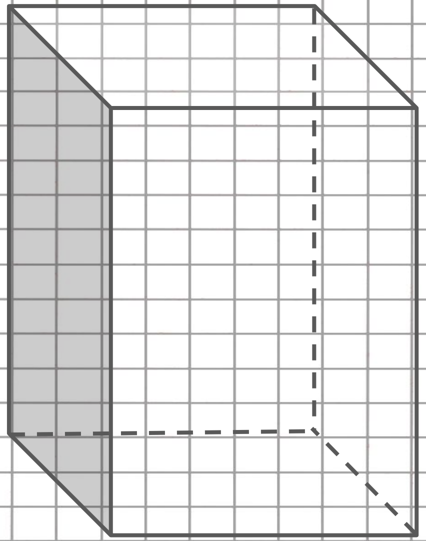
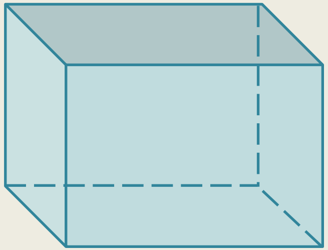
прямоугольный параллелепипед

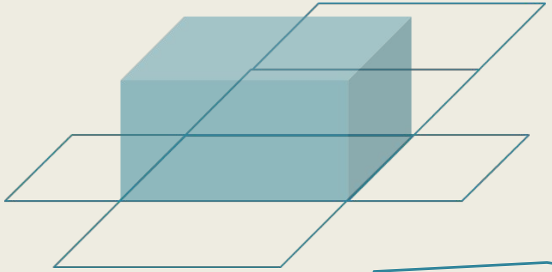


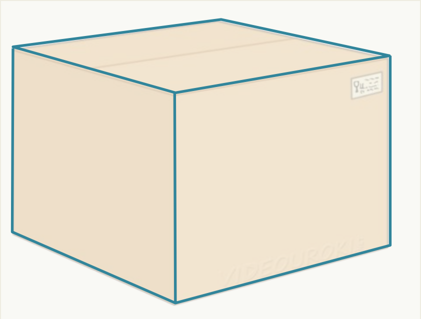
✔ вспомним некоторые из его свойств

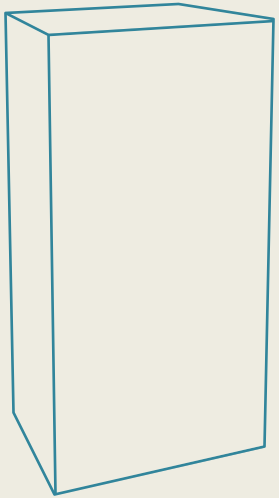
✔ выведем формулы для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда

Параллелепипед называется ***прямоугольным***, если все его шесть граней прямоугольники.

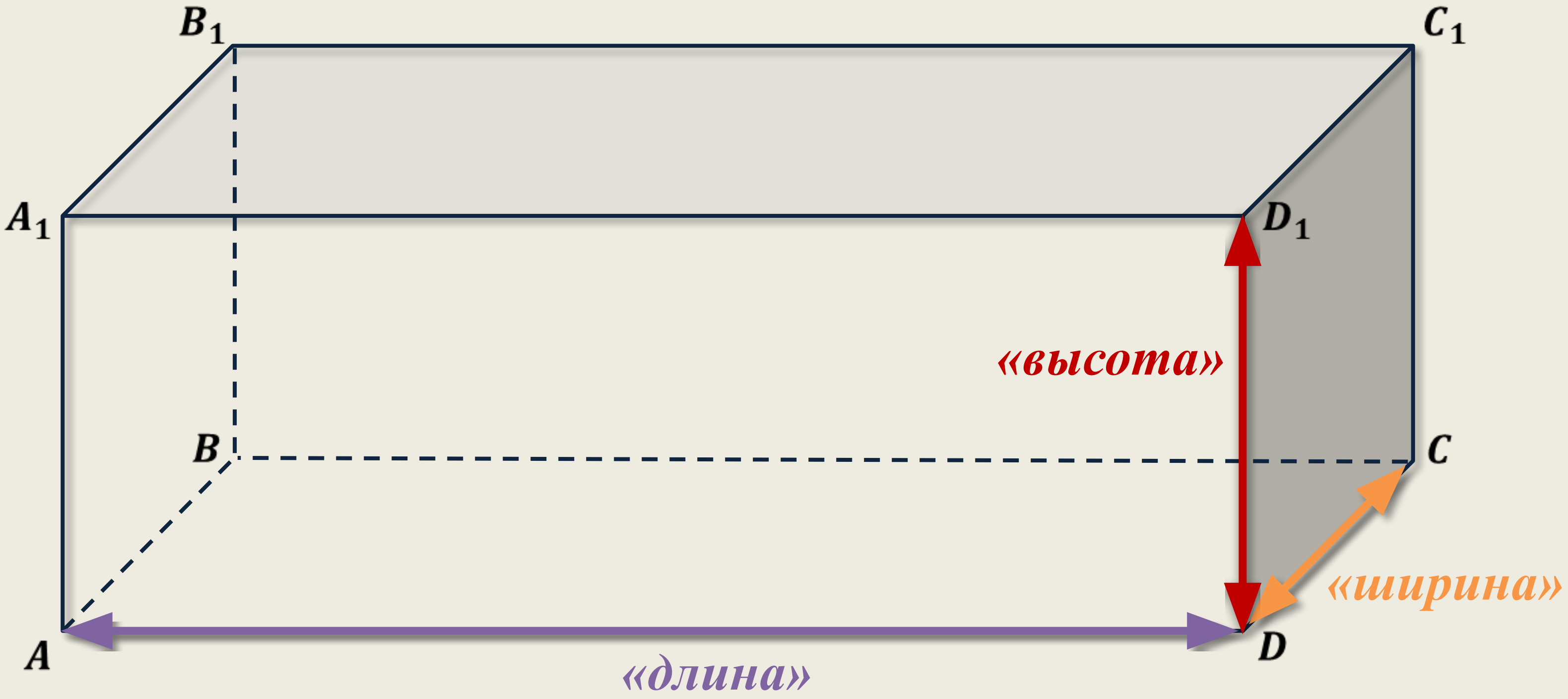








В геометрии эти три величины объединяются общим названием: измерения прямоугольного параллелепипеда.



DA – длина

DC – ширина

DD_1 – высота

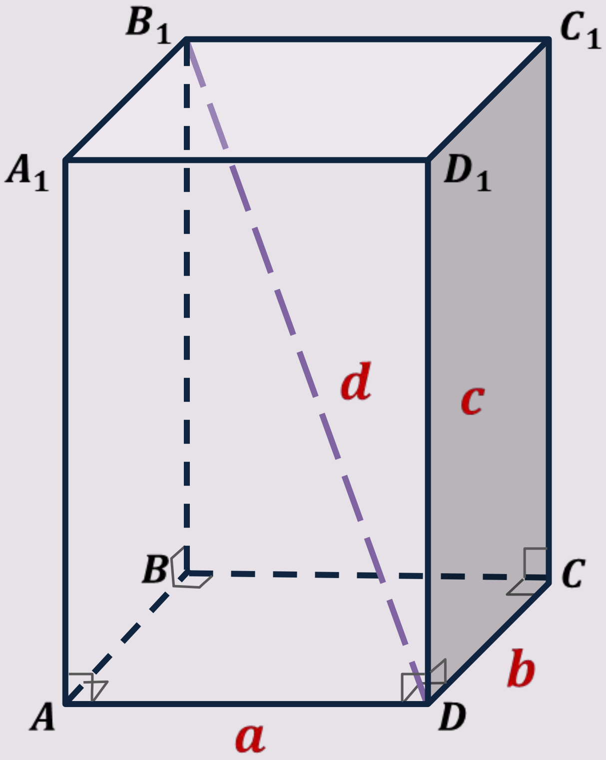
Свойства прямоугольного параллелепипеда:

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

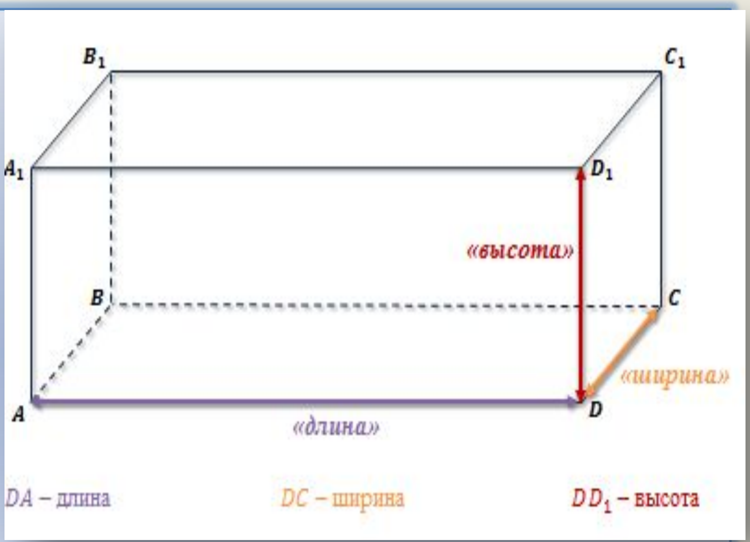
Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

$$V = a \cdot b \cdot c$$



Площадь полной и боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда

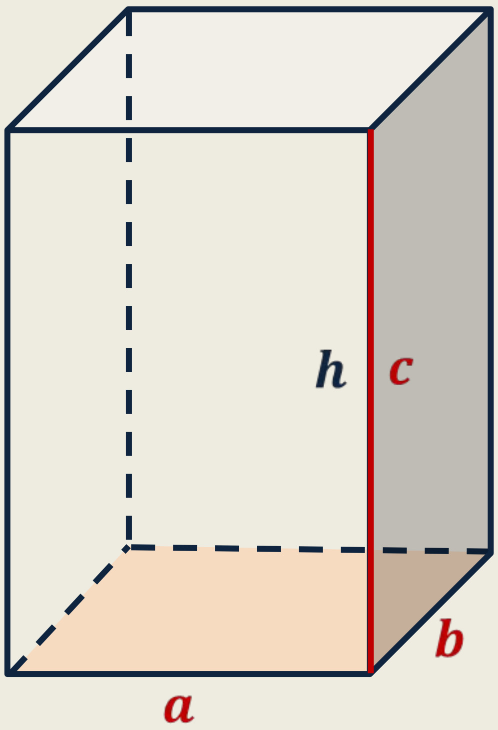
- $S_{бок} = P_{осн} \cdot H = 2 \cdot (DC + AD) \cdot \mathrm{D}D_1$
- $S_{п.п} = S_{бок} + 2\, S_{осн}$
- $S_{п.п} = P_{осн} \cdot H + 2(\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DC})$
- Если все AD = DC= $\mathrm{D}D_1 = \mathrm{a}$ - то
- данный параллелепипед – куб
- $S_{бок} = 4\mathrm{a} \cdot \mathrm{a} = 4\mathrm{a}^2$
- $S_{пол} = 4\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{a}^2 = 6\mathrm{a}^2$



Следствие. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

Доказательство.

Пусть грань с ребрами a и b – основание прямоугольного параллелепипеда.



$$S_{\text{осн}} = a \cdot b$$

$$h = c$$

$V = a \cdot b \cdot c = S_{\text{осн}} \cdot h$, где $S_{\text{осн}}$ – площадь основания,

h – высота прямоугольного параллелепипеда.

$$\boxed{V = S_{\text{осн}} \cdot h}$$

Рассмотрим куб со стороной a Рассмотрим еще раз формулы для вычисления площади поверхности и объема куба.

$$S_{бок} = 4a \cdot a = 4a^2$$

площадь боковой поверхности

$$S_{пол} = 4a^2 + 2a^2 = 6a^2$$

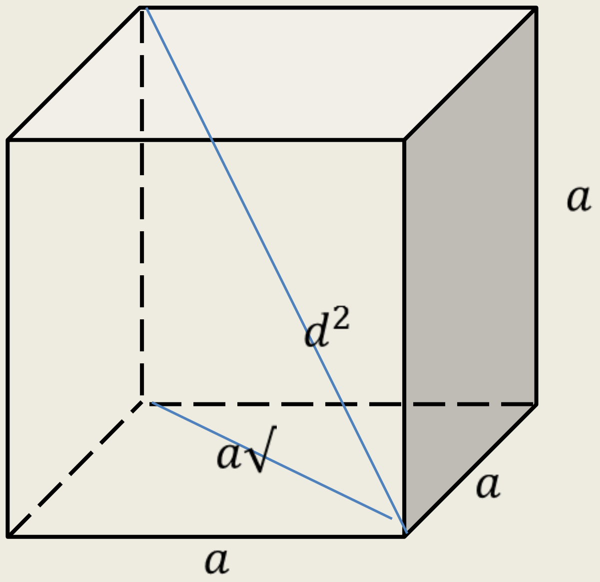
площадь полной поверхности

$$V = a^3$$

объем куба

$$d^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + a^2 = 3a^2$$

диагональ куба

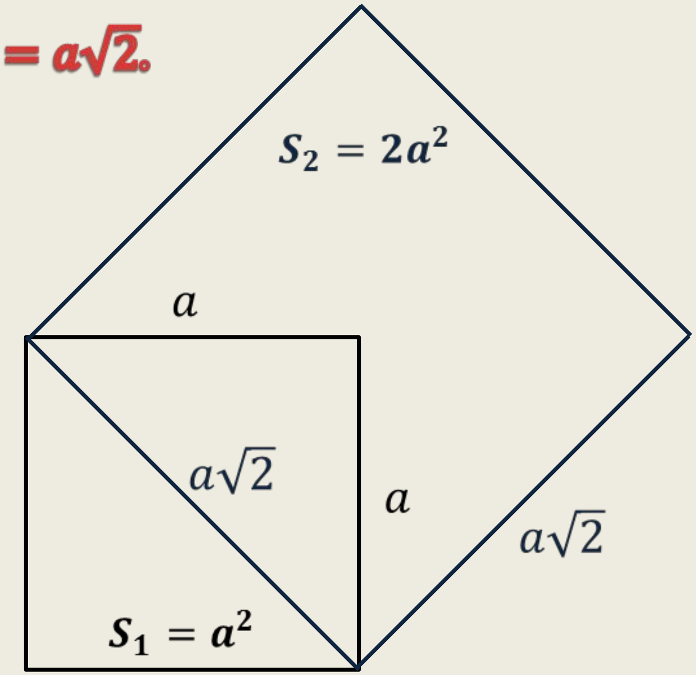


Дополнение

Рассмотрим квадрат со стороной- a и диагональю - d

Из теоремы Пифагора доказано, что диагональ $d = a\sqrt{2}$.

А сторона квадрата $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$



Задача 1. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с диагональю 13 см и сторонами основания 4 см и 3 см.

Решение.

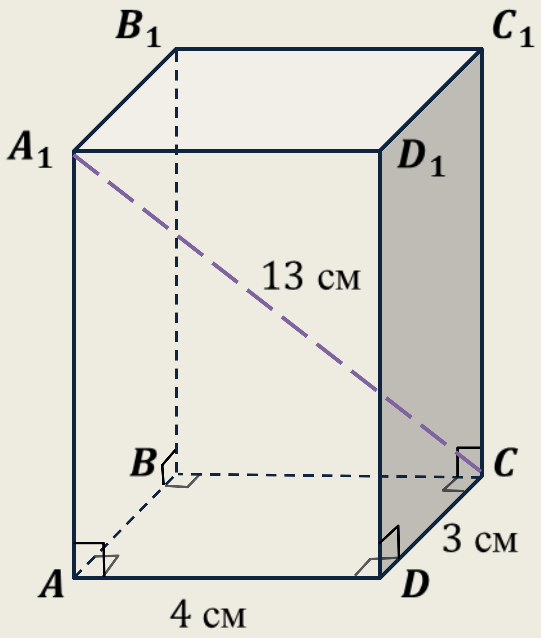
$$\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot c}$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{d^2 - a^2 - b^2}$$

$$c = \sqrt{13^2 - 4^2 - 3^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}$$

$$V = 4 \cdot 3 \cdot 12 = 144 \text{ (см}^3\text{)}$$



Ответ: 144 см^3.

Задача 1. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с диагональю $5\sqrt{3}$ см и сторонами $\sqrt{34}$ см и 4

Решение.

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

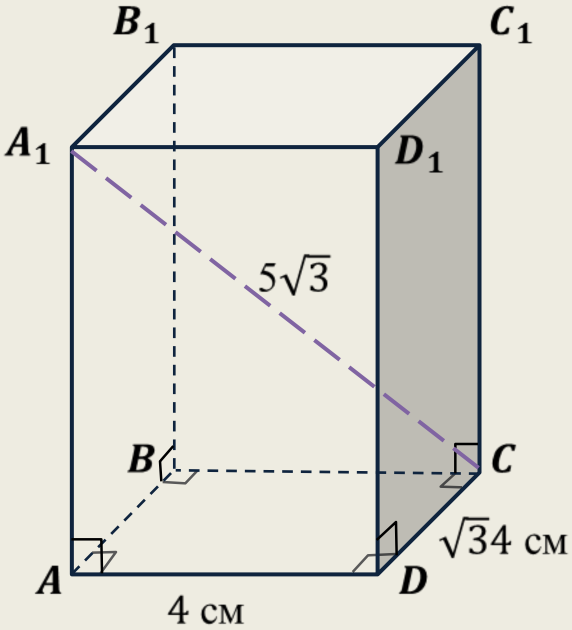
$$c = \sqrt{d^2 - a^2 - b^2}$$

основания 4 см и $\sqrt{34}$ см.

$$c = \sqrt{5\sqrt{3}^2 - 4^2 - \sqrt{34}^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}$$

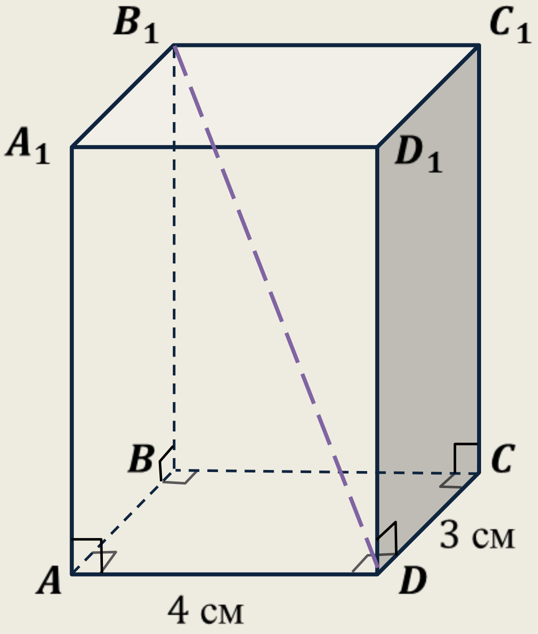
$$V = 4 \cdot \sqrt{34} \cdot 5 = 20\sqrt{34} \text{(см}^3\text{)}$$

Ответ: $20\sqrt{34}$см^3.



Задача 2. Найдите площадь боковой и полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с диагональю 13 см и сторонами основания 4 см и 3 см.

$S_{бок} = 2 \cdot (DC + AD) \cdot \mathrm{BB_1}$
$S_{п.п} = S_{бок} + 2\ S_{осн}$
$S_{п.п} = P_{осн} \cdot H + 2(\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DC})$
$S_{бок} = 2 \cdot (3 + 4) \cdot \mathrm{BB_1}$ неизвестно
$S_{п.п} = S_{бок} + 2\ S_{осн}$
$S_{п.п} = P_{осн} \cdot H + 2(\mathrm{AD} \cdot \mathrm{DC})$
Найдем высоту параллелепипеда $\mathrm{BB_1}$ из прямоугольного
треугольника B_1DB пол теореме Пифагора
$B_1D^2 = B_1B^2 + DB^2$
$13^2 = B_1B^2 + 5^{\ 2}$ (BD =5 нашли по теореме Пифагора)
$B_1B^2 =$ 169- 25= 144, тогда высота $\mathrm{BB_1} = 5$
$S_{бок} = 2 \cdot (4 + 3) \cdot 5 = 70 см^2$
$S_{п.п} = S_{бок} + 2\ S_{осн} = 70 + 2(3*4) = 94\ см^2$



Задача 3. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда с диагональ боковой грани, которого равна 5 см и стороны основания 7 см и 3 см.

Решение :

Формула объема показывает ,что для вычисления необходимо знать площадь основания и высоту параллелепипеда.

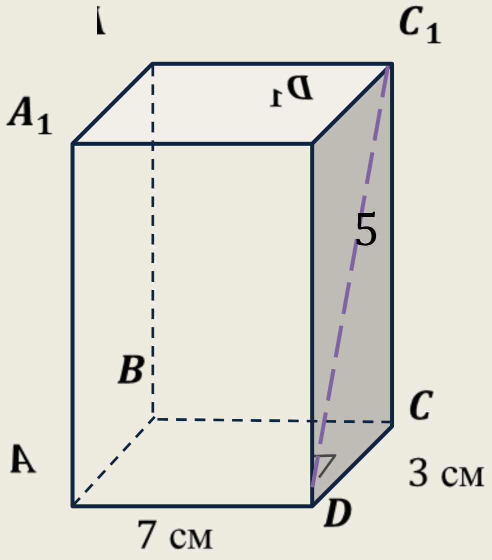
В основании лежит прямоугольник и его площадь 21см^2

Высоту найдем по теореме Пифагора из прямоугольного

Треугольника C_1CD

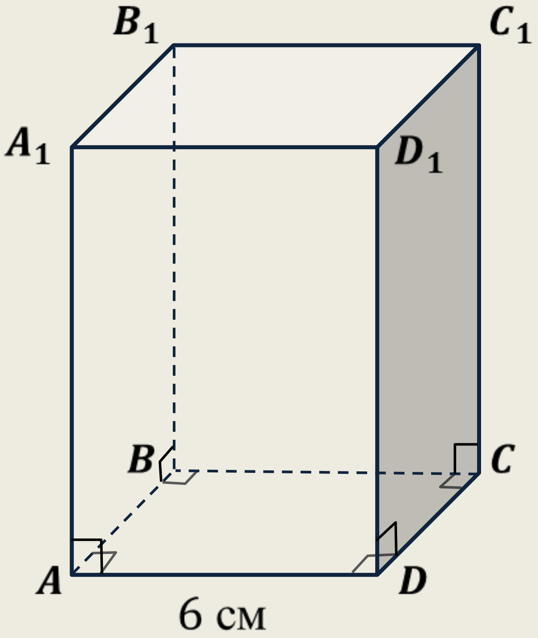
$C_1C = \sqrt{25-9}$ =4, тогда

V = abc = 7·3·4 = 84 см^3



Задача 4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ прямоугольный параллелепипед, основание $ABCD$ – квадрат. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 396 см³. Определите высоту прямоугольного параллелепипеда, если $AD = 6$ см.

Решение.



$$\boldsymbol{V = S_{\text{осн}} \cdot h}$$

$$h = \frac{V}{S_{\text{осн}}}$$

Т.к. $ABCD$ – квадрат, то $S_{\text{осн}} = AD^2 = 6^2 = 36$ (см²).

$$V = 396 \text{ см}^3$$

$$h = \frac{396}{36} = 11 \text{ (см)}$$

Ответ: 11 см.

Задача 5. Полная поверхности куба 24 см^2.   Найти диагональ куба

- Диагональ куба $d^2 = (a\sqrt{2})^2 + a^2 = 3a^2$ следовательно ,зная сторону куба можно найти диагональ куба. Найдем сторону из формулы полной поверхности.

$S_{пол} = 6a^2$

$24 = 6a^2$

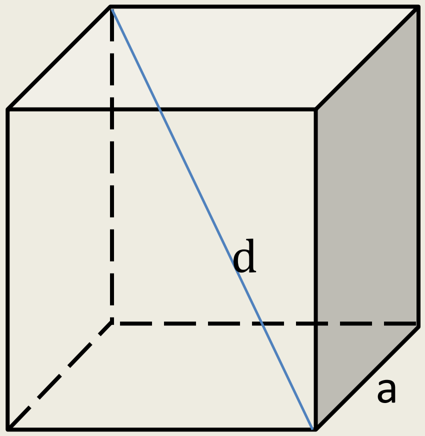
$a^2 = 4$

a= 2 - сторона куба

$d^2 = 3a^2$

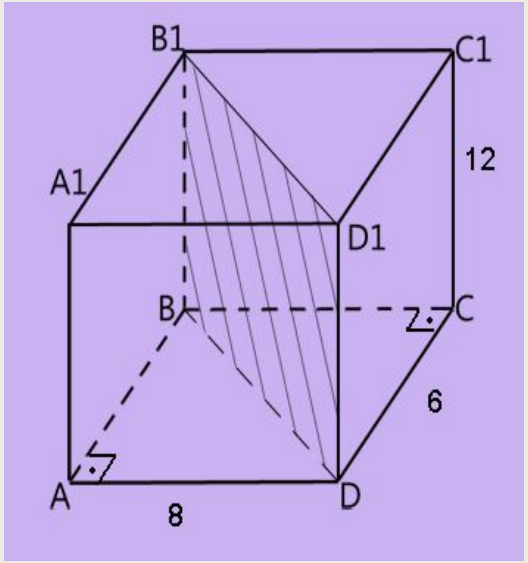
$d^2 = 12$

$d = 2\sqrt{3}$ см



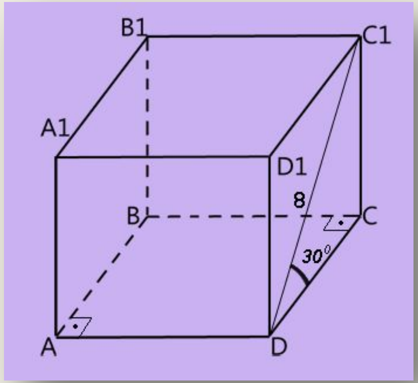
Задача 6 Найти площадь диагонального сечения прямоугольного параллелепипеда, высота которого 12, а стороны основания 6 и 8.

Рассмотрим прямоугольник ABCD
и найдем диагональ BD по теореме Пифагора
$BD^2 = DC^2 + BC^2$
$BD^2 = 8^2 + 6^2 = 100$
$BD^2 = 10$
$S_{BDD_1B_1} = 10 \cdot 12 = 120$ см^2



Задача 7. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат. Диагональ боковой грани равна $DC_1 = 8$ и образует с плоскостью основания угол 30^0. Найти площадь боковой поверхности, полной поверхности, диагональ параллелепипеда CA_1 и объем.

Решение



$S_{бок} = 2 \cdot (DC + AD) \cdot CC_1$, но DC=AD т.к основание квадрат.

$CC_1 = 4$ катет прямоугольного треугольника

DCC_1 , лежащий против угла в 30°. Основание квадрата DC найдем

по т. Пифагора DC= $\sqrt{64-16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$S_{бок} = 2 \cdot (DC + AD) \cdot CC_1 = 4 \cdot DC \cdot CC_1 = 4 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 64\sqrt{3}$ ед^2

$S_{п.п} = S_{бок} + 2\, S_{осн} = 64\sqrt{3} + 2\left(4\sqrt{3}\right)^2 = 64\sqrt{3} + 96 = 32\left(2\sqrt{3}+3\right)$ ед^2

$d^2 = (CA_1)^2 = (CC_1)^2 + (CB)^2 + (CD)^2$

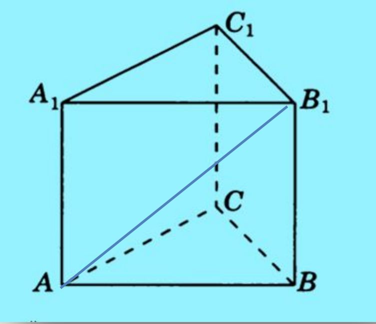
$d^2 = (CA_1)^2 = (4)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2 = 112$ед^2

V=$CC_1 \cdot CB \cdot CD$

V = $4 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 192$ ед^3

Задача № 8

Основание прямой треугольной призмы равносторонний треугольник со стороной 12. Диагональ AB_1 =15. Найти площадь поверхности и объем призмы



$S_{п.п} = S_{бок} + 2\,S_{осн} = P_{осн} \cdot H + 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ H= BB_1

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ - это формула вычисления площади правильного треугольника

Найдем высоту призмы по т. Пифагора из прямоугольного

$\Delta\ ABB_1$: $AB_1{}^2 = AB^2 + BB_1{}^2$

$15^2 = 12^2 + BB_1{}^2$

$BB_1 = 9$

$S_{п.п} = 3 \cdot 12 \cdot 9 + 2 \cdot \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = (324 + 72\sqrt{3})$ ед^2

$V = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} \cdot 9 = 324\sqrt{3}$ ед^3

ПРОВЕРЬ СЕБЯ

В прямой треугольной призме стороны основания 3,4,5, высота 6. Найти площадь боковой и площадь полной поверхности и объем

Решение

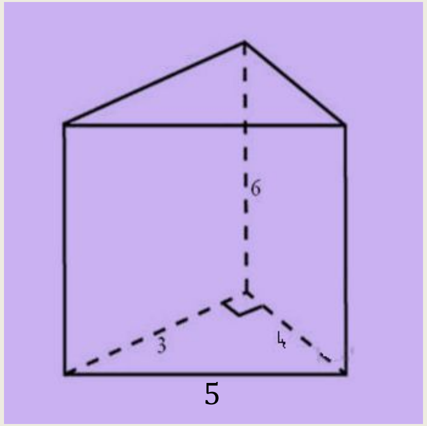
- В этой задаче ,для того , чтобы ответить на вопрос задачи воспользуйся формулами с предыдущего слайда. Посмотри , что тебе нужно вычислить периметр основания для площади боковой поверхности и площадь основания для полной поверхности. Про периметр не буду говорить ,а площадь прямоугольного треугольника – это половина произведения катетов. Все остальное делаешь самостоятельно.

Проверь свой ответ с ответом в задаче

$S_{б.п} = 72см^2$

$S_{п.п} = 72+12=84см^2$

$V = 36см^3$



ПРОВЕРЬ СЕБЯ

Площадь поверхности куба со стороной а равна 294. Найти объем куба и диагональ куба.

- Подсказка
- Посмотри формулы диагонали куба и объема

•Куба на слайде

•(для ленивых $V = a^3$ объем куба $d^2 = 3a^2$ диагональ куба)

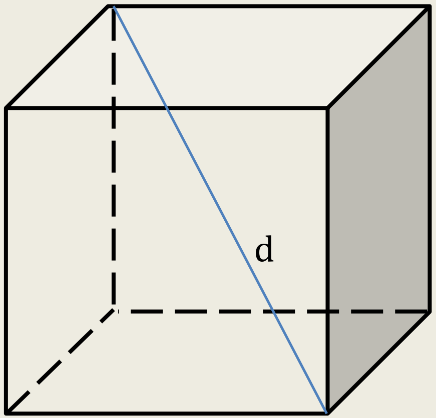
через площадь поверхности найди сторону куба ,

а затем ,а затем вычисли объем и диагональ.

Проверь ответ :

$V = 343$

d= $7\sqrt{3}$



Задача 8

Диагональ правильной четырехугольной призмы $\sqrt{34}$, диагональ боковой грани 5.
Найти: полную поверхность

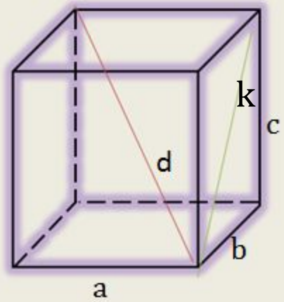
$d^2 = a^2 + a^2 + c^2$

$k^2 = a^2 + c^2$ вычислим а, то вычислим -с по т. Пифагора

$(\sqrt{34})^2 = a^2 + 5^2$

$34 = a^2 + 25$ тогда $a^2 = 9$ и $a = 3$ тогда $c = 4$ (высота параллелепипеда)

$S_{\text{п.п}} = S_{\text{бок}} + 2\,S_{\text{осн}} = \text{P}_{\text{осн}}\text{H} + 2S_{\text{осн}} = 4 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 = 66\text{ед}^2$



Ответ : 66 ед^2

Самостоятельное решение

Задача № 1

Диагональ правильной четырехугольной призмы $2\sqrt{34}$, диагональ боковой грани 10. Найти полную поверхность.

Ответ : 264

Задача № 2

В основании прямоугольного параллелепипеда лежит прямоугольник со сторонами 3 и 4. Диагональ параллелепипеда 8. Найти площадь полной поверхности и объем. Ответ: $S = (14\sqrt{39} + 24)\text{см}^2$ $V = 12\sqrt{39}\ \text{см}^3$

Задача № 3

Диагональным сечением правильной четырехугольной призмы является квадрат, площадь которого равен 144 квадратных сантиметров. Найдите объем призмы. Ответ: $864\ \text{см}^3$ (подсказка- слайд 10)

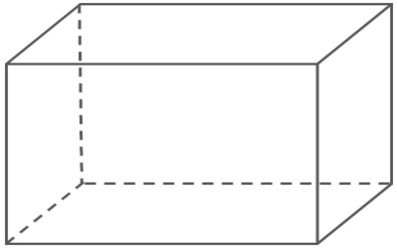
Задача № 4

Площадь полной поверхности куба равна 24 см2. Найдите его объем. Ответ : $8\ \text{см}^3$

Задача № 5

Основание прямой треугольной призмы равносторонний треугольник со стороной 10. Диагональ боковой грани равна 26. Найти площадь поверхности и объем призмы $S_{\text{п.п}} = (720+50\sqrt{3})\ \text{ед}^2$ $V = 600\sqrt{3}\ \text{ед}^3$

ЕЩЕ РАЗ ПОВТОРИ !!! Объем прямоугольного параллелепипеда



Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

$$\boxed{V = S_{\text{осн}} \cdot h}$$

Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

$$\boxed{V = S_{\text{осн}} \cdot h}$$