

# **Бином Ньютона. Треугольник Паскаля**



# Содержание

- Введение.....
  - Проанализируем формулы.....
  - Историческая справка.....
    - Бином Ньютона.....
    - Биномиальные коэффициенты.....
  - Практика.....
  - Треугольник Паскаля.....
  - Историческая справка.....
  - Вывод.....
  - Источники .....
- Самостоятельная работа**



# Введение

Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупница открытия. Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным и если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы.

Д. Поля

Во всем хочется дойти

До самой сути.

Б. Пастернак



Часто встречающимися формулами сокращённого умножения являются :

- квадрат суммы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

- квадрат разности

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

**а вот сумма  
квадратов не  
существует, а  
почему?**



Наряду с этими в учебнике встречаются упражнения, при выполнении которых необходимо знание формул

- куб суммы

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- куб разности

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$



◦ на четвёртую степень

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

◦ на пятую степень

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

◦ на шестую степень

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

◦ на седьмую степень

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$



Другие же степени (больше 7) были представлены в общем виде:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

где  $C_n^k$  - число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$  элементов.

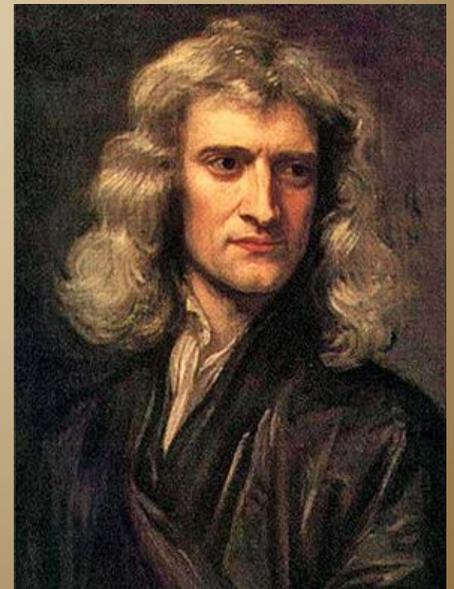
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Такая формула называется  
Бином Ньютона.**



# 3. Историческая справка.

Исаак Ньютон (или Ньютон) — английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета, заложил основы современной физической оптики, создал многие другие математические и физические теории.



# Биномиальные коэффициенты

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, C_n^4, C_n^5, C_n^6, \dots$  являются коэффициентами в формуле бинома Ньютона и называются биномиальными коэффициентами.

**Коэффициент** — числовой множитель при буквенном выражении, множитель при той или иной степени неизвестного, или постоянный множитель при переменной величине.

В общем виде биномиальные коэффициенты считаются по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Легко заметить, что степень первого числа уменьшается на единицу

$$a^n, a^{n-1}, a^{n-2} \dots a^1 = a, a^0 = 1$$

А степень второго числа наоборот увеличивается на единицу

$$b^0 = 1, b^1 = b, b^2, b^3 \dots b^n$$



□ Коэффициенты считаются по формуле  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,

где  $k$  изменяется от 0 до  $n$  с шагом 1.

**Фактори́ал** числа  $n$  — произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$  включительно.

Например:

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$11! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$$

По договорённости:  $0! = 1, C_n^n = 1$



Если  $n=2$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2b^0 + C_2^1 a^{2-1}b^{0+1} + C_2^2 a^{2-2}b^{1+1}$$

$$C_2^1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 2$$

$$C_2^2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 1$$

$$(a+b)^2 = a^2 \cdot 1 + 2a^1b^1 + 1 \cdot 1 \cdot b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3b^0 + C_3^1 a^2b^1 + C_3^2 a^1b^2 + C_3^3 a^0b^3$$

$$C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 3$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$$

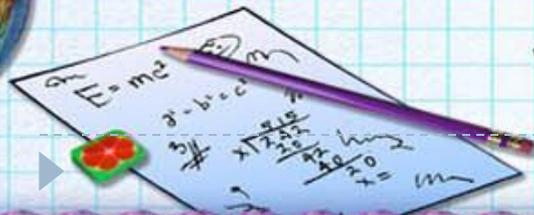
$$C_3^3 = 1$$

$$(a+b)^3 = a^3 \cdot 1 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1 \cdot 1 \cdot b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$\frac{a^2+b}{3}$

Если  $n=3$



+



=



$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 = a^4b^0 + C_4^1a^3b^1 + C_4^2a^2b^2 + C_4^3a^1b^3 + C_4^4a^0b^4$$

$$C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6$$

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4$$

$$C_4^4 = 1$$

$$(a+b)^4 = a^4 \cdot 1 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot 1 \cdot b^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^5 = a^5b^0 + C_5^1a^4b^1 + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4a^1b^4 + C_5^5a^0b^5$$

$$C_5^1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10$$

$$C_5^4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1} = 5$$

$$C_5^5 = 1$$

$$(a+b)^5 = a^5 \cdot 1 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot 1 \cdot b^5$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

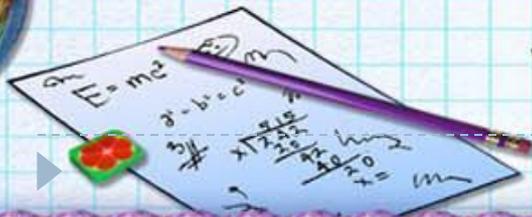
Если n=4

Если n=5

y<sup>2</sup>

$$\frac{a^2+b}{3}$$

2+



+



=



Если  $n=6$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^6 = a^6b^0 + C_6^1a^5b^1 + C_6^2a^4b^2 + C_6^3a^3b^3 + C_6^4a^2b^4 + C_6^5a^1b^5 + C_6^6a^0b^6$$

$$C_6^1 = \frac{6!}{1!(6-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 15$$

$$C_6^5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1} = 6$$

$$C_6^6 = 1$$

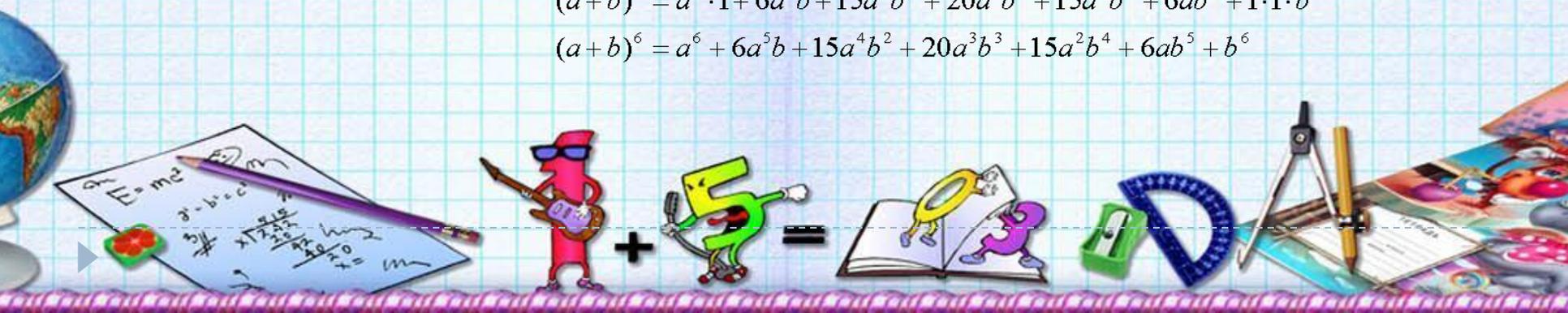
$$(a+b)^6 = a^6 \cdot 1 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1 \cdot 1 \cdot b^6$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$y^2$

$$\frac{a^2+b}{3}$$

2+



Если  $n=7$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(a+b)^7 = a^7b^0 + C_7^1a^6b^1 + C_7^2a^5b^2 + C_7^3a^4b^3 + C_7^4a^3b^4 + C_7^5a^2b^5 + C_7^6a^1b^6 + C_7^7a^0b^7$$

$$C_7^1 = \frac{7!}{1!(7-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7$$

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

$$C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} = 21$$

$$C_7^6 = \frac{7!}{6!(7-6)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1} = 7$$

$$C_7^7 = 1$$

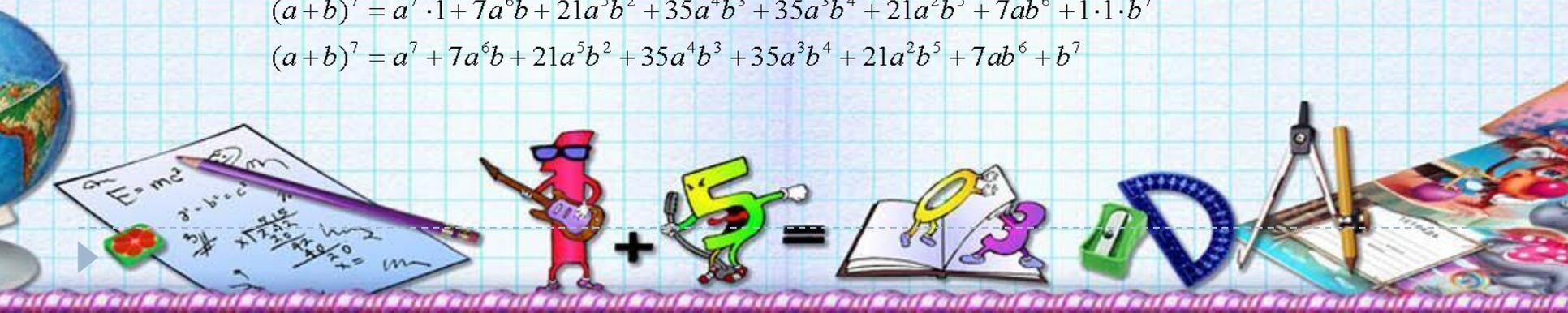
$$(a+b)^7 = a^7 \cdot 1 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + 1 \cdot 1 \cdot b^7$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$y^2$

$$\frac{a^2+b}{3}$$

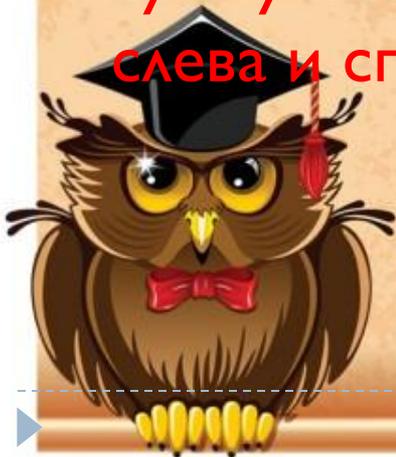
2+



□ Замечаем, что в правой части коэффициенты при каждом слагаемом совпадают с числами треугольника Паскаля. **«Треугольник Паскаля»** представляет собой набор строк, состоящий из чисел, сгруппированных по определенному закону таким образом, что получается фигура, напоминающая треугольник. Который можно получить, если слева и справа треугольник ограничен единицами, а каждое число, стоящее внутри него, представляет собой сумму чисел, стоящих над ним (в предыдущем ряду)

слева и справа:

$$4=1+3; \quad 6=3+3; \quad 4=3+1; \quad 5=1+4;$$
$$10=6+4; \quad 5=4+1.$$



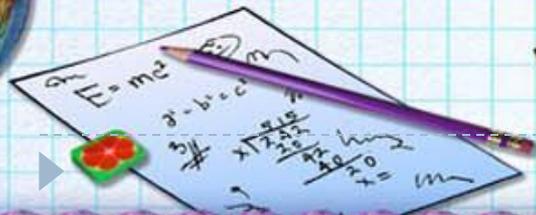
□ Подводя итог проделанной работы важно отметить, что биномиальные коэффициенты можно получить, пользуясь треугольником Паскаля. Впервые этот цифровой треугольник подробно описал французский математик Блез Паскаль в своем «Трактате об арифметическом треугольнике» (опубликован в 1665г.). С тех пор он так и называется – треугольник Паскаля.

**ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ-** так называют  
**треугольник биномиальных коэффициентов.**



$(a+b)^0 =$	1	=	1
$(a+b)^1 =$	1 1	=	$a+b$
$(a+b)^2 =$	1 2 1	=	$a^2 + 2ab + b^2$
$(a+b)^3 =$	1 3 3 1	=	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a+b)^4 =$	1 4 6 4 1	=	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^5 =$	1 5 10 10 5 1	=	$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
$(a+b)^6 =$	1 6 15 20 15 6 1	=	$a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$
$(a+b)^7 =$	1 7 21 35 35 21 7 1	=	$a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

$$\frac{a^2+b}{3}$$



+



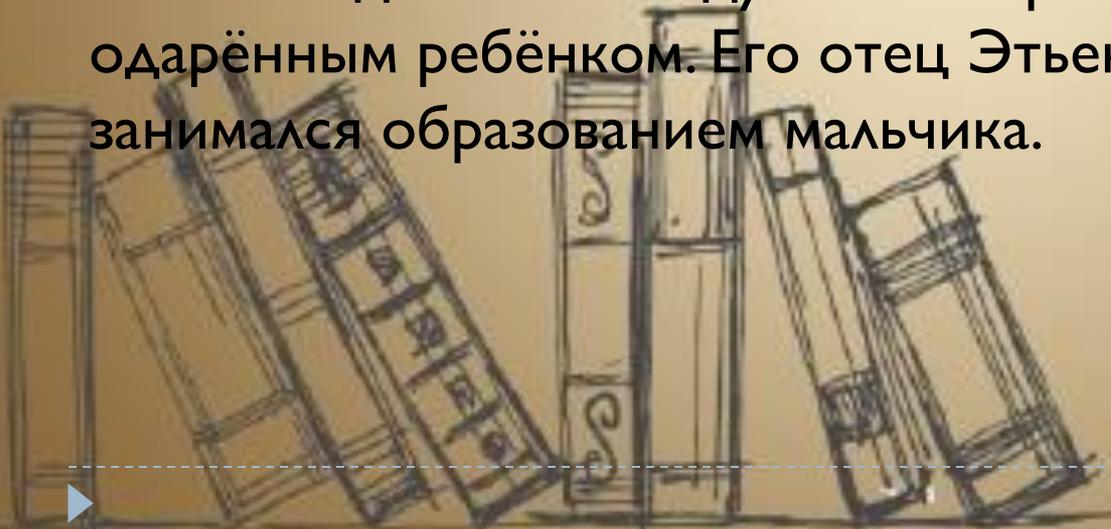
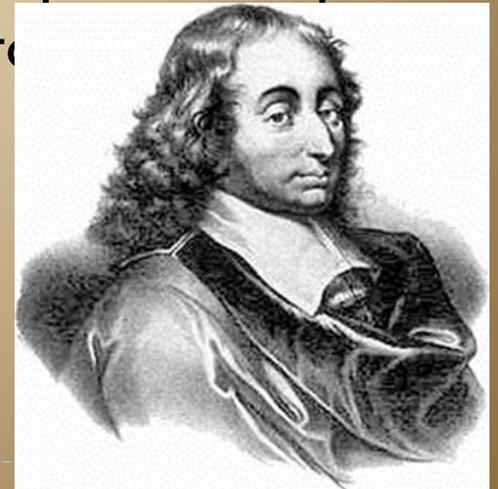
=



2x

# 3. Историческая справка.

Блез Паскаль 19 июня 1623, Клермон-Ферран, Франция — 19 августа 1662, Париж, Франция — французский математик, механик, физик, литератор и философ. Классик французской литературы, один из основателей математического анализа, теории вероятностей и проективной геометрии, создатель первых образцов счётной техники, автор основного закона гидростатики. Паскаль родился в городе Клермон-Ферран (французская провинция Овернь). Мать умерла, когда Блезу было 3 года. В 1631 году семья переехала в Париж. Блез рос одарённым ребёнком. Его отец Этьен самостоятельно занимался образованием мальчика.



# **Самостоятельная работа.**

## **Записать разложение**

### **бинома:**

$$\blacklozenge (x + 1)^8$$

$$\blacklozenge (a - 1)^9$$

$$\blacklozenge (y + 2)^6$$

$$\blacklozenge (2b + 3)^5$$

