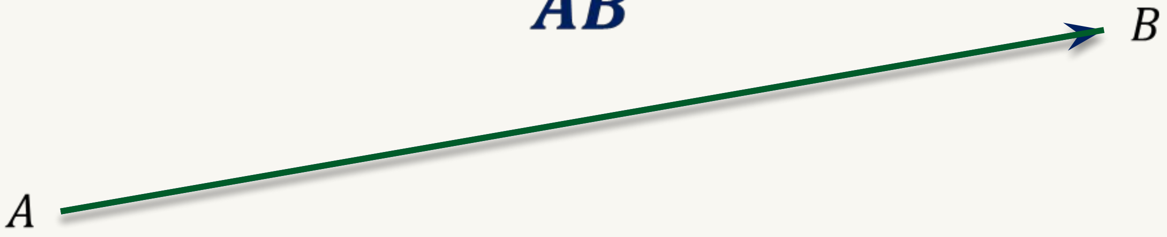
Простейшие задачи в координатах

$$\overrightarrow{AB}$$

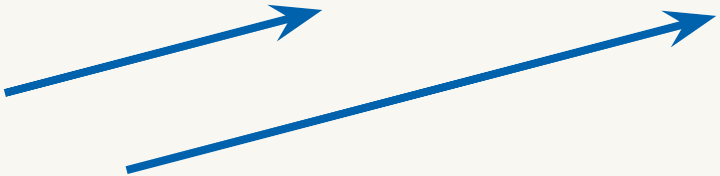


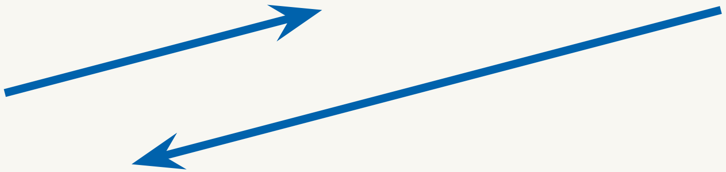
$$\boxed{\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB}$$

Ненулевые векторы называются **коллинеарными**,
если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

сонаправленные $\uparrow\uparrow$

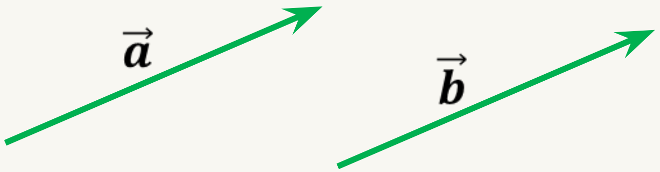
противоположно направленные $\uparrow\downarrow$





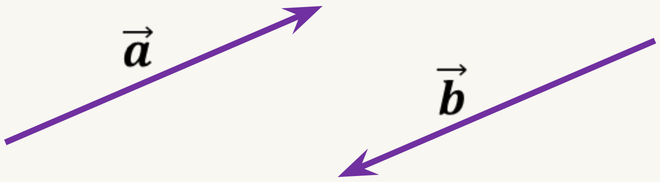
Равные векторы $\vec{a} = \vec{b}$

1. $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$



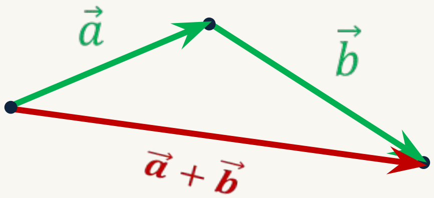
Противоположные векторы

1. $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$
2. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

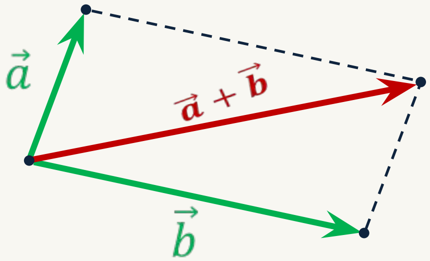


Сумма векторов

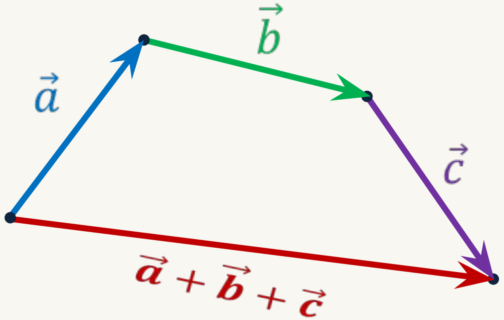
Правило *треугольника*



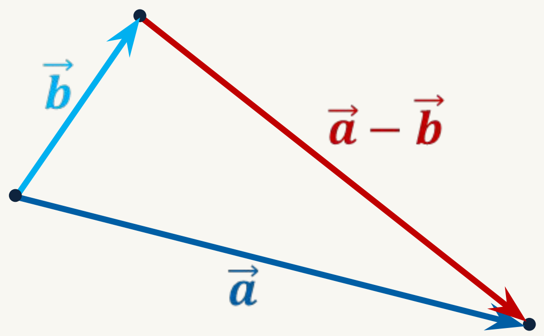
Правило *параллелограмма*



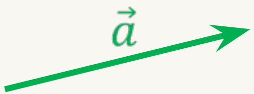
Правило *многоугольника*



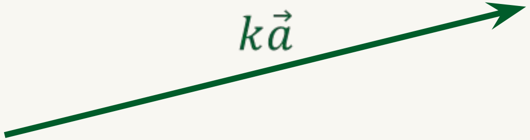
Разность векторов



Произведение вектора на число

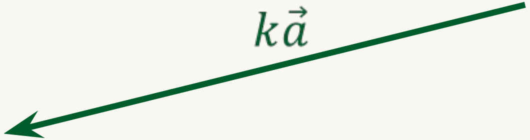


$k > 0$

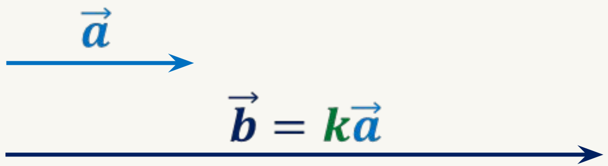


$$|k\vec{a}| = k|\vec{a}|$$

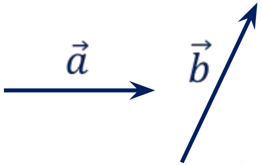
$k < 0$

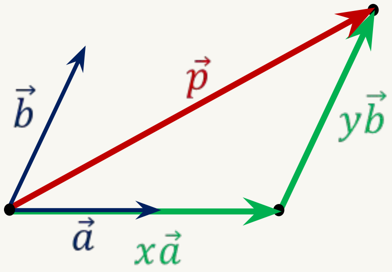


Лемма. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число k, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

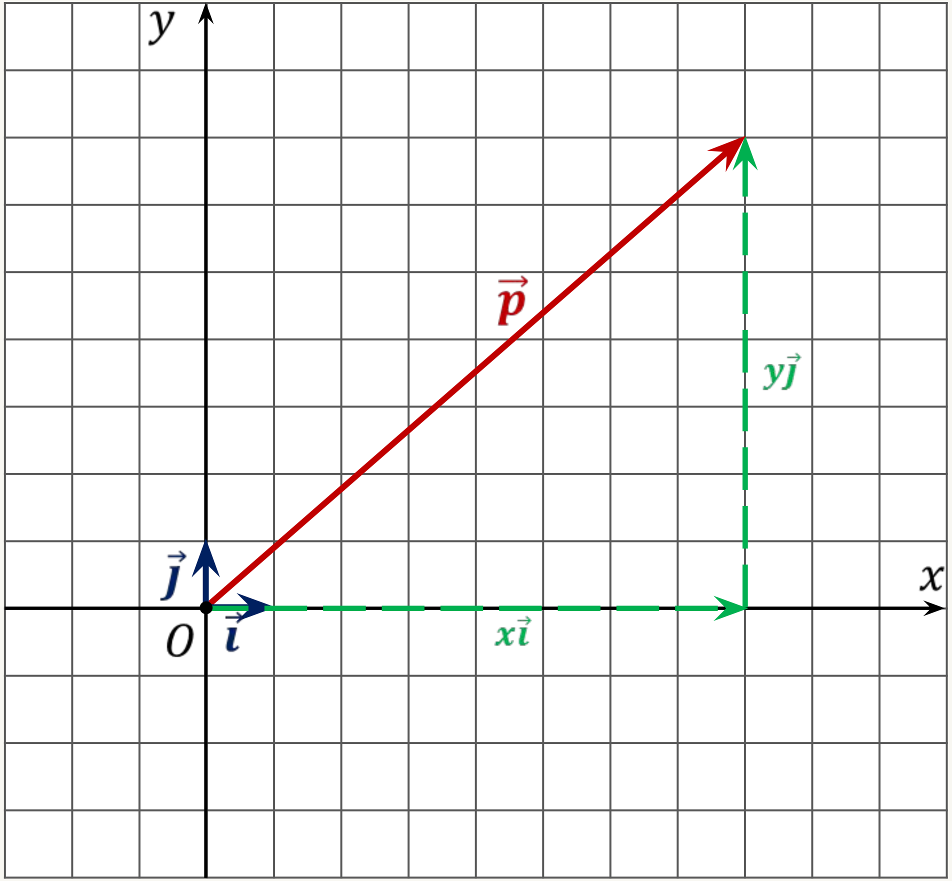


Теорема. На плоскости <u>любой вектор</u> можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.





$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$



$|\vec{i}| = 1, |\vec{j}| = 1$

единичные векторы

$\vec{i}, \vec{j}$ – координатные векторы

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

x, y –*координаты* вектора $\vec{p}$

$\vec{p}\,\{x; y\}$

Правила нахождения координат

суммы векторов

$\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ $\quad$ $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$

$\vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2;\ y_1+y_2\}$

Каждая координата суммы двух и более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов.

разности векторов

$\vec{a}\{x_1;\ y_1\}$ $\quad$ $\vec{b}\{x_2;\ y_2\}$

$\vec{a}-\vec{b}\{x_1-x_2;\ y_1-y_2\}$

Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат данных векторов.

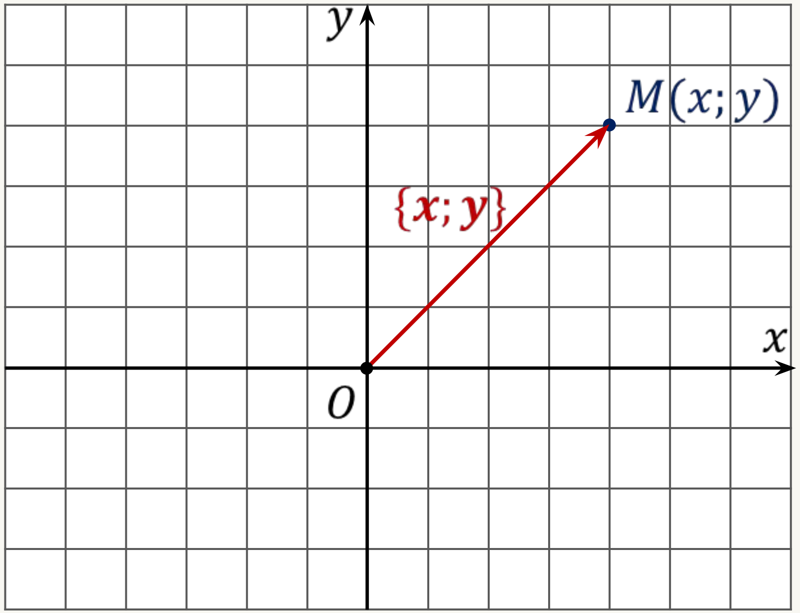
произведения вектора на число

$\vec{a}\{x_1;\ y_1\}, k$

$k\vec{a}\{kx_1;\ ky_1\}$

Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число.

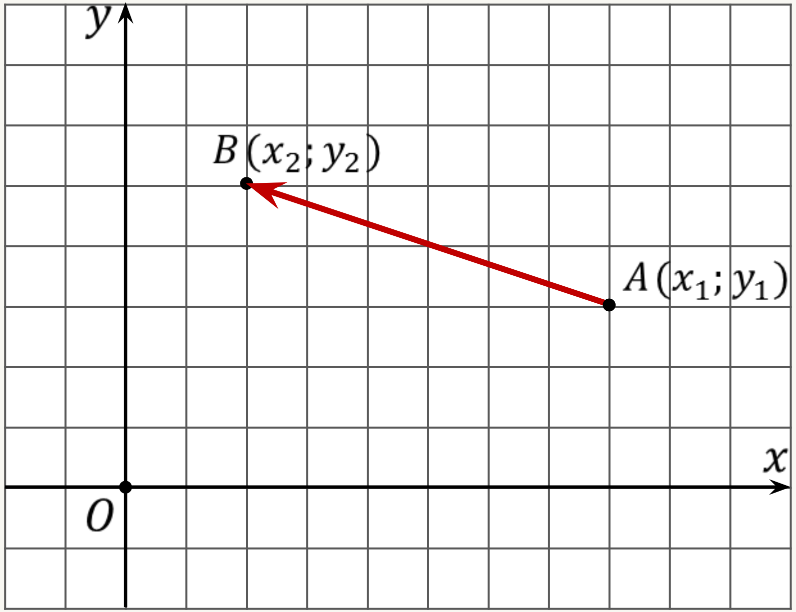
Позволяют определять координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов с известными координатами.



$\overrightarrow{OM}$

радиус-вектор точки M

Координаты точки М равны соответствующим координатам её радиус-вектора.



$\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$

Каждая координата вектора равна
разности соответствующих координат его конца и начала.

координаты вектора

действия над векторами

понятие вектора

Задача. $ABCD$ — параллелограмм.
Найти координаты точки C, если $A(-8; -3)$, $B(-4; 5)$, $D(6; -3)$.

Решение.

<u>1 способ</u>

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}\,\{4; 8\}$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AD}\,\{14; 0\}$

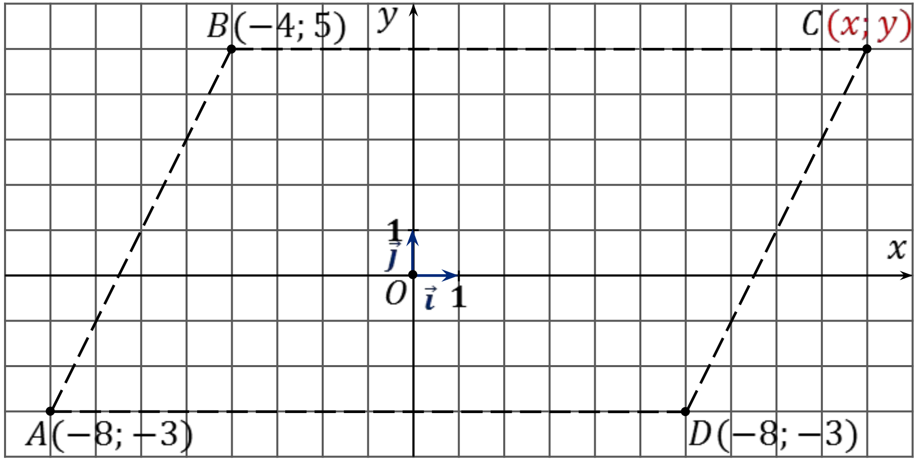
$\overrightarrow{AC}\,\{4 + 14; 8 + 0\}$

$\overrightarrow{AC}\,\{18; 8\}$

$\overrightarrow{AC}\,\{x - (-8); y - (-3)\}$

$$\begin{cases} 18 = x - (-8) \\ 8 = y - (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 5 \end{cases}$$

Ответ: $C(10; 5)$.



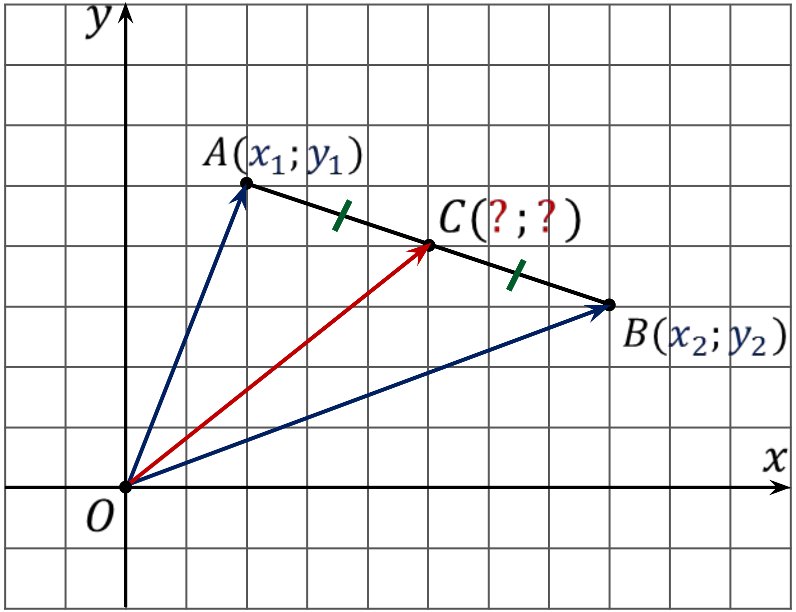
координаты вектора

действия над векторами

понятие вектора

метод координат

1. Определение координат середины отрезка



$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

$\overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки A

$\overrightarrow{OB}$ – радиус-вектор точки B

$\overrightarrow{OA}$ $\{x_1;y_1\}$

$\overrightarrow{OB}$ $\{x_2;y_2\}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$

$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$ $\left\{\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right\}$

Каждая координата середины отрезка
равна полусумме соответствующих координат его концов.

$\overrightarrow{OC}$ $C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Найти координаты точки C, являющейся серединой отрезка AB.

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

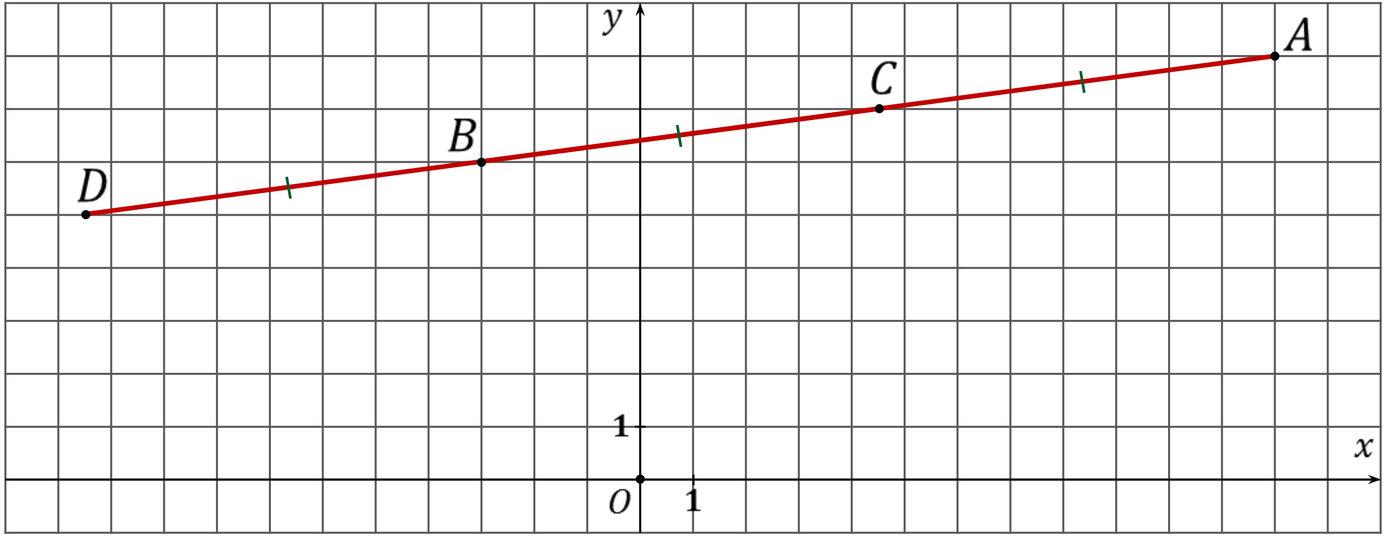
$$\begin{cases} x = \dfrac{\quad + \quad}{2} \\ y = \dfrac{\quad + \quad}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\quad + \quad}{2} \\ y = \dfrac{\quad + \quad}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 7{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{0{,}5 + 2{,}5}{2} \\ y = \dfrac{4 + 8}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1{,}5 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-7 + 5}{2} \\ y = \dfrac{2 + (-2)}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Задача. Даны точки $A(12;8)$ и $B(-3;6)$.
Найти координаты точек C и D, если C — середина AB, а B —середина CD.

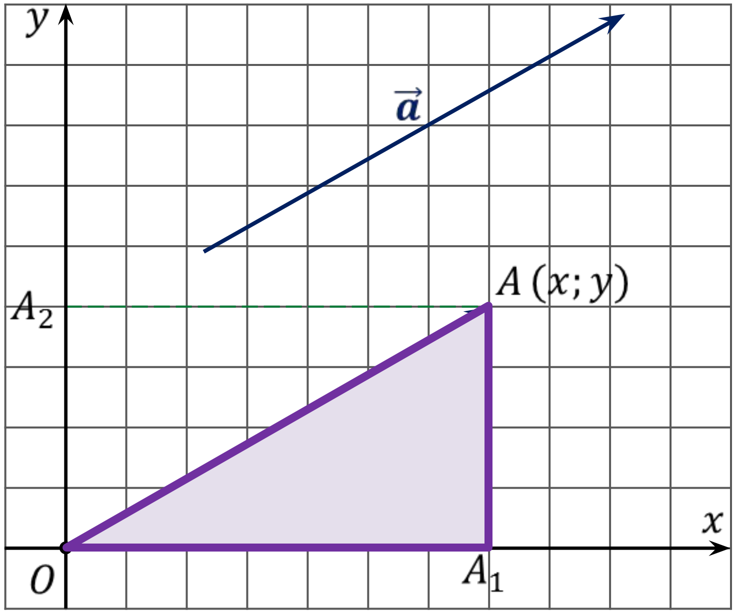


$C(\dfrac{12+(-3)}{2};\dfrac{8+6}{2})$

$C(4{,}5;7)$

B: $\begin{cases} -3 = \frac{4{,}5+x_D}{2} \\ 6 = \frac{7+y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -10{,}5 \\ y_D = 5 \end{cases}$ $D(-10{,}5;5)$

2. Вычисление длины вектора по его координатам



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

$A(x;y) \implies \overrightarrow{OA}\{x;y\}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\vec{a}\,\{x;y\}}$

$OA_1 = |x|$

$A_1A = OA_2 = |y|$

$OA^2 = OA_1{}^2 + A_1A^2 \implies OA = \sqrt{OA_1{}^2 + A_1A^2}$

$OA = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \implies |\overrightarrow{OA}| = |\vec{a}| \implies OA = |\vec{a}|$

$\boldsymbol{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

$$\vec{a}\,\{x; y\} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Вычислить длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

$\vec{a}\,\{1; 2\sqrt{2}\}$

$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}$

$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 8}$

$|\vec{a}| = \sqrt{9}$

$|\vec{a}| = 3$

$\vec{b}\,\{-1; 0\}$

$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1 + 0}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1}$

$|\vec{b}| = 1$

$\vec{c}\,\{0; 0\}$

$|\vec{c}| = \sqrt{0^2 + 0^2}$

$|\vec{c}| = \sqrt{0 + 0}$

$|\vec{c}| = \sqrt{0}$

$|\vec{c}| = 0$

$\vec{d}\,\{15; 20\}$

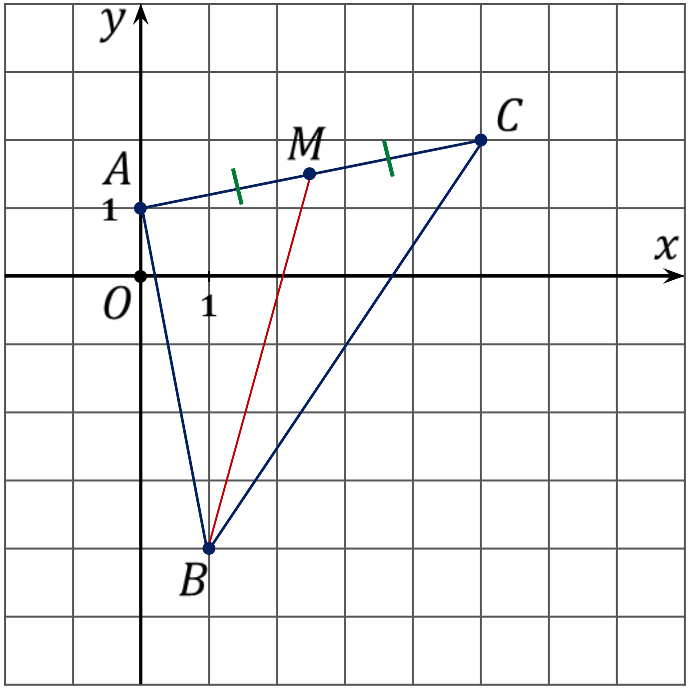
$|\vec{d}| = \sqrt{15^2 + 20^2}$

$|\vec{d}| = \sqrt{225 + 400}$

$|d| = \sqrt{625}$

$|\vec{d}| = 25$

Задача. Найти длину медианы BM, треугольника ABC, если $A(0;1)$, $B(1;-4)$, $C(5;2)$.



Решение.

$$M\left(\frac{5+0}{2};\frac{2+1}{2}\right) \iff M\,(2{,}5;1{,}5)$$

$$\overrightarrow{BM}\,\{2{,}5-1;1{,}5-(-4)\} \iff \overrightarrow{BM}\,\{1{,}5;5{,}5\}$$

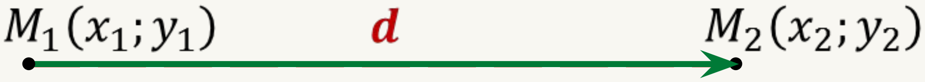
$$\left|\overrightarrow{BM}\right| = \sqrt{(1{,}5)^2+(5{,}5)^2} = \sqrt{2{,}25+30{,}25} = \sqrt{32{,}5}$$

$$\sqrt{32{,}5} = \sqrt{25\cdot 1{,}3} = 5\sqrt{1{,}3}$$

$$\left|\overrightarrow{BM}\right| = BM = 5\sqrt{1{,}3}$$

Ответ: $5\sqrt{1{,}3}$.

3. Определение расстояния между двумя точками



$$\overrightarrow{M_1M_2}\,\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = M_1M_2 = d$$

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

Найти расстояние между точками A и B.

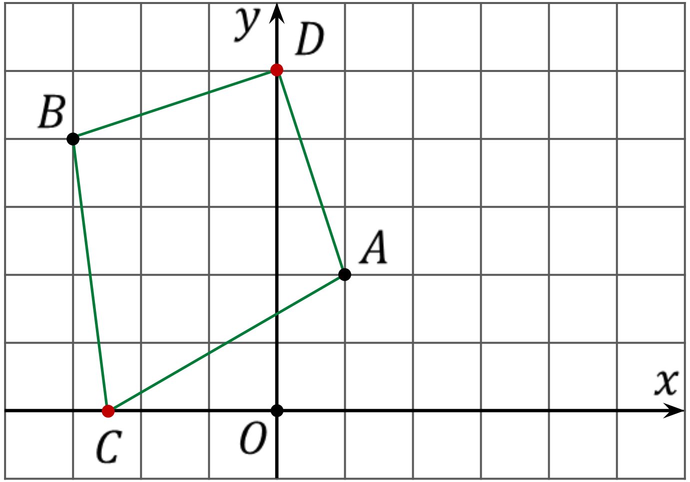
1. $A(6;-5)$, $B(10;-8)$ $\quad AB = \sqrt{(10-6)^2+(-8-(-5))^2} = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

2. $A(-2;-1)$, $B(6;5)$ $\quad AB = \sqrt{(6-(-2))^2+(5-(-1))^2} = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = 10$

3. $A(5;13)$, $B(5;12)$ $\quad AB = \sqrt{(5-5)^2+(12-13)^2} = \sqrt{0^2+(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

Задача. На оси Ox и на оси Oy найти точки равноудалённые от точек $A(1;2)$ и $B(-3;4)$.

Решение.



$C(x;0)$

$AC = BC$

$\sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2} = \sqrt{(x-(-3))^2+(0-4)^2}$

$(x-1)^2+(0-2)^2 = (x-(-3))^2+(0-4)^2$

$x^2-2x+1+4 = x^2+6x+9+16$

$-8x = 20 \quad \Longrightarrow \quad x = -2{,}5$ **$C(-2,5;0)$**

$D(0;y)$

$AD = BD$

$\sqrt{(0-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(0-(-3))^2+(y-4)^2}$

$(0-1)^2+(y-2)^2 = (0-(-3))^2+(y-4)^2$

$1+y^2-4x+4 = +9+y^2-8x+16$

$4y = 20 \quad \Longrightarrow \quad y = 5$ **$D(0;5)$**

Ответ: $C(-2{,}5;0)$, $D(0;5)$.

Простейшие задачи в координатах