Бином Ньютона.
Треугольник Паскаля

Содержание

Введение

Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия. Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным и если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы.

Д. Пойа

Во всем хочется дойти

До самой сути.

Б. Пастернак

Часто встречающимися формулами сокращённого умножения являются :

- квадрат суммы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

- квадрат разности

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

- разность квадратов

$$a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

а вот сумма квадратов не существует, а почему?

Наряду с этими в учебнике встречаются упражнения, при выполнении которых необходимо знание формул

- куб суммы

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

- куб разности

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

- на четвёртую степень

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

- на пятую степень

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

- на шестую степень

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

- на седьмую степень

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

Другие же степени (больше 7) были представлены в общем виде:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

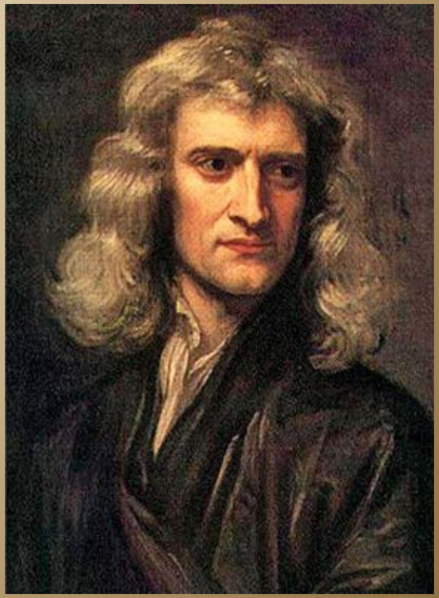
где C_n^k - число сочетаний из n элементов по k элементов.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Такая формула называется Бином Ньютона.

3. Историческая справка.

Исаак Ньютон (или Ньютон) — английский физик, математик, механик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию цвета, заложил основы современной физической оптики, создал многие другие математические и физические теории.



Биномиальные коэффициенты

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots\ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

$C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3\ C_n^4\ C_n^5\ C_n^6$ ….. являются коэффициентами в формуле бинома Ньютона и называются биномиальными коэффициентами.

Коэффицие́нт — числовой множитель при буквенном выражении, множитель при той или иной степени неизвестного, или постоянный множитель при переменной величине.

В общем виде биномиальные коэффициенты считаются по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Легко заметить, что степень первого числа уменьшается на единицу

$$a^n, a^{n-1}, a^{n-2} \ldots a^1 = a, a^0 = 1$$

А степень второго числа наоборот увеличивается на единицу

$$b^0 = 1, b^1 = b, b^2, b^3 \ldots b^n$$

- Коэффициенты считаются по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$,

где k изменяется от 0 до n с шагом 1. **Факториа́л** числа n— произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

Например:

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$

$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$

$11! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$

По договорённости: $0! = 1, C_n^n = 1$

Если n=2

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2b^0 + C_2^1a^{2-1}b^{0+1} + C_2^2a^{2-2}b^{1+1}$$

$$C_2^1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot 1} = 2$$

$$C_2^2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot 2} = 1$$

$$(a+b)^2 = a^2\cdot 1 + 2a^1b^1 + 1\cdot 1\cdot b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Если n=3

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3b^0 + C_3^1a^2b^1 + C_3^2a^1b^2 + C_3^3a^0b^3$$

$$C_3^1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 1\cdot 2} = 3$$

$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1} = 3$$

$$C_3^3 = 1$$

$$(a+b)^3 = a^3\cdot 1 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1\cdot 1\cdot b^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Если n=4

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a+b)^4=a^4b^0+C_4^1a^3b^1+C_4^2a^2b^2+C_4^3a^1b^3+C_4^4a^0b^4$$

$$C_4^1=\frac{4!}{1!(4-1)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot1\cdot2\cdot3}=4$$

$$C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot1\cdot2}=6$$

$$C_4^3=\frac{4!}{3!(4-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot1}=4$$

$$C_4^4=1$$

$$(a+b)^4=a^4\cdot1+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1\cdot1\cdot b^4$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Если n=5

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

$$(a+b)^5=a^5b^0+C_5^1a^4b^1+C_5^2a^3b^2+C_5^3a^2b^3+C_5^4a^1b^4+C_5^5a^0b^5$$

$$C_5^1=\frac{5!}{1!(5-1)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4}=5$$

$$C_5^2=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=10$$

$$C_5^3=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}=10$$

$$C_5^4=\frac{5!}{4!(5-4)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1}=5$$

$$C_5^5=1$$

$$(a+b)^5=a^5\cdot1+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1\cdot1\cdot b^5$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

Если n=6

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^6 = a^6b^0 + C_6^1a^5b^1 + C_6^2a^4b^2 + C_6^3a^3b^3 + C_6^4a^2b^4 + C_6^5a^1b^5 + C_6^6a^0b^6$$

$$C_6^1 = \frac{6!}{1!(6-1)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 6$$

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 15$$

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3} = 20$$

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2} = 15$$

$$C_6^5 = \frac{6!}{5!(6-5)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1} = 6$$

$$C_6^6 = 1$$

$$(a+b)^6 = a^6\cdot1 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1\cdot1\cdot b^6$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Если n=7

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

$$(a+b)^7 = a^7b^0 + C_7^1a^6b^1 + C_7^2a^5b^2 + C_7^3a^4b^3 + C_7^4a^3b^4 + C_7^5a^2b^5 + C_7^6a^1b^6 + C_7^7a^0b^7$$

$$C_7^1 = \frac{7!}{1!(7-1)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 7$$

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 21$$

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 35$$

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3} = 35$$

$$C_7^5 = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2} = 21$$

$$C_7^6 = \frac{7!}{6!(7-6)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot1} = 7$$

$$C_7^7 = 1$$

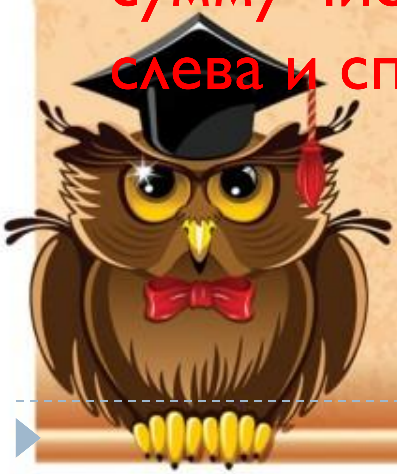
$$(a+b)^7 = a^7\cdot1 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + 1\cdot1\cdot b^7$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$

- Замечаем, что в правой части коэффициенты при каждом слагаемом совпадают с числами треугольника Паскаля. **«Треугольник Паскаля»** представляет собой набор строк, состоящий из чисел, сгруппированных по определенному закону таким образом, что получается фигура, напоминающая треугольник. Который можно получить, если слева и справа треугольник ограничен единицами, а каждое число, стоящее внутри него, представляет собой сумму чисел, стоящих над ним (в предыдущем ряду) слева и справа:

$4=1+3$; $6=3+3$; $4=3+1$; $5=1+4$;

$10=6+4$; $5=4+1$.



- Подводя итог проделанной работы важно отметить, что биномиальные коэффициенты можно получить, пользуясь треугольником Паскаля. Впервые этот цифровой треугольник подробно описал французский математик Блез Паскаль в своем «Трактате об арифметическом треугольнике» (опубликован в 1665г.). С тех пор он так и называется – треугольник Паскаля.

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ- так называют треугольник биномиальных коэффициентов.

$(a+b)^0 =$	1	$= 1$
$(a+b)^1 =$	1 1	$= a+b$
$(a+b)^2 =$	1 **2** 1	$= a^2+2ab+b^2$
$(a+b)^3 =$	1 **3** **3** 1	$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a+b)^4 =$	1 **4** **6** **4** 1	$= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$(a+b)^5 =$	1 **5** **10** **10** **5** 1	$= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
$(a+b)^6 =$	1 **6** **15** **20** **15** **6** 1	$= a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
$(a+b)^7 =$	1 **7** **21** **35** **35** **21** **7** 1	$= a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

3. Историческая справка.

Блез Паска́ль 19 июня 1623, Клермон-Ферран, Франция — 19 августа 1662, Париж, Франция — французский математик, механик, физик, литератор и философ. Классик французской литературы, один из основателей математического анализа, теории вероятностей и проективной геометрии, создатель первых образцов счётной техники, автор основного закона гидростатики. Паскаль родился в городе Клермон-Ферран (французская провинция Овернь). Мать умерла, когда Блезу было 3 года. В 1631 году семья переехала в Париж. Блез рос одарённым ребёнком. Его отец Этьен самосто

занимался образованием мальчика.

Самостоятельная работа. Записать разложение бинома:

- $(x+1)^8$
- $(a-1)^9$
- $(y+2)^6$
- $(2b+3)^5$