Понятие логарифма

Учебное портфолио по алгебре

Разделы:

- 1) Титульный лист
- 2)Портрет автора портфолио
- 4)Глоссарий
- 5)Мое творчество

Портрет автора портфолио

«Математика выявляет порядок, симметрию и определённость, а это – важнейшие виды прекрасного.»

Глоссарий

- ***Основное логарифмическое тождество*** - это равенство, выражающее определение логарифма
- ***Десятичный логарифм***-Логарифм по основанию 10 имеет специальное обозначение $\log_{10}x=\lg x$
- ***Натуральный логарифм***-специальное обозначение $\log_{b}x=\ln x$

Задачи

Основное логарифмическое тождество

$a^{\log_a b} = b$

$8^{2\log_8 3} = (8^{\log_8 3})^2 = 3^2 = 9$

Логарифм произведения — это сумма логарифмов

$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$

$\log_3 8,1 + \log_3 10 = \log_3(8,1 \cdot 10) = \log_3 81 = 4$

Логарифм частного — это разность логарифмов

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

$\frac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50 - \log_5 2} = 9^{\log_5 25} = 9^2 = 81$

Свойства степени логарифмируемого числа и основания логарифма

Показатель степени логарифмируемого числа $\log_a b^m = m \log_a b$

Показатель степени основания логарифма $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$

$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b$, в частности если m = n, мы получаем формулу: $\log_{a^n} b^n = \log_a b$, например:

$\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \log_2 3$

Переход к новому основанию

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, частности, если c = b, то $\log_b b = 1$, и тогда:

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\log_{0,8} 3 \cdot \log_3 1,25 = \log_{0,8} 3 \cdot \frac{\log_{0,8} 1,25}{\log_{0,8} 3} = \log_{0,8} 1,25 = \log_{\frac{4}{5}} \frac{5}{4} = -1$

$\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$;

$\log_7 49 = 2$, так как $7^2 = 49$;

$\log_5 \frac{1}{5} = -1$, так как $5^{-1} = \frac{1}{5}$;

$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$, так как $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

$\log_2 4 = 2$, так как $2^2 = 4$;

$\log_5 125 = 3$, так как $5^3 = 125$;

$\log_3 \frac{1}{9} = -2$, так как $3^{-2} = \frac{1}{9}$;

$\log_{301} 1 = 0$, так как $301^0 = 1$;

ПРИМЕР 1

Задание Найти значение выражения $\log_4 32$

Решение Представим основание и число, находящиеся под логарифмом, в виде степени 2, получим:

$$\log_4 32 = \log_{2^2} 2^5$$

Выносим степени из под знака логарифма, как коэффициент, согласно формулам $\log_a b^k = k \cdot \log_a b$ и $\log_{a^k} b = \frac{1}{k} \cdot \log_a b$, будем иметь:

$$\log_4 32 = \log_{2^2} 2^5 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \log_2 2$$

Учитывая, что $\log_a a = 1$, окончательно получим:

$$\log_4 32 = \frac{5}{2} \log_2 2 = \frac{5}{2}$$

Ответ $\log_4 32 = \dfrac{5}{2}$

ПРИМЕР 2

Задание Найти значение выражения $\log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 1$

Решение Сумма логарифмов равна логарифму произведения, поэтому данное выражение перепишется в виде:

$$\log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 1 = \log_{12}(3 \cdot 4) + 1 = \log_{12} 12 + 1$$

Учитывая, что $\log_a a = 1$, окончательно получим:

$$\log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 1 = \log_{12} 12 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Ответ $\log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 1 = 2$

ПРИМЕР 3

Задание Вычислить значение выражения

$$\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18}$$

Решение Перейдем в каждом из слагаемых к логарифму по основанию 18, используя формулу перехода $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. Получим:

$$\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18} = \log_{18} 12 + \log_{18} 27$$

Так как сумма логарифмов равна логарифму произведения, последняя сумма перепишется в виде:

$$\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18} = \log_{18} 12 + \log_{18} 27 = \log_{18}(12 \cdot 27) = \log_{18} 324$$

Число 324 можно представить как степень 18, получим

$$\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18} = \log_{18} 324 = \log_{18} 18^2$$

далее выносим степень как коэффициент перед знаком логарифма:

$$\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18} = \log_{18} 18^2 = 2 \cdot \log_{18} 18$$

Учитывая, что $\log_a a = 1$, окончательно будем иметь:

$$\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18} = 2 \cdot \log_{18} 18 = 2 \cdot 1 = 2$$

Ответ $\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18} = 2$

ПРИМЕР 4

Задание Вычислить $8^{\log_2 3} + 9^{\log_3 4}$

Решение Представим 8 и 9 как степень соответственно 2 и 3:

$$8^{\log_2 3} + 9^{\log_3 4} = (2^3)^{\log_2 3} + (3^2)^{\log_3 4} = 2^{3\cdot\log_2 3} + 3^{2\cdot\log_3 4}$$

Внесем коэффициенты перед логарифмами как степень подлогарифмического выражения:

$$8^{\log_2 3} + 9^{\log_3 4} = 2^{3\cdot\log_2 3} + 3^{2\cdot\log_3 4} = 2^{\log_2 3^3} + 3^{\log_3 4^2} = 2^{\log_2 27} + 3^{\log_3 16}$$

Использую основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b} = b$, окончательно получим:

$$8^{\log_2 3} + 9^{\log_3 4} = 2^{\log_2 27} + 3^{\log_3 16} = 27 + 16 = 43$$

Ответ $8^{\log_2 3} + 9^{\log_3 4} = 43$

ПРИМЕР 5

Задание Вычислить $\log_8 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 4$

Решение Перейдем во всех логарифмах к основанию 2, используя формулу перехода к новому основанию:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

получим

$$\log_8 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 4 = \frac{\log_2 7}{\log_2 8} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 6} = \frac{\log_2 4}{\log_2 8}$$

Представим 4 и 8 в виде степени двойки и вынесем полученные степени за знак логарифма как коэффициент:

$$\log_8 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^3} = \frac{2 \cdot \log_2 2}{3 \cdot \log_2 2} = \frac{2}{3}$$

Ответ $\log_8 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 4 = \frac{2}{3}$

Найдите значение выражения .

$$36^{\log_6 5}$$

$$36^{\log_6 5} = (6 \cdot 6)^{\log_6 5} = 6^{\log_6 5} \cdot 6^{\log_6 5} = 5 \cdot 5 = 25$$

Использовали:

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Основное логарифмическое тождество

Ответ: 25

$$5^{\log_{25} 49}$$

$$5^{\log_{25} 49} = 5^{\log_{25} 7^2} = 5^{\,2 \cdot \log_{25} 7} = (5^2)^{\log_{25} 7} =$$

$$= 25^{\log_{25} 7} = 7$$

$$8^{2 \cdot \log_8 3}$$

$$8^{2 \cdot \log_8 3} = \left(8^{\log_8 3}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$\frac{\log_3 25}{\log_3 5}$$

$$\frac{\log_3 25}{\log_3 5} = \log_5 25 = 2$$

Использовали:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Основное логарифмическое тождество

$$64^{\log_8 \sqrt{3}}$$

$$64^{\log_8 \sqrt{3}} = (8 \cdot 8)^{\log_8 \sqrt{3}} = 8^{\log_8 \sqrt{3}} \cdot 8^{\log_8 \sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$$

$$\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13}$$

$$\log_{\frac{1}{13}} \sqrt{13} = \log_{13^{-1}} 13^{0,5} = \frac{1}{-1} \cdot \log_{13} 13^{0,5} = -1 \cdot 0,5 = -0,5$$

Ответ: – 0,5