,2+0,6+0,2=1$.

X	0	1	2
P	0,2	0,6	0,2

Если $x \in (-\infty; 0]$, то $F(x) = P(X < x) = 0$;

если $x \in (0; 1]$, то $F(x) = P(X < x) = P(X = 0) = 0,2$;

если $x \in (1; 2]$, то

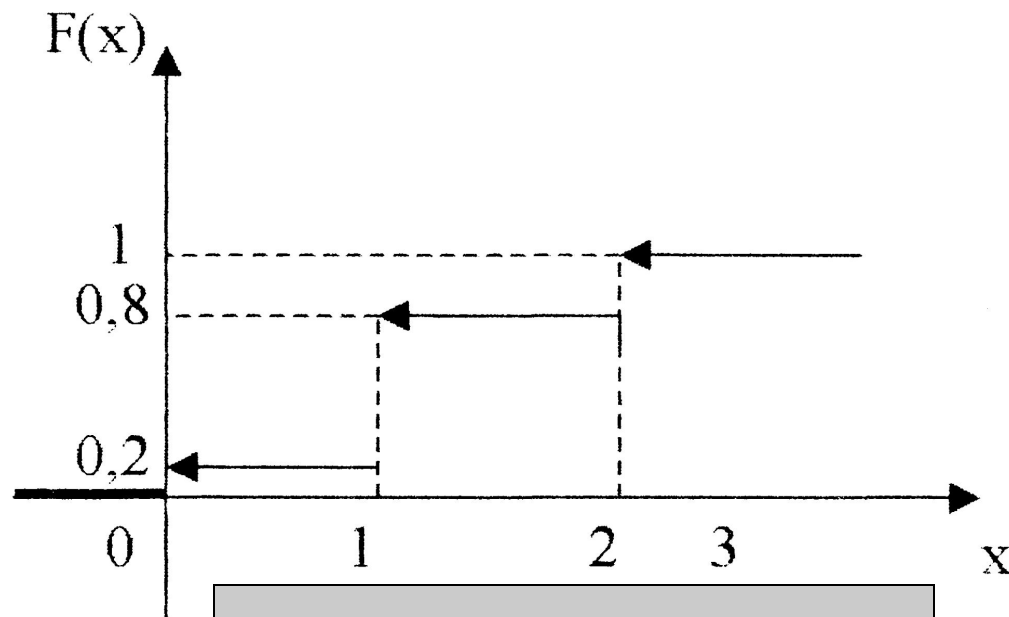
$F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,2 + 0,6 = 0,8$;

если $x \in (2; +\infty)$,

$F(x) = P(X < x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,2 + 0,6 + 0,2 = 1$.

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty; 0], \\ 0,2, & \text{если } x \in (0; 1], \\ 0,8, & \text{если } x \in (1; 2], \\ 1, & \text{если } x \in (2; +\infty). \end{cases}$$



Итак,

$$F(x) = \sum_{(x_i < x)} p_i$$

Зная $F(x)$, можно, например, найти $P(X=3)=0$, т.к. $x=3$ - точка непрерывности $F(x)$; или найти $P(X=1)=0,8-0,2=0,6$, т.к. $x=1$ - точка разрыва $F(x)$; или $P(-1 < X < 1,5) = F(1,5) - F(-1) = 0,8 - 0 = 0,8$. \square

Основные числовые характеристики случайной величины

Математическое ожидание случайной величины

Математическим ожиданием или средним значением **дискретной случайной** величины X называется число

$$MX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Замечание: Если **дискретная случайная** величина X имеет n возможных значений, то

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Простейшие свойства математического ожидания.

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной, т.е.

$$M(C)=C.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т.е.

$$M(CX)=C(MX).$$

□ **Пример .** Дано:

X	-3	-1	2	
P	0,2	0,5	0,3	

Найти $M[5X]$.

Решение.

$$M[5X]=5M[X], \text{ т.к. } M[X]=(-3) \cdot 0,2+(-1) \cdot 0,5+2 \cdot 0,3=-0,5,$$

$$\text{то } M[5X]=5 \cdot (-0,5)=-2,5. \square$$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины

Дисперсией случайной величины X называется число, характеризующее степень разброса возможных значений случайной величины относительно ее математического ожидания, обозначаемое DX и равное

$$DX = MX^2 - (MX)^2,$$

где $MX^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется число

$$\sigma = \sqrt{DX}$$

Среднее квадратическое отклонение σ также характеризует степень отклонения возможных значений случайной величины относительно ее математического ожидания MX .

Простейшие свойства дисперсии

Свойство 1. Дисперсия **постоянной** величины равна нулю.

$$D(C)=0$$

Свойство 2. **Постоянный множитель** можно выносить за знак дисперсии, возводя его при этом в квадрат, т.е.

$$D(CX)=C^2(DX).$$

□ **Пример** . Найти дисперсию случайной величины X , имеющей следующий закон распределения

X	-3	-1	2
p	0,2	0,5	0,3

□ **Пример** . Найти дисперсию случайной величины X , имеющей следующий закон распределения

X	-3	-1	2
p	0,2	0,5	0,3

Решение.

$$MX = (-3) \cdot 0,2 + (-1) \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,3 = -0,5;$$

$$MX^2 = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i = (-3)^2 \cdot 0,2 + (-1)^2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,3 = 3,5;$$

следовательно,

$$DX = 3,5 - (-0,5)^2 = 3,5 - 0,25 = 3,25, \quad \sigma \approx 1,80. \blacktriangleright$$